1. fejezet

Halmazok és függvények

Már a matematika tagozatos óvodában a fejünkbe vésték: a halmazokat az elemeik határozzák meg, két halmaz csak úgy különbözhet egymástól, ha az egyiknek van olyan eleme, amelyik a másiknak nem eleme. Ebben a fejezetben azt érzékeltetjük, hogy a halmazok nemcsak úgy mutatkozhatnak be, hogy elárulják, mi van a kapcsos zárójelek között, hanem úgy is, hogy közlik: milyen függvények értelmezhetők rajtuk – milyen nyilakat lőnek ki –, és milyen függvények érkeznek beléjük, azaz milyen nyilak találják el őket.

Ha két – esetleg különböző módon megadott – halmaz egyenlő, akkor nyilván ugyanazok az elemeik. A *meghatározottsági axióma*[1] ennek a megfordítását állítja: ha két halmaz elemei ugyanazok, akkor a két halmaz egyenlő. Ha tehát két – különböző módon megadott – halmaz egyenlőségét akarjuk bizonyítani, akkor ezt eldönthetjük pusztán egy „belső ellenőrzéssel", az elemek vizsgálatával, „kifelé" nem kell kutakodnunk, nem kell például megvizsgálnunk, hogy halmazaink mely halmazoknak elemei. (Világos persze, hogy ha van olyan G halmaz, amelynek az E halmaz eleme, az F pedig nem, akkor E és F különböző halmazok.)

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy nagyon sok alapvető fogalom értelmezéséhez elegendő, ha a halmazokat csupán „kívülről" vesszük szemügyre. A külső nézőpont fókusza egy E halmaz esetében az lesz: milyen függvények értelmezettek E-n, illetve milyen függvények érkeznek E-be.

Lássunk egy példát. Hogyan jellemeznénk az egyelemű halmazokat? Az $\in$-alapú meghatározás a következő: az E halmaz egyelemű, ha van olyan A halmaz, hogy $E = \{A\}$. Az egyelemű halmazokat azonban azzal a tulajdonságukkal is definiálhatjuk, hogy bármely halmazból *pontosan egy* függvény érkezik beléjük – nyilván egy konstans függvény.

[1] Az axiomatikus halmazelméletetről a fejezet végén adunk egy rövid összefoglalót.

A halmazok világáról tehát különböző alapszínekből festhetünk képeket. A képek egyik része az $\in$ reláción alapul, amelynek alapvető tulajdonságait a Zermelo–Fränkel-féle axiómák rögzítik. Az alternatív képekhez „csupán" függvényeket használunk. A csapos persze azonnal közbeszól: a függvények is halmazok! És természetesen igaza van, a „hivatalos" halmazelméletben valóban így áll a dolog. Válaszunk a következő. Amikor az $\in$-alapú képeket festjük, akkor alapszíneink az $\in$ reláció alapvető – ha nem vagyunk naivak, akkor axiomatikusan rögzített – tulajdonságai. Miért ne cserélhetnénk le ezeket függvényekre vonatkozó „alapigazságokra"? Valamiből így is, úgy is ki kell indulnunk, elvégre a semmiből csak légvárat lehet építeni.[1]

1.1. Relációk, függvények

A halmazokra vonatkozó – az általános műveltség részét képező – legalapvetőbb jelöléseket ismertnek tekintjük.[2] A függvény fogalmának értelmezéséhez szükségünk van két halmaz *Descartes-féle szorzatának* definíciójára, aminek alapja a *rendezett pár* fogalma. Kezdjük tehát az elején.

Rendezett párok. Descartes-féle szorzat

Az $\langle u, v\rangle$ *rendezett párt* így értelmezzük:

$$\langle u, v\rangle =_{\text{def}} \{\{u\}, \{u, v\}\}$$

A rendezett párok alapvető tulajdonsága: $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ *pontosan akkor, ha* $a = c$ *és* $b = d$.

1.1.1. Igazoljuk! [Az egyik irány triviális; a másik egy egyszerű esetszétválasztás, és azon alapul, hogy egy kételemű halmaz nem lehet egyenlő egy egyeleművel.]

1.1.2. A fenti definíció Kuratowskitól származik; az „alapvető tulajdonság" a Wiener-féle $\langle u, v\rangle =_{\text{def}} \{\{\varnothing, \{u\}\}, \{\{v\}\}\}$ definícióval is igazolható. Bizonyítsuk be!

A Descartes féle szorzat tehát többféleképpen is meghatározható, a különböző definíciók lényegében ugyanazt adják meg. Arra, hogy mit is jelent ez a „lényegében", a következőkben még sokszor visszatérünk.

[1] Elnézést kérünk a meggyőződéses Heidegger-követőktől.

[2] Azt, hogy az a halmaz a b halmaz eleme, így jelöljük: $a \in b$. Az $\in$ jel egy stilizált görög epszilon (ϵ), a görög létige első betűje: $a \in b$ tehát „azt mondja": a („van") egy b. A jelölést Giuseppe Peano vezette be, aki után a természetes számok – valójában Dedekindtől származó – axiómáit elnevezték. Azt, hogy az E halmaz részhalmaza az F halmaznak $E \subseteq F$, az ürest halmazt $\varnothing$, az E és F halmazok metszetét $E \cap F$, uniójukat $E \cup F$ jelöli.

Kettőről könnyű háromra jutni: a *rendezett hármasokat* így értelmezzük:

$$\langle a, b, c\rangle =_{\mathrm{def}} \langle\langle a, b\rangle, c\rangle$$

Világos, hogy általában $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle \neq \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ A rendezett négyesek, ötösök stb. értelmezése hasonlóan megy.

Az E és F halmazok *Descartes-szorzata* azoknak a rendezett pároknak a halmaza, amelyeknek első eleme E, a második pedig F eleme. Ezt a halmazt $E \times F$ jelöli:

$$E \times F =_{\mathrm{def}} \{\langle e, f\rangle : e \in E \text{ és } f \in F\}$$

1.1.3. Legyen E egy halmaz. Melyik halmaz az $\{E\} \times \{E\}$ Descartes-szorzat?

Relációnak nevezünk minden olyan halmazt, amelynek elemei rendezett párok. Ha egy R reláció olyan rendezett párokból áll, amelyek első tagja az E, a második az F halmaz eleme, akkor nyilván $R \subseteq E \times F$. Ha pedig $R \subseteq E \times E$, akkor R-t *az* E *halmazon értelmezett relációnak* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az $R \subseteq E \times F$ reláció *függvényszerű,* ha R olyan rendezett párokból áll, amelyeknek (i) első tagjai közt E valamennyi eleme szerepel, mégpedig (ii) mindegyik pontosan egyszer. Úgy is fogalmazhatunk: relációnk az E halmaz minden eleméhez „rendel" egy F-beli elemet; ha $\langle e, f\rangle \in R$, akkor azt mondjuk, hogy R az e-hez f-et rendeli.

A függvény fogalma

Minden rendelkezésünkre áll immár a függvény fogalmának meghatározásához. Egy függvény megadásához három dolog kell: (i) egy halmaz, mondjuk E, (ii) még egy halmaz, mondjuk F (nem zárjuk ki, hogy $E = F$), és (iii) egy $R \subseteq E \times F$ függvényszerű reláció. Ha mindhárom dologra szükségünk van, akkor értelemszerűen azt mondhatjuk (és azt is mondjuk): a szóban forgó *függvény egy* $\langle E, F, R\rangle$ *rendezett hármas.* Az E halmazt a függvény *értelmezési tartományának,* az F-et a függvény *érkezési halmazának,* az R relációt pedig a függvény grafikonjának nevezzük.

Ha f az $\langle E, F, R\rangle$ függvény, akkor az $f : E \longrightarrow F$ jelölést használjuk; ha $e \in E$, akkor az f által e-hez rendelt F-beli elemet $f(e)$ vagy fe jelöli; ilyenkor azt mondjuk: fe az e argumentumhoz tartozó függvényérték. Magát a „szabályt" gyakran $e \mapsto fe$ formában adjuk meg.

Értelmezhető-e függvény az üres halmazon? Tetszőleges F halmaz esetén, ha $f : \varnothing \longrightarrow F$ függvény, akkor az $f = \langle \varnothing, F, R_f\rangle$ hármasban R_f csak az üres halmaz lehet. Ebben az egyetlen esetben állíthatjuk ugyanis, hogy R_f *minden eleme* olyan rendezett pár, amelynek első tagja az $\varnothing$ halmaz, a második tagja pedig F eleme, és hogy az első tagok között $\varnothing$ minden eleme pontosan egyszer jelenik meg.[1] Összefoglalva: *tetszőleges* F *halmaz esetén pontosan egy, az* $\varnothing$ *halmazon értelmezett,* F*-be érkező függvény létezik.* Ez a tulajdonság ráadásul az üres halmazt egyértelműen meghatározza – ha egy halmaz olyan, hogy tetszőleges F halmaz esetén pontosan egy, rajta értelmezett F-be érkező függvény létezik, akkor az illető halmaz csak $\varnothing$ lehet. Elvégre ha E nem üres, akkor egy kételemű F halmaz esetén legalább kettő, E-n értelmezett, F-be érkező fügvény biztosan létezik.

1.1.4. Mikor létezik *pontosan kettő* darab $E \longrightarrow F$ függvény?

1.1.5. Függvény-e a $\langle\varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$ hármas?

Iménti megfigyelésünk párja a következő: ha a T halmaz egyelemű, akkor tetszőleges E halmaz esetén pontosan egy, E-n értelmezett, T-be érkező függvény létezik. (Az a *konstans függvény,* amelynél minden „függvényérték" a T halmaz egyetlen eleme. Világos, hogy konstans függvény minden nemüres halmazba érkezhet, egyelemű halmazba pedig éppen egy.) Ez a tulajdonság az egyelemű halmazok „karakterisztikus tulajdonsága" – ha egy halmazba bármely halmazból pontosan egy függvény érkezik, akkor biztosak lehetünk benne: a halmaz egyelemű. (Ha E-ből két különböző függvény érkezne T-be, akkor ezeknek E legalább egy eleméhez különböző T-beli elemeket kellene rendelniük – ha T-nek csak egy eleme van, akkor ez „mission impossible".)

1.1.6. Legyen T egyelemű halmaz. Az előbbiek szerint pontosan egy $\varnothing \longrightarrow T$ függvény létezik – melyik ez a függvény?

1.1.7. Legyenek $f, g : E \longrightarrow \varnothing$ függvények. Mit mondhatunk ekkor E-ről, illetve f-ről és g-ről?

Annak idején azt tanultuk: az E halmazon értelmezett, az F halmazba érkező függvényeket olyan „szabályok" adják meg, amelyek alapján E minden eleméhez „hozzárendelhetjük" az F halmaz pontosan egy elemét. Az E halmaz elemei ekkor az inputok, az outputok pedig mind F-beliek. Az iménti definíció nem magát a szabályt – a „dinamikát" –, hanem a szabály alkalmazásának végeredményét tartja szem előtt; „ugyanazt" a függvényt több különböző „szabállyal" is megadhatjuk.

A függvények tehát $\langle E, F, R_f\rangle$ rendezett hármasok. Valaki felvethetné: az F halmaz megadására igazából nincs szükség – ha az E halmaz minden eleméhez hozzárendelünk valamit, akkor ezek a „valamik" automatikusan egy

[1] Az üres halmaz minden eleme zöld – aki ezt cáfolni akarja, annak igazolnia kell, hogy az üres halmaz létezik legalább egy nem-zöld eleme. De az üres halmaznak semmilyen (így nem-zöld) eleme sincs...

halmazt alkotnak, amelyet – vagy valamely, őt tartalmazó halmazt – nem kell előzetesen rögzítenünk. Így például ha függvényünk a nemnegatív valós számokhoz a négyzetgyöküket rendeli, akkor nincs sok különbség, ha az érkezési halmaznak a nemnegatív valós számok, vagy az összes valós szám halmazát tekintjük. Erre azt válaszoljuk: számos olyan eset van, amikor nem árt „előre” rögzíteni, miféle objektumok is az outputok. Ennél is fontosabb azonban, hogy a függvényekkel kapcsolatos fontos fogalmak – például a szürjektivitás – a „lecsupaszított” függvényfogalommal nemigen értelmezhető.

De ne rohanjunk ennyire előre. Az egzotikus nevű függvénytulajdonságoknál vannak egyszerűbb konstrukciók is...

1.2. Identitások, kompozíciók

Az E halmaz Δ_E *diagonálisa* azoknak a rendezett pároknak a halmaza, amelyeknek első és második tagja az E halmaz ugyanazon eleme, azaz

$$\Delta_E =_{\text{def}} \{\langle e, e\rangle : e \in E\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $1_E = \langle E, E, \Delta_E\rangle$ hármas tetszőleges E halmaz esetén függvény. Ezt a függvényt *az E halmaz identikus függvényének* nevezzük, 1_E tehát E minden eleméhez önmagát, azaz a „vele identikus” E-beli elemet „rendeli”.

Legyenek f és g olyan függvények, hogy f érkezési halmaza megegyezik g értelmezési tartományával; például: $f = \langle E, F, R_f\rangle$ és $g = \langle F, G, R_g\rangle$. Ilyenkor – és csak ilyenkor! – értelmezhető a két függvény – $g \circ f$-fel jelölt – *kompozíciója*: $g \circ f = \langle E, G, R_{g\circ f}\rangle$, ahol

$$R_{g\circ f} = \{\langle a, b\rangle : a \in E \text{ és } b = g(fa)\}.$$

Ha nem okoz félreértést, akkor a $g \circ f$ kompozíciót egyszerűen gf jelöli.[1]

1.2.1. Legyen E az emberek halmaza. Az $f : E \longrightarrow E$ függvény hozzárendelési szabálya: $x \mapsto x$ apja; az $m : E \longrightarrow E$ függvényé pedig: $x \mapsto x$ anyja. Mit (kit) adnak meg az $f \circ f$, $m \circ m$, $f \circ m$, $m \circ f$ függvények?

A kompozícióképzés tehát nem kommutatív művelet[2], azaz $f \circ g$ és $g \circ f$ még akkor sem feltétlenül ugyanaz a függvény, ha mindkettő jól definiált (ami

[1] Vannak szerzők, akik a fordított sorrendet követik, azaz ami nálunk gf, az náluk fg. Figyeljünk erre, amikor a szakirodalmat böngésszük!

[2] Jegyezzük meg itt, hogy a szó szoros értelmében nem műveletről van szó, elvégre egy E halmazon értelmezett (kétargumentumú) művelet általában egy $E \times E \longrightarrow E$ függvény, amely tehát $E \times E$ *minden* eleméhez megadja az outputot. Két *tetszőleges* függvény kompozíciójának pedig nincs mindig értelme.

kizárólag akkor fordulhat elő, ha a két függvény értelmezési tartománya és érkezési halmaza megegyezik).

Egy másik fontos tulajdonsággal mindazonáltal a kompozíció is rendelkezik: ha adottak az

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

függvények, akkor $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, *a kompozícióképzés tehát asszociatív.* Ennek igazolásához – mivel a $h \circ (g \circ f)$ és a $(h \circ g) \circ f$ függvény értelmezési tartománya és érkezési halmaza megegyezik – elég azt belátni, hogy az A bármely a eleméhez ugyanazt a D-beli elemet – jelesül $h(g(f(a)))$-t – rendelik.

1.2.2. Mutassuk meg, hogy valóban így van!

Ha tehát van egy háromtagú $h \circ g \circ f$ kompozíciónk, akkor zárójelekre valójában nincs is szükség. Ez általánosan igaz: tetszőleges $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ kompozícióban csak az f_i függvények sorrendje számít, a zárójelek nem osztanak és nem szoroznak.

1.2.3. Ezt a tényt néha mint az általános asszociativitási szabályt emlegetik. Bizonyítsuk be! [Teljes indukcióval.]

Lássuk, mi az ábra! A kompozíció assziciativitása miatt akármelyik úton „megyünk” A-ból D-be, ugyanazt a függvényt adjuk meg.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy *a diagram kommutatív.* Kommutatív diagramokkkal – ebben a könyben legalábbis – lépten-nyomon találkozunk, de jegyezzük meg már most, hogy *egy „diagram” általában nem kommutatív.* Ha például d minden természetes számhoz a nála hárommal, z a kettővel, s a hattal, a pedig a nyolcal nagyobbat rendeli, akkor a

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "a"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "z"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

diagram nem kommutatív: a jobbra-lefelé kapott kompozíció minden számhoz a nála 11-gyel nagyobbat, a lefelé-jobbra kompozíció viszont minden számhoz a nála nyolccal nagyobbat rendeli.[1]

Az identikus függvényekkel alkotott kompozíciók meglehetősen egyszerűek. Tetszőleges $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow C$ függvények esetén $1_B \circ f = f$ és $g \circ 1_B = g$, a következő diagram tehát kommutatív:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "1_B"'] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Az identikus függvényeket „kompozíciós hatástalanságuk" egyértelműen meghatározza. Ezen a következőt értjük: ha x olyan $B \longrightarrow B$ függvény, hogy tetszőleges $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow C$ függvények esetén $x \circ f = f$ és $g \circ x = g$, akkor $x = 1_B$.

1.2.4. Igazoljuk, hogy valóban így van! Vizsgáljuk meg külön azokat az eseteket, amikor B az üres, illetve egy egyelemű halmaz!

1.2.5. Ha tehát egy $B \longrightarrow B$ függvény balról és jobbról egyaránt hatástalan minden kompozícióra, akkor csak az identikus függvény lehet. Elegendő-e ugyanehhez a konklúzióhoz csak a balról, vagy csak a jobbról való hatástalanság?

1.3. Hol is tartunk?

Általában nem szokás néhány oldal után összefoglalni az eredményeket, és ezt a szokást ebben a könyvben is megtartjuk. A későbbiek szempontjából azonban mégis hasznos, ha rögzítjük a halmazok és függvények univerzumának „legalapvetőbb" törvényeit.

A függvények mindig két – nem feltétlenül különböző, de egyértelműen adott – halmaz között haladnak. Azt, hogy az f függvény az A és a B halmaz között halad, így jelöljük:

$$A \xrightarrow{f} B$$

Ha az f függvény abba a halmazba érkezik, amelyen a g értelmezve van, azaz vannak olyan A, B és C halmazok, hogy

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

akkor f és g egyértelműen meghatározzák az

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

[1] Szokás szerint a természetes számok halmazát $\mathbb{N}$, az egész számokét $\mathbb{Z}$, a racionális számokét $\mathbb{Q}$, a valós számokét pedig $\mathbb{R}$ jelöli.

kompozíciót („összetett függvényt”).

Ha f, g és h olyanok, hogy g onnan indul, ahova f érkezik, és oda érkezik, ahonnan h indul, azaz vannak olyan A, B, C, D halmazok, hogy

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D,$$

akkor az előbbiek értelmében létező $f \circ (g \circ h)$ és az $(f \circ g) \circ h$ összetett függvények egyenlőek, a kompozícióképzés tehát asszociatív, azaz a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

diagram tehát kommutatív.

Minden E halmaznak létezik egy – 1_E-vel jelölt – „identikus” függvénye. Az identikus függvények karakterisztikus tulajdonsága, hogy a kompozícióképzésre nézve hatástalanok, azaz a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "1_B"'] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

diagram tetszőleges A és B halmaz, illetve $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow A$ függvény esetén kommutatív.

Ezek tehát a függvények legalapvetőbb jellemzői. És most az javasoljuk, tartson az Olvasó önvizsgálatot: hajlandó lenne ezeket axiómának tekinteni? Már halljuk is a berzenkedő ellenvetést: miért tartanánk axiómáknak, ha egyszer bebizonyítottuk valamennyit? Erre azt válaszoljuk: várjuk ki a végét...

Azt a nyilvánvaló tényt, hogy bármely E halmaznak pontosan egy identikus függvénye van, a következőképpen is beláthatjuk. Ha 1_E és $1'_E$ egyaránt ilyenek, akkor – mivel a velük való kompozícióképzés jobbról és balról egyaránt hatástalan, $1_E = 1_E \circ 1'_E = 1'_E$.

A következő két feladat jelentőségét nehéz eltúlozni. (Ennek felismeréséhez persze még vagy 20 oldalt el kell olvasni a könyvben.)

1.3.1. Érvényben maradnak-e a „legalapvetőbb törvények”, ha halmazok helyett (természetes) számokról beszélünk, a függvényeket jelző nyilakat pedig a $\leq$ relációjelre cseréljük?

1.3.2. És ha a – közelebbről meg nem határozott „halmazok” helyett egy adott E halmaz részhalmazairól, a nyilak helyett pedig a $\subseteq$ relációról beszélünk?

1.4. Descartes-féle szorzat – Újra

A függvények megadásakor a Descartes-féle szorzat alapvető szerepet játszott. Lássuk most, miként adható vissza a kölcsön, azaz: hogyan „adható meg” két halmaz Descartes-fél szorzata kizárólag függvényekre hivatkozva.

Az A és B halmazok $A \times B$ Descartes-féle szorzata – mint emlékszünk – azoknak az $\langle a, b\rangle$ rendezett pároknak a halmaza, amelyeknél $a \in A$ és $b \in B$. Az $A \times B$ halmazon így értelmezhető két – projekciónak nevezett – függvény, amely minden rendezett párhoz annak első, illetve második tagját rendeli:

$$p_A : A \times B \longrightarrow A; \quad \langle x, y\rangle \mapsto x$$
$$p_B : A \times B \longrightarrow B; \quad \langle x, y\rangle \mapsto y$$

Világos, hogy tetszőleges $f : C \longrightarrow A$ és $g : C \longrightarrow B$ esetén létezik olyan $h : C \longrightarrow A \times B$ függvény, amellyel $p_A \circ h = f$ és $p_B \circ h = g$, azaz amellyel a

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Megfelel például az a függvény, amelynek hozzárendelési szabálya: $c \mapsto \langle fc, gc\rangle$. Ennél több is igaz: ha a fenti diagram kommutatív, akkor h csak az ekként megadott függvény lehet, elvégre ha egy C-beli x esetén $hx \neq \langle fx, gx\rangle$, akkor vagy $p_A(hx) \neq fx$, vagy $p_B(hx) \neq gx$.

Saunders Mac Lane érdeme, hogy rámutatott: az iménti tulajdonság a Descartes-féle szorzatról mindent elmond, amire „a gyakorlatban” szükségünk lehet. Kimondhatunk tehát egy „nem hivatalos” szorzatdefiníciót: *az A és B halmazok szorzata egy $A \times B$ halmaz a $p_A : A \times B \longrightarrow A$ és a $p_B : A \times B \longrightarrow B$ projekciókkal, amelyekre teljesül, hogy, hogy tetszőleges C halmaz és $f : C \longrightarrow A$ és $g : C \longrightarrow B$ esetén pontosan egy olyan $h : C \longrightarrow A \times B$ függvény létezik, amellyel $p_A \circ h = f$ és $p_B \circ h = g$.*

„Nem hivatalos” definíciónk általánosabb az eredetinél. A „hivatalos” Descartes-szorzat természetesen kielégíti – jó néhány (végtelen sok) egyéb lehetőséggel egyetemben. Ezen nincs mit csodálkozni, elvégre új meghatározásunk semmit nem mond az $A \times B$ szorzat elemeiről. Az például, hogy a Descartes-féle szorzat értelmezésekor melyik rendezettpár-definícióból indulunk ki, teljesen irreleváns. A lényeg, hogy a kompozíciók szempontjából „szorzatunk” jól viselkedjen.

Mint emlékszünk, egy $f : A \longrightarrow B$ függvény grafikonja az $\langle x, fx\rangle$ rendezett párokból áll. Tekintsük most a

$$\begin{tikzcd}
 & B \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[dr, "1_A"'] & A \times B \arrow[u, "p_B"'] \arrow[d, "p_A"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

diagramot. A szorzathalmaz „nemhivatalos” definíciója szerint pontosan egy $f'A \longrightarrow A \times B$ függvény létezik, amellyel a diagram kommutatív, azaz amelyre teljesül $p_B \circ f' = f$ és $p_A \circ f' = f_A$. [Azt a tényt, hogy pontosan egy függvény tesz kommutatívvá egy digramot, általában úgy érzékeltetjük, hogy a szóban forgó függvényt pontozott nyíl jelöli.] Könnyű kitalálni, hogy melyik ez a függvény: az, amelyik A minden x eleméhez az $\langle x, fa\rangle$ rendezett párt rendeli.

1.4.1. Ellenőrizzük, hogy diagramunk az így definiált f' függvénnyel valóban kommutatív!

A szorzat új definíciója tehát magába foglalja a függvény grafikonjának meghatározását is: egy f függvény grafikonja annak az egyetlen f' függvénynek az értékkészlete, amellyel a fenti diagram kommutatív.

A szorzathalmaz elemei

Valójában még arra sincs szükség, hogy a szorzathalmaz rendezett párokból álljon, ezt mutatja a következő feladat.

1.4.2. Legyen T egyelemű halmaz. Igazoljuk, hogy tetszőleges A halmaz esetén A, 1_A és az (egyetlen) $A \longrightarrow T$ függvény kielégíti új definíciónkat!

A csapos persze megkérdezhetné: mik akkor egy szorzat elemei? Erre egy bolondosnak tűnő válasszal már készen állunk: az $A \times B$ halmaz elemeinek „tekinthetjük” a $T \longrightarrow A \times B$ függvényeket, ahol T egyelemű halmaz.

A T halmazból induló nyilak kitűntetett szerepét jelzi, hogy segítségükkel a függvények azonossága – vagy különbözősége – megragadható: *ha az* $f, g : A \longrightarrow B$ *függvények különbözőek, akkor van olyan* $t : T \longrightarrow A$ *függvény, hogy* $f \circ t \neq g \circ t$. Ez persze nyilvánvaló: ha $f \neq g$, akkor van olyan $a \in A$, hogy $fa \neq ga$, legyen tehát t az a függvény, amelynél a(z egyetlen) függvényérték a.

Mi a helyzet a rendezett párokra vonatkozó „alapvető azonossággal”, amely szerint$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ pontosan akkor, ha $a = c$ és $b = d$? Tetszőleges

$t : T \longrightarrow A$ és $t' : T \longrightarrow B$ függvény esetén definíciónk szerint pontosan egy $h : T \longrightarrow A \times B$ függvény létezik, amellyel $p_A \circ h = t$ és $p_B \circ h = t'$, a rendezett párokat tehát a tagjaik az új definíció szerint is egyértelműen meghatározzák. Mit veszítettünk akkor az extravagánsnak tűnő új definícióval? Ha meggondoljuk, nem sokat. Csupán „kiküszöböltük" a Descartes-féle szorzatban eredetileg meglévő – a rendezett pár definíciójából származó – önkényességet.

1.5. Diszjunkt unió

Hasonló önkényesség nyilvánul meg két halmaz *diszjunkt uniójának* értelmezésekor. Két halmaz uniója gyakran kevesebb elemet tartalmaz, mint a két halmaz együtt, elvégre lehetnek elemek, amelyek mindkét halmazban benne vannak. A diszjunkt unió esetében éppen az a célunk, hogy ez ne forduljon elő. Az A és a B halmazok diszjunkt unióját úgy képezzük, hogy előbb „előállítjuk" A és B diszjunkt „másolatait", azaz olyan, az A és B halmazokat „reprezentáló" A' és B' halmazokat, amelyekre $A' \cap B' = \varnothing$, majd vesszük ezek $A' \cup B'$ unióját.

A diszjunkt képek előállítása az A és a B halmaz elemeinek különböző színűre való befestését jelenti. Ez legegyszerűbben úgy valósítható meg, hogy veszünk két különböző halmazt – a sztenderd választás $\varnothing$ és $\{\varnothing\}$ –, majd az A halmaz elemeit az elsővel, a B halmaz elemeit pedig a másodikkal állítjuk párba:

$$\begin{aligned} A' =& \{\langle a, \varnothing\rangle : a \in A\} \\ B' =& \{\langle b, \{\varnothing\}\rangle : b \in B\} \end{aligned}$$

Az A' halmaz elemeit az A halmaz, a B' halmaz elemeit a B halmaz *reprezentánsainak* nevezzük. Könnyen belátható, hogy A' és B' diszjunkt halmazok. Az A és B halmazok diszjunkt uniója pedig – per definitionem – az $A' \cup B'$ halmaz.

Ha az A halmaz n, a B pedig k elemű, akkor diszjunkt uniójuknak $n + k$ eleme van. A diszjunkt unióképzés tehát az összeadás „halmazos általánosítása", úgy, ahogy a Descartes-féle szorzat a szorzásé.

Vegyük észre: a diszjunkt unió definíciója többszörösen önkényes. Hogy csak három szempontot említsünk: halmazunk elemei rendezett párok, és már tudjuk: rendezett párok sokféleképpen értelmezhetők úgy, hogy „lényegében ugyanazt" tudják. Másodszor: nyugodtan választhatnánk más megkülönböztető objektumokat is, a végeredmény „lényegében ugyanaz" lenne. Harmadszor: a megkülönböztető objektum lehetne a rendezett párok első eleme is, az eredmény „lényegében ugyanaz" lenne.

Ki lehet-e küszöbölni ezt az önkényt, hogy definíciónk „lényegében” megragadja azt, amit a diszjunkt uniótól várunk? A válasz egyértelmű igen.

Vezessük be az A és B halmazok diszjunkt uniójára az $A + B$ jelölést. Az $A+B$ halmazban tehát – könnyen felismerhető álruhában – ott vannak A és B elemei is. Ezt így is megfogalmazhatjuk: létezik egy $i_A : A \longrightarrow A + B$ és egy $i_B :\longrightarrow A + B$ függvény, amely az A, illetve a B halmaz elemeihez azok $A + B$-beli „megfelelőjét” rendeli. Világos, hogy milyen szabály szerint:

$$i_A : A \longrightarrow A + B; \quad x \mapsto \langle x, \varnothing \rangle$$
$$i_B : B \longrightarrow A + B; \quad x \mapsto \langle x, \{\varnothing\} \rangle$$

Ezekre a függvényekre pedig teljesül a következő: tetszőleges D halmaz és teszőleges $f : A \longrightarrow D$ és $g : B \longrightarrow D$ függvények esetén pontosan egy $h : A + B \longrightarrow D$ függvény létezik, amellyel $h \circ i_A = f$ és $h \circ i_B = g$, azaz amellyel a

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_A"'] & A+B \arrow[u, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

Világos, hogy h szerepét valóban egyetlen függvény játszhatja csak el: az, amelynek hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto \begin{cases} fx, \text{ ha } \langle x, \varnothing \rangle \in A' \\ gx, \text{ ha } \langle x, \{\varnothing\} \rangle \in B' \end{cases}$$

Ezek után előállhatunk egy szerény javaslattal. Legyen az A és B halmazok diszjunkt uniója *per definitionem* tetszőleges olyan $A + B$ halmaz az $i_A : A \longrightarrow A + B$ és az $i_B : B \longrightarrow A + B$ nyilakkal, amelyekre teljesül az iménti tulajdonság. Ilyen halmaz az előbbi konstrukció szerint létezik, így a definíció „nem üres”. Másrészt nyilván több (mi több, végtelen sok) halmaz kielégíti a definíciót – ezt az Olvasó is könnyen beláthatja. [Lássa be!]

1.5.1. Érveljünk amellett, hogy az új meghatározás szerint is fennáll az, amit két halmaz diszjunkt uniójától elvárunk: mindkét halmaz minden eleme képviselteti magát benne (azok az elemek, amelyek mindkét halmaznak elemei, kétszer is), és minden eleméről egyértelműen eldönthető, hogy melyik halmaz melyik elemét képviseli.

Az Olvasónak nyilván feltűnt: a szorzatot illusztráló diagram pontosan olyan, mint a diszjunkt unióé, csak a nyilak iránya más benne. A Descartes-féle szorzat és a diszjunkt unió között tehát meglehetősen intim kapcsolat áll fenn – és ezt éppen a függvényes-diagramos meghatározások tárták fel.

Lássuk most, mi a megfelelője a függvény grafikonját megadó diagramnak:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "i_A"] \\
B & A+B \arrow[l, dotted, "f''"'] \\
& B \arrow[ul, "1_B"] \arrow[u, "i_B"']
\end{tikzcd}$$

Az új „nemhivatalos” definíció szerint pontosan egy f'' függvény van, amellyel a diagram kommutatív. Melyik lehet ez a függvény? Az $A+B$ halmaz elemei $\langle a, \varnothing \rangle$, illetve $\langle b, \{\varnothing\} \rangle$ rendezett párok, amelyekben $a \in A$, illetve $b \in B$. Legyen most E az a halmaz, amely az $A+B$ azon részhalmazaiból áll, amelyek mindegyikében a B halmaz pontosan egy $\langle b, \{\varnothing\} \rangle$ reprezentánsa szerepel – az $\overset{-1}{f}(\{b\}$ halmaz elemeinek reprezentánsaival együtt. Mivel f függvény, az E halmaz elemeinek elemei között A összes reprezentánsa szerepel – méghozzá pontosan egyszer. Értelmezzük ezek után az f'' függvényt a következőképpen: a B halmazt reprezentáló $\langle b, \{\varnothing\} \rangle$ párokhoz rendelje f'' az első elemüket, az A halmazt reprezentáló $\langle a, \varnothing \rangle$ párokhoz pedig rendelje a B halmaznak azt az elemét, amelynek reprezentánsával a $\langle a, \varnothing \rangle$ pár az E halmazban együtt szerepel.

1.5.2. Ellenőrizzük, hogy az így definiált f'' függvénnyel a diagram valóban kommutatív!

Az f'' függvény értelmezése egy alternatív függvénydefiníciót sugall. Eszerint egy g függvény olyan rendezett $\langle A, B, S \rangle$ hármas, amelyben A és B – mint a „hivatalos” meghatározásban – g értelmezési tartománya, illetve értékkészlete, S pedig olyan, az $A+B$ halmaz páronként diszjunkt részhalmazaiból álló halmaz, amelynek minden elemében a B halmaz pontosan egy reprezentánsa szerepel, és amelynek uniója magaz az $A+B$ halmaz.[1]

1.6. Injekció, szürjekció, bijekció

Az exponenciális egyenletek (brr!) megoldásának utolsó előtti lépésében gyakran előfordult, hogy az egyenlet mindkét oldalán ugyanolyan alapú hatványok álltak, például: $2^x = 2^5$. Ilyenkor a nyilvánvaló $x = 5$ következtetés levonásakor – pontlevonás terhe mellett – jeleznünk kellett: „mivel az

[1]Egy E halmaz unióhalmaza az a halmaz, amelynek elemei: E elemeinek elemei.

2 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekszik". Ezzel valójában ágyúval lőttünk a verébre, elvégre a szóban forgó függvénynek valójában egy sokkal egyszerűbb tulajdonsága is biztosítja, hogy lépésünk helyénvaló: az tudniillik, hogy különböző számokhoz különböző számokat rendel, így ha két függvényérték egyenlő, akkor ilyennek kell lenniük az argumentumoknak is. [Nota bene: ha egy függvény szigorúan monoton növekvő, akkor persze teljesül rá az iménti, egyszerű tulajdonság is. Az utóbbi azonban akkor is értelmezhető, ha függvényünk értelmezési tartományában nincs értelme kisebbb vagy nagyobb elemekről beszélni. A szóban forgó tulajdonság igaz például arra a függvényre, amely minden felnőtt magyar állampolgárhoz az adóazonosító jelét rendeli, de szigorú monotonitásról ebben az esetben igencsak nehéz lenne beszélni.]

Az említett függvénytulajdonság az injektivitás, amelynek édestestvére is van: a szürjektivitás. Lássuk a precíz meghatározásokat.

1.6.1 Definíció. *Legyen* $f : E \longrightarrow F$ *függvény. Azt mondjuk, hogy* f
– injektív, *ha* E *különböző elemeihez* F *különböző elemeit rendeli, azaz tetszőleges* $x, y \in E$ *elemek esetén amennyiben* $x \neq y$*, úgy* $f(x) \neq f(y)$*; visszájáról fogalmazva: tetszőleges* $x, y \in E$ *esetén, ha* $f(x) = f(y)$*, akkor* $x = y$*;*
– szürjektív, *ha* F *minden eleme* E *valamely elemének* f *általi képe, azaz az* F *halmau minden* z *eleméhez létezik olyan* $x \in E$*, amelyre* $f(x) = z$*;*
– bijektív, *ha injektív és szürjektív.*

Az injektív függvényeket injekcióknak, a szürjektív függvényeket szürjekcióknak, a bijektív függvényeket bijekcióknak nevezzük.[1]

Legyen $F : E \longrightarrow F$ olyan, függvény, amelynél E és F a valós számok egy-egy részhalmaza, a hozzárendelési szabály pedig ez: $x \mapsto x^2$. Ha most $E = F = [-1, 1]$, akkor f nem injektív és nem szürjektív: (például) $f(-1) = f(1)$ miatt nem injektív, és – mivel egy valós szám négyzete nem lehet negatív – nem is szürjektív. Ha $E = [0, 1]$ és $F = [-1, 1]$, akkor f injektív, de nem szürjektív, ha $E = [-1, 1]$ és $F = [0, 1]$, akkor f szürjektív, de nem injektív, végül ha $E = F = [0, 1]$, akkor f injektív és szürjektív (tehát bijektív). A tanulság: az, hogy egy $f : E \longrightarrow F$ függvény injektív, illetve szürjektív-e vagy sem, nem csupán a „hozzárendelési szabálytól", de az E és F halmazoktól is függ.

Az injekciók és a bijekciók további jellemzéséhez két újabb fogalomra lesz szükségünk. Legyen $f : E \longrightarrow F$ egy függvény, A és B pedig rendre E, illetve F egy-egy részhalmaza. Az A halmaz f *szerinti képének* nevezzük – és $f(A)$-val jelölhük – F-nek azt a részhalmazát, amelyet az A elemeinek f általi képei

[1] A szürjekciókat szokás ráképezésnek, az injekciókat egy-egy értelmű, a bijekciókat pedig kölcsönösen egyértelmű „megfeleltetéseknek" is nevezni. Mi maradunk a magyarosan hangzó latinos fordulatoknál.

alkotnak[1] A B halmaz f *szerinti inverz képének* nevezzük – és $\overset{-1}{f}(B)$-vel jelöljük – azt a halmazt, amely azokból az E-beli elemekből áll, amelyekhez az f függvény B-beli elemet rendel.[2]

Ha $f : E \longrightarrow F$ függvény, akkor az $f(E)$ halmazt a f *értékkészletének* nevezzük. Az $f : E \longrightarrow F$ függvény pontosan akkor szürjektív, ha $f(E) = F$.

Az $f : E \longrightarrow F$ függvény injektív, szürjektív vagy bijektív voltának eldöntéséhez elegendő az F halmaz egyelemű részhalmazainak inverz képeit megvizsgálni. Az f függvény ugyanis

– pontosan akkor szürjektív, ha az $\overset{-1}{f}(\{y\})$ halmaz minden $y \in F$ esetén legalább egyelemű,

– pontosan akkor injektív, ha az $\overset{-1}{f}(\{y\})$ halmaz minden $y \in F$ esetén legfeljebb egyelemű, és

– pontosan akkor bijektív, ha $\overset{-1}{f}(\{y\})$ halmaz minden $y \in F$ esetén pontosan egyelemű.

Jegyezzük meg: ha $f : E \longrightarrow F$ injektív függvény és $x \in E$, akkor amennyiben $y \in \overset{-1}{f}(\{fx\})$, úgy $y = fx$.

1.6.1. Mutassuk meg, hogy ha az $f : E \longrightarrow F$ függvény injektív, akkor minden $A \subseteq E$ esetén $\overset{-1}{f}(f(A)) = A$, és ha szürjektív, akkor minden $B \subseteq F$ esetén $f(\overset{-1}{f}(B)) = B$. [*Tetszőleges* $f : E \longrightarrow F$ függgvény, valamint $A \subseteq E$ és $B \subseteq F$ esetén fennáll, hogy $\overset{-1}{f}(f(A)) \subseteq A$ és $f(\overset{-1}{f}(B)) \subseteq B$.]

Az injekció és a bijekció fogalmának jelentőségét lehetetlen eltúlozni. Illusztrációképpen most megmutatjuk, miként jelenik meg a két egzotikus hangzású tulajdonság a filozófia egyik ősi problémájának megoldásában.

A végtelen

Mikor nevezünk egy összességet (mondjuk egy halmazt) végtelennek? Akkor, ha nem véges. És mikor nevezünk egy halmazt végesnek? A végesség – és így a végtelenség – fogalmának egy lehetséges megragadásához kínál fogódzót a következő megfigyelés. *Ha egy* H *halmaz véges, akkor tetszőleges* $f : H \longrightarrow H$ *függvényre teljesül, hogy* f *pontosan akkor injektív, ha szürjektív.* Gondoljuk csak meg: ha azt szeretnénk, hogy H minden eleme megjelenjen a függvényértékek között, akkor nem engedhetjük meg azt a pazarlást, hogy két H-beli elemhez ugyanazt a függvényértéket rendeljük, és

[1] Vagyis $f(A) = \{y \in F : (\exists x \in A) f(x) = y\}$ – „azoknak az F-beli y-oknak a halmaza, amelyekhez létezik olyan E-beli x, amellyel $y = fx$. A $\exists$ a „van olyan" („létezik") rövidítése; használni fogjuk a $\forall$ – „minden" – logikai konstanst is.

[2] Tehát a $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in A : (\exists y \in B) fx = y\}$ halmazt.

megfordítva: ha különböző H-beli elemekhez különböző függvényértékeket rendelünk, akkor a függvényértékek közül H egyetlen eleme sem hiányozhat.

Ebből a megfontolásból nyerhetjük a következő meghatározást: *Egy* E *halmaz végtelen, ha van olyan* $h : E \twoheadrightarrow E$ *függvény, amely injektív, de nem szürjektív,* vagy *van olyan* $h' : E \twoheadrightarrow E$ *függvény, amely szürjektív, de nem injektív.*

1.6.2. Az iménti meghatározás Dedekindtől származik. Néha így szerepel: az E halmaz végtelen, ha van vele egyenlő számosságú valódi részhalmaza, azaz létezik egy $E' \subsetneqq E$ halmaz és egy $E' \twoheadrightarrow E$ bijekció. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben létezik $E \longrightarrow E$ szürjektív, de nem injektív, illetve injektív, de nem szürjektív függvény is. Igaz-e megfordítva?

1.6.3. A végtelen halmaz létezését a modern halmazelmélet egy axiómában posztulálja. Dedekind a *Was sind und was sollen die Zahlen?* című gyönyörű könyvecskéjében be is bizonyította. A bizonyítás végtelenül konstruktív. Legyen G a gondolatvilágom (elemeinek halmaza); adjuk meg a $\sigma : G \twoheadrightarrow G$ leképezést így:

$$h \mapsto \text{'az a gondolat, miszerint } h \text{ a } G \text{ eleme'}.$$

Ez a függvény nyilván injektív és nyilván nem szürjektív – elvégre például 'mein eigenes Ich' („én") $\notin \sigma(G)$. Mi a véleményünk?

1.7. Inverzek

Itt az ideje, hogy visszakanyarodjunk a fejezet elején meghirdetett programhoz: adjuk meg a halmazelmélet alapvető fogalmainak „nyilas" jellemzéseit, azaz olyan, a klasszikus definíciókkal ekvivalens meghatározásokat, amelyek csak függvényekre hivatkoznak. Az identikus függvények, az üres halmaz és az egyeleműség jellemzése már a tarsolyunkban van, most következzen, aminek következnie kell: az injekciók és a szürjekciók függvényes karakterizálása.

A következő eredmény megérdemli a megtisztelő TÉTEL elnevezést.

1.7.1. Tétel. *Legyen* $f : E \twoheadrightarrow F$ *függvény. Ha létezik olyan* $g : F \longrightarrow E$ *függvény, amellyel* $g \circ f = 1_E$*, akkor* f *injektív; megfordítva: ha* f *injektív és* $E \neq \varnothing$*, akkor létezik olyan* $g : F \longrightarrow E$ *függvény, amellyel* $g \circ f = 1_E$.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy létezik olyan $g : F \longrightarrow E$ függvény, amellyel $g \circ f = 1_E$, azt kell belátnunk, hogy f injektív: tetszőleges $x, y \in E$ esetén abból, hogy $fx = fy$, következik, hogy $x = y$. Nincs nehéz dolgunk: ha $fx = fy$, akkor $g(fx) = g(fy)$ is fennáll, mivel azonban $g(fx) = g \circ f(x) = 1_E(x) = x$, és $g(fy) = g \circ f(y) = 1_E(y) = y$, azért $x = y$ is teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f injektív, és hogy $E \neq \varnothing$; legyen e az E halmaz egy eleme. Az F halmaz minden elemére igaz, hogy vagy eleme f (nemüres!) értékkészletének, vagy nem. Értelmezzünk egy $g : F \longrightarrow E$ függvényt a következőképpen.

Ha $y \in F$ eleme f értékkészletének, akkor legyen gy az az E-beli elem, amelyhez f az y-t rendeli (ilyen f injektivitása miatt pontosan egy van); ha pedig $y \in F$ nem eleme f értékkészletének, akkor legyen $gy = e$. Azaz:

$$gy = \begin{cases} \overset{-1}{f}(\{y\}) \text{ egyetlen eleme, ha } \overset{-1}{f}(\{y\})) \neq \varnothing; \\ e, \text{ ha } \overset{-1}{f}(\{y\})) = \varnothing \end{cases}$$

Tetszőleges $x \in E$ esetén $g \circ f(x) = g(fx) \in \overset{-1}{f}(\{fx\})$, amiből (mivel f injektív) $g \circ f(x) = x$ következik, tehát valóban: $g \circ f = 1_E$. [Az E halmaz e elemére csak azért volt szükségünk, hogy g függvény lehessen – azaz F *minden* eleméhez hozzá tudjon rendelni egy E-beli elemet.] ♡

A szép eredmények nem járnak egyedül.

1.7.2. Tétel. *Legyen* $f : E \longrightarrow F$ *függvény. Ha létezik olyan* $g : F \longrightarrow E$ *függvény, amellyel* $f \circ g = 1_F$*, akkor* f *szürjektív; megfordítva: ha* f *szürjektív, akkor létezik olyan* $g : F \longrightarrow E$ *függvény, amellyel* $f \circ g = 1_F$.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy $f \circ g = 1_F$, azt kell bebizonyítanunk, hogy f szürjektív, azaz $f(E) = F$. Világos, hogy $1_F(F) = F$, így fennáll $F = f \circ g(F) = f(g(F))$ is. Mivel $g(F) \subseteq E$, azért $f(g(F)) \subseteq f(E)$. [Ez általánosan is igaz: ha $f : E \longrightarrow F$ függvény és $A \subseteq B \subseteq E$, akkor $f(A) \subseteq f(B)$. Lássuk be!] Eszerint tehát $F \subseteq f(E)$. Emellett nyilván fennáll – definíció szerint – $f(E) \subseteq F$ is, $f(E)$ és F tehát kölcsönösen részhalmazai egymásnak, ennélfogva egyenlőek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f szürjektív. Ekkor az $\overset{-1}{f}(\{y\})$ halmaz egyetlen $y \in F$ esetén sem üres, mindegyikből kiválaszthatunk tehát egy elemet. Jelölje az $\overset{-1}{f}(\{y\})$-ból kiválasztott elemet y'; legyen végül $g : F \longrightarrow E$ az a függvény, amelynek hozzárendelési szabálya $y \mapsto y'$. Mivel bármely $x \in \overset{-1}{f}(\{y\})$ esetén $fx = y$, így tetszőleges $y \in F$ esetén $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(y') = y$, azaz valóban: $f \circ g = 1_F$. ♡

Vegyük észre, hogy az iménti bizonyításban a g függvény megadásakor nem mondtuk meg, hogy az F egyes elemeihez konkrétan melyik E-beli elemet rendeljük hozzá. „Csupán" azt használtuk ki, hogy ha adott egy halmaz, amelynek elemei – esetünkben az $\overset{-1}{f}(\{y\})$ halmazok – közül egyik sem üres, akkor értelmezhetünk egy függvényt, amely a szóban forgó halmazok mindegyikéhez azok egy elemét rendeli. Az idézőjel indokolt: feltevésünk ekvivalens a halmazelméet egyik súlyos „alapigazságával", a kiválasztási axiómával. A kiválasztási axióma néhány alakjával az 1.7. alfejezetben ismerkedünk meg. Az axióma egyik általános megfogalmazása így szól: *ha az* E *halmaz elemei nemüres halmazok, akkor létezik olyan* $f : E \longrightarrow \cup E$ *függvény, amelyre teljesül, hogy minden* $x \in E$ *esetén* $fx \in x$. (Az axióma nem „konstruktív": a szóban forgó függvény „hozzárendelési szabályát" nem adja meg, csupán a függvény létezését posztulálja.)

Legyen $f : E \longrightarrow F$ injektív (szürjektív) függvény; minden olyan $g : F \longrightarrow E$ függvényt, amelyre teljesül, hogy $g \circ f = 1_E$ ($f \circ g = 1_F$), az f függvény *balinverzének* (*jobbinverzének*) nevezünk. A „minden olyan” kitétel indokolt: egy injektív függvénynek több balinverze, egy szürjektív függvénynek pedig több jobbinverze is létezhet. Ez a tételek bizonyítása alapján is nyilvánvaló, elegendő rámutatni az E halmaz egy e elemének kijelölésében, illetve a kiválasztási axióma alkalmazásában megnyilvánuló önkényességre.

Visszatérve a kiválasztási axiómához: belátjuk, hogy az axióma ekvivalens azzal az állítással, amely szerint *minden szürjekciónak létezik jobbinverze.* Az, hogy az előbbiből következik az utóbbi, már láttuk (a tétel bizonyításában). Lássuk tehát, miként vezethető le a kiválasztási axióma abból, hogy minden szürjekciónak létezik jobbinverze. Legyen E olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $x \neq \varnothing$. Legyen E' az $\{\langle y, x\rangle : y \in x \in E\}$ halmaz; tekintsük azt az $f : E' \longrightarrow E$ függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya: $\langle y, x\rangle \mapsto x$, azaz amely E' minden eleméhez annak második tagját rendeli. Abból, hogy E egyetlen eleme sem üres, következik, hogy f szürjektív. Legyen f egy jobbinverze az $f' : E \longrightarrow E'$ függvény. Legyen továbbá g az az $E' \longrightarrow \cup E$, amely E' minden eleméhez annak második tagját rendeli; legyen végül $g' = g \circ f'$. Ekkor $g'(x) \in x$ minden $x \in E$ esetén, „definiáltunk” tehát egy függvényt, amely eleget a kiválsztási axióma követelményének.

1.7.1. Magyarázzuk meg, miért jogos az idézőjel! Egészítsük ki a bizonyítást, és mutassunk rá, miért volt szükség az E' halmaz értelmezésére!

Ezzel tehát megkaptuk az injektivitás és a szürjektivitás egy „függvényes jellemzését”: az injektív függvények pontosan azok, amelyeknek létezik balinverze, a szürjektív függvények pontosan azok, amelyeknek létezik jobbinverze. A bijektív függvények pedig pontosan azok, amelyeknek létezik „kétoldali” inverze:

1.7.3 Következmény. *Az* $f : E \longrightarrow F$ *függvény pontosan akkor bijektív, ha van olyan* $g : F \longrightarrow E$ *függvény, amellyel* $g \circ f = 1_F$ *és* $f \circ g = 1_E$, *azaz ha a*

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_E"'] & F \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "1_F"] & \\
& E \arrow[r, "f"'] & F
\end{tikzcd}
$$

diagram kommutatív.

Bizonyítás: Ha f-nek van jobb-, illetve balinverze, akkor az előbbi két tétel értelmében injektív és szürjektív, azaz bijektív.

Megfordítva: ha a f bijektív, akkor az előbbi két tétel szerint jobbinverze és balinverze is van: az előbbi legyen g, az utóbbi legyen g'; fennáll tehát $f \circ g' = 1_F$ és $g \circ f = 1_E$. Ekkor az identitások hatástalansága és a kompozíció asszociativitása miatt:

$$g = g \circ 1_F = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = 1_E \circ g' = g'$$

Ha tehát f bijektív, akkor bal- és jobbinverze megegyezik – van tehát egyetlen, „kétoldali" inverze. ♡

Az Olvasóban persze felmerülhet: vajon nem ágyúval lövünk verébre, amikor a (kétoldali) inverz létezését két tételünk alapján igazoljuk. Elvégre ha $f : E \longrightarrow F$ bijektív, akkor a $\overset{-1}{f}(\{y\})$ halmaznak minden $y \in F$ esetén pontosan egy eleme van, egyértelműen megadható ennélfogva az a $g : F \longrightarrow E$ függvény, amely F minden y eleméhez a $\overset{-1}{f}(\{y\})$ halmaz egyetlen elemét rendeli. Ez a függvény – könnyen belátható – f-nek jobb- és baloldali inverze.

Erre azt válaszoljuk: nem mindig a legrövidebb bizonyítás mondja a legtöbbet egy eredményről. [Egy erdő, ha kerülünk benne egyet, meglehet, szebb arcát mutatja, mintha „toronyiránt" átvágtatunk rajta...]

Ha f bijektív, akkor az előzőek értelmében létező „kétoldali" inverzét (egyszerűen) f inverzének nevezzük, jelölése f^{-1}.

A két tétel egyetlen eredménybe is összegyúrható:

1.7.4. Tétel. *Ha $E \neq \varnothing$, akkor tetszőleges $f : E \longrightarrow F$ függvény esetén létezik olyan $g : F \longrightarrow E$ függvény, amellyel $f \circ g \circ f = f$.*

Bizonyítás: Legyen $e \in E$; adjunk meg egy $g : F \longrightarrow E$ függvényt a következőképpen:

$$y \mapsto \begin{cases} e, \text{ ha } y \notin f(E) \\ \overset{-1}{f}(\{y\}) \text{ egy eleme, ha } y \in f(E) \end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy minden ilyen g megfelel. ♡

1.7.2. Lássuk be könnyen!

Világos, hogy a kiválasztási axióma az utóbbi tételben is megteszi a magáét, nem véletlen, hogy az állítást alkalmanként szintén kiválasztási axiómaként – a benne szereplő g függvényt pedig f „kváziinverzeként" emlegetik. A *minden szürjekciónak létezik jobbinverze* megfogalmazással szemben azonban az állítás nem „tisztán függvényes", elvégre szerepel benne az $E \neq \varnothing$ kitétel. Ez a „probléma" persze könnyen orvosolható. Annyit kell csak észrevennünk, hogy ha T egyelemű halmaz, akkor tetszőleges E halmaz esetén E nemüressége ekvivalens azzal, hogy létezik $T \longrightarrow E$ függvény. Márpedig azt, hogy T egyelemű, már réges rég ki tudjuk fejezni a függvények nyelvén: bármely H halmaz esetén pontosan egy $H \longrightarrow T$ függvény létezik.

Inverzek és kompozíciók

Az injektivitás, a szürjektivitás, a féloldali inverzek és a kompozíció kapcsolatát tisztázza a következő,

1.7.5. Tétel. *Legyen* $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ *függvény; legyen továbbá* $h = g \circ f$. *Ekkor*

1. *ha* f *és* g *egyaránt injektív, akkor* h *is az; ha* f' *és* g' *rendre* f *és* g *balinverze, akkor* $f' \circ g'$ *a* h *balinverze;*
2. *ha* f *és* g *egyaránt szürjektív, akkor* h *is az; ha* f' *és* g' *rendre* f *és* g *jobbinverze, akkor* $f' \circ g'$ *a* h *jobbinverze;*
3. *ha* h *injektív, akkor* f *is az; ha* h' *a* h *balinverze, akkor* $h' \circ g$ *az* f *balinverze;*
4. *ha* h *szürjektív, akkor* g *is az; ha* h' *a* h *jobbinverze, akkor* $f \circ h'$ *az* g *jobbinverze;*
5. *ha* h *szürjektív,* g *pedig injektív, akkor* f *szürjektív; ha* h' *a* h *jobbinverze, akkor* $h' \circ g$ *az* f *jobbinverze;*
6. *ha* h *injektív,* f *pedig szürjektív, akkor* g *injektív; ha* h' *a* h *balinverze, akkor* $f \circ h'$ *az* f *balinverze.*

BIZONYÍTÁS: Az igazságos munkamegosztás jegyében három esetet bizonyítunk, hármat pedig az Olvasóra bízunk.

1. A feltétel szerint $f' \circ f = 1_A$ és $g' \circ g = 1_B$. A kompozíció asszociativitását és az identitások „hatástalansága" alapján
$$(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ 1_B \circ f = f' \circ f = 1_A,$$
h-nak tehát van balinverze, így valóban injekció.
4. Ha h szürjektív, akkor van h' jobbinverze, amellyel $h \circ h' = 1_B$. Ekkor azonban $1_B = h \circ h' = (g \circ f) \circ h' = g \circ (f \circ h') = 1_B$ is teljesül, g-nek is van tehát jobbinverze (és $f \circ h'$ valóban megfelel egynek), kötelessége tehát szürjektívnek lenni.
5. Feltevésünk szerint $h \circ h' = 1_C$, az előző pont szerint g szürjektív, a feltevés alapján tehát egyúttal bijektív is. Ekkor:
$$\begin{aligned} f \circ (h' \circ g) &= 1_B \circ f \circ (h' \circ g) = (g^{-1} \circ g) \circ f \circ (h' \circ g) = \\ &= g^{-1} \circ (g \circ f) \circ (h' \circ g) = g^{-1} \circ h \circ (h' \circ g) = \\ &= g^{-1} \circ (h \circ h') \circ g = g^{-1} \circ 1_C \circ g = g^{-1} \circ g = 1_B \end{aligned}$$
A $h' \circ g$ tehát valóban f jobbinverze, világos, hogy f szürjektív.

♡

1.7.3. Egészítsük ki a bizonyítást!

Aki még jobban el szeretne merülni a kompozíciókkal és inverzekkel való számolásban, íme két szép feladat (Bourbaki klasszikus könyvéből).

1.7.4. Legyenek A, B, C és D halmazok, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ és $h : C \longrightarrow D$ függvények. Bizonyítsuk be, hogy ha $g \circ f$ és $h \circ g$ egyaránt bijekciók, akkor f, g és h mindegyike az.

1.7.5. Legyenek A, B és C halmazok, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ és $h : C \longrightarrow A$ függvények. Igazoljuk, hogy ha a $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ függvények közül kettő injektív, egy pedig szürjektív, vagy kettő szürjektív, egy pedig injektív, akkor f, g és h mindegyike bijektív.

1.8. Tovább is van...

Ahogy általában lenni szokott. Ebben az alfejezetben az injektivitás és a szürjektivitás újabb ekvivalens jellemzését adjuk meg – és újfent kizárólag függvényekre hivatkozunk.

1.8.1. Tétel. *Az $f : A \longrightarrow B$ függvény pontosan akkor injektív, ha tetszőleges $g, h : C \longrightarrow A$ függvények esetén, amennyiben $f \circ g = f \circ h$, úgy $g = h$.*

Bizonyítás: Ha a feltétel teljesül, akkor f injektív. Ehhez elég, ha észrevesszük: tetszőleges $f(x)$ és $f(y)$ függvényérték megfeleltethető egy $f \circ \widehat{x}$, illetve $f \circ \widehat{y}$ kompozíciónak, ahol $\widehat{x} : T \longrightarrow A$ és $\widehat{y} : T \longrightarrow B$ valamely T egyelemű halmaz esetén. Így ha $fx = fy$, akkor $f \circ \widehat{x} = f \circ \widehat{y}$, amiből a feltevés szerint $\widehat{x} = \widehat{y}$, így nyilván $x = y$.

Ha f injektív és $A \neq \varnothing$, akkor f-nek van $f' : B \longrightarrow A$ balinverze, amellyel $f' \circ f = 1_A$. Így ha a $g, h : C \longrightarrow A$ függvényekre $f \circ g = f \circ h$, akkor

$$g = 1_A \circ g = (f' \circ f) \circ g = f' \circ (f \circ g) = f' \circ (f \circ h) = (f' \circ f) \circ h = 1_A \circ h = h.$$

Ha pedig $A = \varnothing$, akkor C is csak az üres halmaz lehet, minek következtében g és h automatikusan egyenlők. ♡

1.8.2. Tétel. *Az $f : A \longrightarrow B$ függvény pontosan akkor szürjektív, ha tetszőleges $g, h : B \longrightarrow C$ függvényekre esetén amennyiben $g \circ f = h \circ f$, úgy $g = h$.*

Bizonyítás: Ha f szürjektív, akkor van g' jobbinverze, így ha $g \circ f = h \circ f$, akkor

$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ f') = (g \circ f) \circ f' = (h \circ f) \circ f' = h \circ (f \circ f') = h \circ 1_B = h.$$

Ha f nem szürjektív, akkor van olyan $b \in B$, amely nem eleme f értékkészletének. Így ha g és h olyan $B \longrightarrow C$ fügvények, amelyekre $g(b) \neq h(b)$, akkor $g \neq h$, holott $g \circ f = h \circ f$, nem teljesül tehát a tételbeli feltétel sem. ♡

A tételek a szürjekciókat és az injekciókat a kompozícióval való kapcsolatuk alapján jellemzi: az injekciók azok a függvények, amelyekkel balról, a szürjekciók pedig azok, amelyekkel jobbról egyszerűsíthetők a „kompozíciós egyenletek".

1.9. A halmazelmélet axiómái

Miután láttunk néhány „függvényes ceruzarajzot" a halmazuniverzumról, lássuk legalább elemeiben az $\in$-reláción alapuló monumentális freskót.

A halmazelmélet szerepe a matematikában (legalább) hármas szerep. Egyrészt a matematika egyik „hivatalos" *nyelve,* amelyen a definiciók kimondhatók, a bizonyítások pedig kifejthetők. Másrészt kiváló *keretelméletként* szolgál: a tételek valójában a halmazelméleti axiómák és a definíciók logikai következményei. Harmadrészt a halmazok elmélete „saját jogán" is matematikai diszciplína: mindenekelőtt a különböző rendű és rangú végtelenek elmélete.

Egyfajta halmazelmélet – mint azt később látni fogjuk – a kategóriaelmélet keretei között is rekonstruálható. A kategóriaelméetben a halmazelmélet szerepe ugyanakkkor valamelyest ambivalens. A kategóriaelméleti keretek között – mint azt látni fogjuk, sőt, valójában már láttuk is (!) – minden további nélkül reprodukálható egy(fajta) halmazelmélet, amely az ebben az alfejezetben tárgyalt Zermelo–Fränkel-féle teóriához hasonlóan sok tekintetben eljátszhatja az „alap" szerepét. Másrészt viszont számos kategóriaelméleti fogalom a halmazelmélet arzenálját is mozgosítja. Ez utóbbiak esetében a kategóriaelméleszek két csoportja különíthető el. Akikben igen erős a meggyőződés, hogy a kategóriaelmélet a matematikának a „klasszikus" halmazelméletnél adekvátabb megalapozását adja, azok ezekben az esetekben is ragaszkodnak a kategóriaelméleti megközelítéshez. Akiket viszont a megalapozás igénye nem ejt végeletesen rabul, azok kevésbé riadnak vissza a halmazelméleti fegyvertár mozgósításától. [Legtöbbször persze csak arról van szó, hogy két ekvivalens meghatározás közül melyik a definíció, és melyik egy tétel...]

E könyv szerzője a kategórielméletet nem tekinti a matematika „végleges magalapozásának", mi több, a „végső megalapozás" igényét sem tartja megalapozottnak. Az elmélet igazi értéke szerinte inkább az általánosságában keresendő: a kategóriaelméleti keretek között olyan absztrakt struktúrák mutathatók fel, amelyek az általánosság korábban nem látott szintjét jelentik – méghozzá úgy, hogy közben nem válnak „üressé”: absztrakt ugyan, de nem nonszensz... hogy a könyv címében feltett kérdésre válaszoljunk. Speciális esetként természetesen a jól ismert halmazelméleti konstrukciók is rendre megjelennek, ami eggyel több ok amellett, hogy klasszikus elmélettel is megismerkedjünk.

ZFC

A halmazelmélet manapság leggyakrabban használt, Zermelo–Fränkel-féle axiómarendszere úgy is felfogható, mint egyfajta implicit definíció, az $\in$ reláció legalapvetőbb jellemzőinek rögzítése.

Az axiómák másrészt a *„méret korlátozásának”* elvét is kifejezik: a halmazelméleti paradoxonok (például a Russell-paradoxon[1]) gyökere ugyanis az, hogy bizonyos „túlságosan nagy” összességeket is halmaznak tekintünk, megpróbáljuk biztosítani, hogy az elméletben „túlságosan nagy” halmazok létezése ne legyen bizonyítható. A „túlságosan nagy” összességek nem individualizálhatók, azaz nem lehetnek halmazok, azaz: nem lehetnek más összesség elemei.

A halmazok elmélete tehát arról szól, hogy mely „objektumok” léteznek – azaz melyeknek a „létezése” igazolható az axiómák alapján.

A logikában valamelyest jártas Olvasó kedvéért jegyezzük meg: a halmazelmélet most bemutatandó axiómarendszerének egyetlen nemlogikai konstansa van, a kétargumentumú $\in$ reláció. A logikai „keretelmélet” a klasszikus elsőrendű logika, amelyben $=$ is szerepel. Névkonstansok sincsenek, $\varnothing$ vagy $\mathbb{N}$ „metanyelvi” rövidítéseknek tekintendők.

Az elmélet neve – ZFC – Ernst Zermelo és Abraham Fränkel nevéből, valamint a kiválasztási axióma angol (vagy francia?) nevéből (axiom of *c*hoice, axiome de *c*hoix)) ered.

A meghatározottsági axióma

Bármit „jelentsen” is $\in$,

$$\forall x \forall y (x = y \Rightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

és

$$\forall x \forall y (x = y \Rightarrow \forall z (x \in z \Leftrightarrow y \in z))$$

[1] A Russell-paradoxon a naiv – azaz nem axiomatikus – halmazelmélet egyik alapvető feltevéséből ered, amely szerint tetszőleges Fx tulajdonság elején létezik az a halmaz, amelynek elemei poontosan az F tulajdonságú halmazok. Ha most F a „nem eleme önmagának”, akkor léteznie kell az $R = \{x : x \notin x\}$ halmaznak. Viszont ekkor – mint az könnyen belátható – $R \in R$ pontosan akkor áll, ha $R \notin R$, ami ellentmondás. Megjegyezzük, hogy a paradoxont Russelltől függetlenül Ernst Zermelo is felismerte.

egyaránt „logikai" igazságok: két egyenlő halmaz elemei ugyanazok, és a két halmaz ugyanazoknak a halmazoknak eleme.[1] A *meghatározottsági* (*extenzionalitási*) *axióma,* amely szerint *minden halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei:*

$$\forall x \forall y \forall z((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$$

Az ugyanazon elemekkel rendelkező halmazoknak tehát „minden kontextusban" ugyanúgy kell viselkedniük. Ha bevezetjük az

$$x \subseteq y \Leftrightarrow_{\text{def}} \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$$

rövidítést (az x halmaz az y halmaz részhalmaza, ha x minden eleme y-nak is eleme), akkor az axiómát így is írhatjuk:

$$\forall x \forall y((x \subseteq y \;\&\; y \subseteq x) \Rightarrow x = y)$$

Az üres halmaz axiómája

Az *üreshalmaz-axióma* szerint *„létezik" üres halmaz, vagyis olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs:*

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

Az axióma szerint legalább egy üres halmaz biztosan létezik; több viszont – a meghatározottsági axióma következtében – nem létezhet (ha lenne kettő, akkor az egyiknek lenne olyan eleme, amilyen a másiknak nincs). Bevezethetjük tehát *az* üres halmazra a $\varnothing$ jelölést. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza: $\forall x(\varnothing \subseteq x)$.

A páraxióma

Egy halmazunk tehát már van, mi azonban többet szeretnénk... A *páraxióma* szerint *tetszőleges két halmaz esetén létezik olyan halmaz, amelynek pontosan a szóban forgó halmazok az elemei:*

$$\forall x \forall y \exists z \forall w(w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$$

[1] Az egyértelműség érdekében az axióámákat a logika formális nyelvén is felírjuk. Ha az Olvasónak a kiovasás gondot jelent, ugorja át nyugodtan a formulákat. A $\exists$ és $\forall$ kvantorokat az Olvasó már ismeri; ehelyütt jegyezzük meg: a „szándékolt" tárgyalási univerzum az összes halmaz „összessége", azaz minden objektum: halmaz. Ezeken túl a következő rövidítéseket használjuk: (i) alternáció: $\ldots \vee \ldots$ – kiolvasása: ..., vagy... (ii) konjunkció: $\ldots \& \ldots$ – kiolvasása: ..., és... (iii) kondicionális $\ldots \Rightarrow \ldots$ – kiolvasása: ha..., akkor... A propozicionális logikai konstansok „precízebb" értelmezésére a 2.10. alfejezetben visszatérünk. (A formalizálás célja elsődlegesen a kétértelműség kiküszöbölése: szeretnénk, ha az Olvasó és a szerző egyre gondolnának. A kétértelműség a logikus számára éppolyan ellenszenves, mint egy vámpír a sekrestyében...)

Ilyen halmazból sem lehet kettő (a meghatárorozottsági axióma miatt), így bevezethetjük az $\{x, y\}$ jelölést. A két halmaznak nem kell feltétlenül különböznie; az $\{x, x\} = \{x\}$ halmazt x *szingletonjának* nevezzük.

Most már végelen sok halmazunk van; igaz persze, hogy egyiknek sincs kettőnél több eleme... Halmazok például (vagyis bizonyítható, hogy léteznek) a következők: $\varnothing$, $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$...

Hatványhalmaz-axióma

A *hatványhalmaz-axióma* szerint *tetszőleges halmaz esetén létezik az a halmaz, amelynek elemei pontosan az illető halmaz részhalmazai:*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$$

Ilyen halmazból sem létezhet több [lássuk be!]; x hatványhalmazát $\wp x$ jelöli.

Az unióhalmaz-axióma

Az *unióhalmaz-axióma* szerint *egy halmaz elemeinek elemei is halmazt alkotnak:*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \exists w (w \in x \,\&\, z \in w))$$

Ilyen halmazból is pontosan egy van; x unióhalmazát $\cup x$ jelöli.

1.9.1. Minden x-re teljesül, hogy $\cup(\wp x) = x$, de $\wp(\cup x) = x$ általában nem igaz. Illusztráljuk egy példával!

Az x és y halmazok uniója már definiálható:

$$x \cup y =_{\text{def}} \cup\{x, y\}.$$

A metszet és a különbség definíciójához azonban szükségünk lesz még egy axiómára.

A részhalmaz-axióma

A *részhalmaz-axióma* szerint *minden halmaz és* $F(x)$ *„tulajdonság" esetén létezik a halmaz adott tulajdonságú elemeinek halmaza:*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \,\&\, Fz))$$

Ez valójában *axiómaséma:* annyi „példánya" van, ahány legfeljebb egy szabad változót tartalmazó F formula (annak, akit illet: megszámlálhatóan végtelen). Bármely F és x esetén az axióma által „létesített" halmaz egyértelmű, jelölése a szokásos: $\{z \in x : Fz\}$.

Ezen a ponton bebizonyíthatjuk, hogy *az összes halmaz „összessége" nem halmaz: tetszőleges* x *halmaz esetén az* $\{y \in x : y \notin y\}$ *halmaz nem eleme* x*-nek.*

1.9.2. Bizonyítsuk be!

Ugyanezt mutatja a következő gondolatmenet is: ha az összes halmaz „összessége" is halmaz, akkor a részhalmaz-axióma miatt az $r = \{x : x \notin x\}$ Russell-„összesség" is az, amiből – újfent a Russell-paradoxon gondolatmenete szerint – ellentmondásra jutnánk.

A *metszet és különbség* definíciója már nem jelent problémát:

$$x \cap y =_{\mathrm{def}} \{z \in x \cup y : z \in x \;\&\; z \in y\}$$
$$x \setminus y =_{\mathrm{def}} \{z \in x \cup y : z \in x \;\&\; z \notin y\}$$

A metszet – az unióhoz hasonlóan – általánosan is definiálható. Egy x halmaz $\cap x$ metszethalmazának elemei pontosan azok a halmazok, amelyek x minden elemének elemei, azaz $y \in \cap x$ pontosan akkor, ha minden $z \in x$ esetén $z \in y$.

A részhalmaz-axióma alapján a *Descartes-szorzat* létezése is igazolható. Az $\langle x, y\rangle$ rendezett pár – mint emlékszünk – „hivatalosan" az $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ halmaz. Az u és v halmazok $u \times v$ Descartes-szorzata azoknak a rendezett pároknak a halmaza, amelyek első tagja u, a második pedig v eleme. Azaz:

$$u \times v =_{\mathrm{def}} \{z \in \wp\wp(u \cup v) : \exists w \exists w' (z = \langle w, w'\rangle \;\&\; w \in u \;\&\; w' \in v)\}$$

Ha van Descartes-szorzat, akkor – már tudjuk – vannak relációk, függvények, műveletek is.

A részhalmaz-axiómából – ha van legalább egy halmazunk – az üres halmaz létezése is következik: ha x halmaz, akkor $\{y \in x : y \neq y\}$ is az.

A helyettesítés axiómája

A részhalmaz-axióma speciális esete a *helyettesítés axiómájának*, amely szerint *ha* $F(x, y)$ *olyan formula, amelyre teljesül, hogy tetszőleges* x *esetén* $F(x, y)$ *pontosan egy* y *esetén áll fenn, akkor tetszőleges halmaz esetén létezik az a halmaz, amelynek elemei az* $F(x, y)$ *formula által az illető halmaz elemeihez rendelt halmazok:*

$$\forall x \exists! y F(x, y) \Rightarrow \forall z \exists w \forall u (u \in w \Leftrightarrow \exists t (t \in z \;\&\; F(t, u)))$$

1.9.3. Igazoljuk, hogy a részhalmaz-axióma valóban a helyettesítés axiómájának speciális esete! [Útmutatás: tekintsük egy $F(x)$ „tulajdonság" esetén alkalmazzuk a helyettesítés axiómáját az $F(x)$ és $x = y$ formulával!]

„Véges rendszámok"

Miután ideig eljutottunk, a *Neumann-féle véges rendszámok* mindegyikének a létezését igazolni tudjuk. A Neumann-féle véges rendszámok a természetes számok halmazelméleti „megfelelői":

$$\begin{aligned} 0 &=_{\text{def}} \varnothing \\ 1 &=_{\text{def}} \{\varnothing\} = \{0\} \\ 2 &=_{\text{def}} \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\ 3 &=_{\text{def}} \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \\ n + 1 &=_{\text{def}} n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots n\} \end{aligned}$$

Minden ν véges Neumann-rendszámra teljesül, hogy tetszőleges x halmaz esetén $x \in \nu \Rightarrow x \subseteq \nu$; a Neumann-féle véges rendszámok halmazát legtöbbször ω jelöli. Egy másik lehetséges természetesszám-modell a Zermelo-féle, amely szerint $0 =_{\text{def}} \varnothing$ és $n + 1 =_{\text{def}} \{n\}$. Ebben a modellben minden nemnulla „természetes szám" egyelemű halmaz, míg a Neumann-féle konstrukcióban az n „számnak" n eleme van. Olyan halmazunk azonban még nincs, amelynek valamennyi véges rendszám – minek következtében végtelen sok – eleme lenne. Ezen a tűrhetetlen körülményen azonnal változtatunk...

A végtelenségi axióma. A természetes számok

Vezessük be az $x^+ =_{\text{def}} x \cup \{x\}$ jelölést; x^+-t x *szukcesszorának* nevezzük. A *végtelenségi axióma* szerint *létezik olyan halmaz, amelynek* $\varnothing$ *eleme, és amelynek minden elemével együtt az illető elem szukcesszora is eleme:*

$$\exists x(\varnothing \in x \,\&\, \forall y(y \in x \Rightarrow y^+ \in x))$$

Minden ilyen halmaz a Dedekind-féle értelemben is végtelen. [A végtelenségi axiómában is van némi önkény, elvégre a szukcesszor szerepét számos más konstrukció is betölthetné, E szukcesszorának megfelelne például az $\{E\}$ halmaz is – a Zermelo-féle konstrukcióban ténylegesen ez a helyzet.]

1.9.4. Írjunk fel egy „alternatív" végtelenségi axiómát!

A természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának létezését a végtelenségi axióma biztosítja. Az $\mathbb{N}$ halmaz értelmezése (azaz létezésének igazolása) a következőképpen megy. A végtelenségi axióma szerint létezik olyan x halmaz, amelyre teljesül, hogy (i) $\varnothing \in x$ és (ii) $\forall z(z \in x \Rightarrow z^+ \in x)$. Legyen I egy ilyen halmaz, ekkor létezik az

$$I^* = \{y \subseteq I : \varnothing \in y \,\&\, \forall z(z \in y \Rightarrow z^+ \in y)\}$$

halmaz is. (Igazoljuk!) Legyen ezek után

$$\mathbb{N} =_{\mathrm{def}} \bigcap I^*$$
$$0 =_{\mathrm{def}} \varnothing$$
$$s =_{\mathrm{def}} \{\langle u, v\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : v = u^+\}$$

Belátható, hogy ezzel egy Dedekind–Peano-struktúrát definiáltunk.

Mit is? Egy $\langle M, o, f\rangle$ hármas *Dedekind–Peano-struktúra,* ha (i) M halmaz és $o \in M$, (ii) $f : M \longrightarrow M$ injektív függvény, (iii) minden $m \in M$ esetén $f(m) \neq o$, és (iv) minden $x \subseteq M$ esetén teljesül, hogy

$$(o \in x \;\&\; (\forall z \in M)(z \in x \Rightarrow f(z) \in x)) \Rightarrow x = M.$$

Az M halmazt a Dedekind–Peano-struktúra alaphalmazának, o-t a struktúra „nulleleméne k", f-et pedig a struktúra „rákövetkezésfüggvényének" nevezhetjük. A (iv) kikötés a teljes indukció „axiómája": ha a struktúra alaphalmaza egy X részhalmazának az o eleme, továbbá X zárt a rákövetkezésre (azaz ha tetszőleges $x \in M$ esetén abból, hogy $x \in X$, következik, hogy $fx \in X$), akkor X egyenlő a struktúra M alaphalmazával.

A végtelenségi axióma legfontosabb következménye tehát: létezik egy „prototípus" Dedekind–Peano-struktúra.

A fundáltság axiómája

A *fundáltság axiómája* (szokás *regularitási axiómának* is mondani) szerint *minden nemüres halmaznak van olyan eleme, amellyel magának a halmaznak nincs közös eleme:*

$$\forall x(x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y(y \in x \;\&\; y \cap x = \varnothing))$$

A fundáltság axiómája szerint egyetlen x halmaz sem lehet eleme önmagának, ekkor ugyanis az $\{x\}$ halmaz „rosszul fundált" lenne.

A kiválasztási axióma

A *kiválasztási axiómának* sok ekvivalens alakja létezik (kettőt más ismerünk is), az egyik leggyakrabban használatos a következő: *ha* x *és* y *halmazok, továbbá* $z \subseteq x \times y$ *olyan reláció, hogy* x *minden eleme megjelenik* z *valamely elemének első tagjaként, akkor van olyan függvény, amely* x *minden eleméhez egy vele* r *relációban álló* y*-beli elemet rendel:*

$$(\forall u \in x)(\exists v \in y)\langle u, v\rangle \in z \Rightarrow (\exists f : x \longrightarrow y)(\forall w \in x)\langle w, f(w)\rangle \in z$$

Azt mondjuk, hogy c a w halmaz *kiválasztási halmaza,* ha (i) $c \subseteq \cup w$ és (ii) minden $x \in w$ esetén $x \cap c$ egyelemű halmaz. A kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy *minden nemüres és páronként diszjunkt halmazokból álló halmaznak létezik kiválasztási halmaza.*

Az eddig tárgyalt axiómák alkotják a ZFC axiómarendszert; a legtöbb matemtikus és logikus ezt tekinti *a* halmazelméletnek.

A kiválasztási axióma „gyengítései"

Az imént tárgyalt axiómánál valamvel gyengébb, mindazonáltal a legtöbb célra megfelel a *„függő kiválasztás" axiómája* is, amely szerint tetszőleges x halmaz és $r \subseteq x \times x$ esetén:

$$(a \in x \;\&\; (\forall z \in x)(\exists w \in x)\langle z, w\rangle \in r) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow x)(f(0) = a \;\&\; (\forall n \in \mathbb{N})\langle f(n), f(n+1)\rangle \in r)$$

Az alkalmazásokban gyakran még ennél is kevesebb, a *„megszámlálható sok kiválasztás" axiómája* is elegendő, amely szerint *minden* x *halmaz és* $z \subseteq \mathbb{N} \times x$ *esetén*

$$(\forall u \in \mathbb{N})(\exists v \in x)\langle u, v\rangle \in z \Rightarrow (\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow x)(\forall w \in \mathbb{N})\langle w, f(w)\rangle \in z$$

1.9.5. Mit „mond" az utóbbi két axióma? Lássuk be, hogy a „megszámlálható sok kiválasztás" axiómája következik az általános axiómából!

A „megszámlálható sok kiválasztás" axiómája alapján a fundáltság axiómájának egy ekvivalens alakját is megadhatjuk. Azt mondjuk, hogy az x „halmaz" *rosszul fundált,* ha van olyan $f : \mathbb{N} \longrightarrow x$ függvény, amelyre $x \ni f(0) \ni f(1) \ni f(2) \ni \ldots$; x *jól fundált,* ha nem rosszul fundált. A fundáltság axiómája ekkor (a „a függő kiválasztás" axiómáját feltéve) ekvivalens azzal, hogy *minden nemüres halmaz jól fundált.* $\Omega = \{\Omega\}$ eszerint nem lehet halmaz. Ha annak tekintenénk, akkor érdekes objektum lenne: egyelemű, és – bizonyos értelemben – mégis végtelen...

1.10. Grothendieck-univerzumok

Ebben a könyvben gyakran lesz szó nem-halmaznyi összességekről. Az efféle „nagy" összességek (egyfajta) értelmezéséhez természetes keretet ad a Grothendieck-univerzum fogalma.

Azt mondjuk, hogy egy U halmaz *Grothendieck-univerzum,* ha teljesülnek rá a következők:

1. ha $x \in U$ és $y \in x$, akkor $y \in U$, azaz U „lefelé zárt”: minden elemének elemeit (és persze azok elemeit is stb.) tartalmazza;
2. ha $x, y \in U$, akkor $\{x, y\} \in U$, $\langle x, y\rangle \in U$ és $x \times y \in U$: U bármely két elemével együtt tartalmazza a belőlük álló kételemű halmazt, a belőlük képzett rendezett párt és a Descartes-féle szorzatukat is;
3. ha $x \in U$, akkor $\wp x \in U$ és $\cup x \in U$: U zárt a hatványhalmaz- és az unióhalmaz-képzésre nézve is;
4. $\omega \in U$: a Neumann-féle véges rendszámok halmaza (azaz a természetes számok egy halmazelméleti modellje) is U elemei között van;
5. ha $f : x \longrightarrow y$ szürjektív függvény, $x \in U$ és $y \subseteq U$, akkor $b \in U$: ha az U egy elemén értelmezett szürjektív függvény minden értéke U-beli, akkor a függvény értékkészlete is az.

Egy U univerzum tehát valóban „univerzum” abban az értelemben, hogy a ZF elmélet egy természetes modelljéül szolgál, azaz U elemei az $U \times U$ halmazra megszorított $\in$-relációval kielégítik a szokásos halmazelméleti axiómákat.

1.10.1. Ellenőrizzük, hogy a (valamelyest) redundáns 1–5. feltételek alapján bizonyítható az üreshalmaz-, a pár-, a hatványhalmaz- és az unióhalmaz-axióma, valamint a végtelenségi axióma! A helyettesítés axiómájának az 5. kikötés feleltethető meg.

Az, hogy *létezik Grothendieck-univerzum,* könnyedén formalizálható a halmazelmélet „hivatalos” nyelvén, mindazonáltal meglehetősen erős feltevés. Hogy mást ne mondjunk, egészen biztosan nem bizonyítható a ZFC elmélet axiómái alapján, elvégre egy ilyen univerzum egyfajta „belső modell” lenne, amelynek létezése azt mutatná: a ZFC elmélet konzisztens. Márpedig Gödel második nemteljességi tétele értelmében ZFC-ből (amennyiben konzisztens) ilyen állítás nem vezethető le.

Tegyük fel mégis, hogy létezik (legalább egy) univerzum; „válasszunk egyet magunknak”, és jelöljük (a változatosság kedvéért) U-val. Nevezzük most U elemeit *kis halmazoknak,* U részhalmazait pedig *osztályoknak.* Az 1. kikötés szerint U minden eleme egyúttal részhalmaz is, azaz minden kis halmaz egyúttal osztály is.[1] Fordítva ez nem áll: vannak osztályok (például maga az U), amelyek nem kis halmazok. Sőt, ha U-t jólfundáltnak tekintjük (miért

[1] Jegyezzük meg itt: a létezik a halmazelméletnek olyan axiómarendszere, amelyben osztályok és halmazok egyaránt szerepelnek, de természetesen ezekben sem bizonyítható, hogy létezik olyan összesség, amelynek minden osztály részhalmaza – újfent látjuk tehát, hogy egy univerzum létezése meglehetősen erős kikötés...

ne tekintenénk annak), akkor még az $\{\mathfrak{U}\}$ egyelemű halmaz sem lehet „kicsi" – ha ugyanis $\{\mathfrak{U}\} \in \mathfrak{U}$, akkor az 1. feltétel alapján $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}$, márpedig ezt a jólfundáltság axiómája kizárja.

Ha tehát a következőkben az összes halmaz (vagy csoport, vagy topologikus tér) „összességéről" beszélünk, akkor nyugodtan gondolhatunk rájuk úgy, mint egy $\mathfrak{U}$ univerzum elemeire.

A könyv hátralévő részében mindazonáltal nem bolygatjuk a „magalapozás" finom kérdéseit – az érdeklődő Olvasónak a szakirodalmat ajánljuk figyelmébe.

2. fejezet

Kategóriák

A könyv legfontosabb definíciója következik – a könyvben lényegében immár másodszor. Azt ugyanis, hogy mi egy kategória, már az is tudja, aki csupán az 1.3. alfejezet rövid összefoglalásáig jutott el. Ezt most mint definíciót ismételjük meg; a fejezet hátralévő részében jó néhány példa érzékelteti majd, hogy a kategóriaelméleti keretbe nem csupán matematikai, de logikai és szemantikai struktúrák is természetes módon beilleszthetők.

2.1. Definíció

2.1.1 Definíció. *Egy* ***kategória*** objektumok *és* nyilak *egy-egy összességéből áll, utóbbiak mindig két, egyértelműen meghatározott objektum között „haladnak"; ha az* f *nyíl az* A *objektumból indul és a* B *objektumba érkezik, azt vagy így jelöljük:* $f : A \longrightarrow B$*, vagy így:* $A \xrightarrow{f} B$.

Minden E *objektumhoz létezik egy* $1_E : E \longrightarrow E$ *nyíl; ha pedig a* g *nyíl onnan indul, ahova az* f *nyíl érkezik, azaz vannak olyan* A, B *és* C *objektumok, hogy* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, *akkor mindig létezik a* g *és* f *által egyértelműen meghatározott,* A*-ból induló és* C*-be érkező* $g \circ f : A \longrightarrow C$ *nyíl.*

1_E*-t az* E*-hez tartozó* identitásnak, $g \circ f$*-et pedig* g *és* f kompozíciójának *nevezzük. (Az „identitás-nyilakat" többnyire egyszerűen 1-nyilaknak nevezzük.)*

Az identitás „hatástalan", azaz tetszőleges $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *esetén* $1_B \circ f = f$ *és* $g \circ 1_B = g$*, a következő diagram tehát kommutatív:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "1_B"'] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

A kompozíció asszociatív, azaz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} C$ *esetén* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, *tehát a következő diagram is kommutatív:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Jelölések

A kategóriákat általában kalligrafikus betűkkel jelöljük, leggyakrabban a $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ betűkkel. Az objektumokat (többnyire az ábécé elejéről választott) nagybetűkkel, a nyilakat pedig általában kisbetűkkel jelöljük. [Ezt a konvenciót meglehetősen nehéz lesz tartani. Bizonyos, igen fontos kategóriákban ugyanis az objektumok éppenséggel egy másik kategóra nyilai... De ne szaladjunk előre!]

A $\mathcal{C}$ kategória objektumainak összességét $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, nyilainak összességét pedig $\mathrm{Ar}\,\mathcal{C}$ jelöli. A $\mathcal{C}$ kategória A és B objektumai között „haladó" nyilak összességét $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ jelöli, a $\mathcal{C}$ indexet – ha nem okoz félreértést – többnyire elhagyjuk.

Az $f : A \longrightarrow B$ nyíl (egyértelműen meghatározott) A kezdőpontját $\mathrm{Dom}\, f$, B végpontját pedig $\mathrm{Codom}\, f$ jelöli.

A méret is számít

A definícióban objektumok és nyilak „összességéről" beszélünk. Szándékosan nem használjuk a halmaz szót, ugyanis jó néhány olyan kategóriával találkozunk majd, amelyben az objektumok „túl sokan vannak" ahhoz, hogy halmazt alkothassanak. Ez a helyzet a legalapvetőbb példa, a halmazok kategóriája esetében is. Ennek a kategóriának az objektumai a halmazok (az „összes halmaz összessége"), nyilai pedig a függvények. Ez a kategória olyan fontos, hogy saját neve is van: Set – de objektumai nyilván nem alkotnak halmazt. [Az összes halmaz összessége nem halmaz – emlékszik még az Olvasó, hogy miért is nem?] Az azonban igaz, hogy a halmazok kategóriájában minden $\mathrm{Hom}(A, B)$ összesség már halmaz: bármely két halmaz között csupán „halmaznyi sok" függvény halad. Ha egy kategória ilyen, akkor *lokálisan kicsinek* nevezzük. Ebben a könyvben kizárólag lokálisan kis kategóriákról lesz szó, így ezt a tényt külön nem is fogjuk említeni. Ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (és így automatikusan $\mathrm{Ar}\,\mathcal{C}$ is) halmaz, akkor $\mathcal{C}$-t *kicsinek* nevezzük.

A csapos közbeszólhat: az, hogy egy összesség „halmaznyi-e" vagy sem, nyilván attól függ, hogy milyen halmazelméletet hozunk magunkkal a kategóriaelméleti vizsgálódáshoz. Igaza van. Akit ez a bizonytalanság zavar, gondolja azt, hogy az objektumok valamely konkrét halmazelméletben – mondjuk ZFC-ben – létezőnek bizonyított objektumok, vagy azt, hogy egy Grothendieck-univerzum elemei. A megkülönböztetés gyakran csupán abban merül ki, hogy ügyelnünk kell, mikor használjuk a „halmaz", és mikor az „összesség" (vagy az „osztály") szavakat, illetve, hogy mikor beszélünk függvényről, vagy egyszerűen csak „hozzárendelésről". Gyakran előfordul, hogy egy „nem halmaznyi" összesség minden eleméhez egyértelműen hozzárendeljük egy szintén „túl nagy" összesség pontosan egy elemét – ezzel semmi probléma nincs, csak arra figyeljünk, hogy ezekben az esetekben a „függvény" *terminus technicus* nem alkalmazható. [Nyilván emlékszik az Olvasó: egy fügvény olyan $\langle E, F, R_f \rangle$ hármas, amelyben E és F is *halmaz,* R pedig $E \times F$ egy részhalmaza.] Ezzel a körültekintéssel járunk el a következő megjegyzésben is.

Ha $\mathcal{C}$ lokálisan kis kategória, akkor a kompozícióképzés egy $\circ_{\langle A,B,C \rangle}$ „függvényösszességet" határoz meg (ahol $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$): tetszőleges A, B, és C objektumok esetén $\circ_{\langle A,B,C \rangle}$ az a $\mathrm{Hom}\,(A, B) \times \mathrm{Hom}\,(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A, C)$ függvény, amelynek hozzárendelési szabálya: $\langle f, g \rangle \mapsto g \circ f$. Ha $\mathcal{C}$ kicsi, akkor függvény*halmazt* kapunk.

A definíció szerint a kompozíciókat tagjaik egyértelműen meghatározzák, az identitások esetében azonban nem kötjük ki az egyértelműséget. Ez nem véletlen: az identitások kompozíció szempontjából való hatástalansága már garantálja, hogy tetszőleges A objektumnak egyetlen identitásnyila van. Ha az 1_A és az $1'_A$ nyilak egyaránt teljesítik ezt a követelményt, akkor $1_A = 1_A \circ 1'_A = 1'_A$. [Ez a megjegyzés a figyelmes Olvasónak nyilván nem új.]

És ha csak nyilak vannak?

Egy kategória objektumai és 1-nyilai párba állíthatók: minden objektumnak van egy 1-nyila, és minden 1-nyíl egyértelműen meghatároz egy objektumot: azt, amelyikből indul, és amelybe érkezik. Ha ezt a tényt nagyon komolyan akarjuk venni, akkor a kategória definícióját kizárólag nyilakkal is megfogalmazhatjuk.

Lássuk, hogyan. Egy kategória ebben az esetben nyilak összessége; bizonyos nyílpárok esetében értelmezve van azok (sorrendtől függő) kompozíciója; az f és g nyilak kompozícióját $f \circ g$ jelöli. Az e nyilat *identitásnak* (vagy 1-nyílnak) nevezzük, ha teljesül rá a következő: tetszőleges f nyíl esetén, amennyiben $f \circ e$ értelmezve van, úgy $f \circ e = f$, és tetszőleges g esetén, amennyiben $g \circ e$ értelmezve van, úgy $g \circ e = g$. Ha f, g és h olyan nyilak, amelyekre az $f \circ g$ és a $g \circ h$ nyíl egyaránt értelmezve van, akkor értelmezve van az $f \circ (g \circ h)$ és az $(f \circ g) \circ h$ nyíl is, és $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Végül: tetszőleges f nyíl esetén létezik e_1 és e_2 1-nyíl, amelyre $e_1 \circ f = f$, illetve

$f \circ e_2 = f$.

2.1.1. Gondoljuk meg, hogy az „alternatív definíció” valóban pontosan „ugyanolyan” struktúrákat ad-e meg, mint a „hivatalos”!

A szerzők többsége – így e könyvé is – ragaszkodik az objektumok és a nyilak „elkülönítéséhez”. Ennek egyszerű oka van: a vizsgált konkrét kategóriákban általában egészen más egy objektum, illetve egy nyíl (interpretációja), nem érdemes az „egységes felfogás” oltárán feláldozni a különbözőségüket.

2.2. Izomorfizmus. Terminátor. Iniciális objektum

Egy kategória két objektuma „lényegében megkülönböztethetetlen”, ha *a kategóriaelmélet nyelvén* nem tudunk különbséget tenni köztük. Ez adja a következő – a könyvben a második legfontosabb – definíció jelentőségét.

2.2.1 Definíció. *Egy $\mathcal{C}$ kategória A és B objektuma izomorf, ha van olyan $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow A$ nyíl, amelyre teljesül, hogy $g \circ f = 1_A$ és $f \circ g = 1_B$. Az ilyen nyilakat izo nyilaknak nevezzük; egy $f : A \longrightarrow B$ nyíl tehát izo, ha van olyan $g : B \longrightarrow A$, hogy $g \circ f = 1_A$ és $f \circ g = 1_B$.*

Ha $f : A \longrightarrow B$ izo, akkor pontosan egy olyan g van, amellyel $g \circ f = 1_A$ és $f \circ g = 1_B$. Valóban, ha g_1 és g_2 egyaránt ilyenek, akkor $g_1 = g_1 \circ 1_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = 1_A \circ g_2 = g_2$. A g nyilat f inverzének nevezzük, és f^{-1}-gyel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy ilyenkor maga a g is izo nyíl: $g^{-1} = f$; világos tehát, hogy tetszőleges f izo nyíl esetén $(f^{-1})^{-1} = f$. Az objektumok felől tekintve az iménti fejtegetések így foglalhatók össze: az izomorfizmus szimmetrikus reláció, azaz ha A izomorf a B-vel, akkor B izomorf az A-val – tetszőleges A, illetve B objektum esetén.[1]

Minden 1-nyíl izo: ehhez elég felidézni, hogy $1_A \circ 1_A = 1_A$. Eszerint tehát egy kategória minden objektuma izomorf önmagával, az izomorfizmus-reláció tehát reflexív.

Izo nyilak kompozíciója is izo nyíl. Ha ugyanis $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow C$ egyaránt izo nyilak, akkor $g \circ f : A \longrightarrow C$ is izo, amelynek inverze az $f^{-1} \circ g^{-1} : C \longrightarrow$ nyíl: mint az könnyen ellenőrizhető, $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = 1_A$ és $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = 1_B$. Az objektumok felől nézve ez éppen az izomorfizmus-reláció tranzitivitása: ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában A izomorf B-vel és B izomorf C-vel, akkor A izomorf C-vel.

[1] Ez a „reláció” persze nem feltétlenül a halmazelméleti értelemben vett reláció (csak akkor, ha a vizsgált kategória kicsi). Ennyi pongyolaságot azonban megengedhetünk magunknak.

A halmazok kategóriájában az izo nyilak a bijektív függvények; ebben a kategóriában tehát két objektum (halmaz) pontosan akkor izomorf, ha „ugyanannyi” elemük van. [Abban az értelemben, hogy elemeik „párba állíthatók”. Gondoljuk meg: ha az asztalon két kupac lencse van, akkor azt, hogy a két kupacban ugyanannyi lencse van-e, kétféleképpen is eldönthetjük. Megtehetjük, hogy megszámoljuk mindkét kupac elemeit, és ha ugyanazt a számot (mondjuk a 2009-ot) kapjuk, akkor a két kupacnak nyilván ugyanannyi eleme van. Eljárhatunk azonban úgy is, hogy mindkét kupacból elveszünk egy-egy szemet. Ha ezt ismételve „összességeink” egyszerre fogynak el, akkor ugyannannyi elemük van. Az első módszer csak véges halmazokra, a második viszont tetszőleges két halmaz esetén alkalmazható. Leszámítva azt az elhanyagolható körülményt, hogy végtelen halmazok esetén eljárásunknak – értelemszerűen – *mi* nem tudunk a végére járni. . .]

Különböző megkülönböztethetetlenek?

Ha egy $\mathcal{C}$ kategória két objektuma izomorf, akkor köztük – a kategóriaelmlet nyelvén – nem tudunk különbséget tenni: bármi, ami az egyikre igaz, igaz a másikra is. A halmazok kategóriájában például egy K kételemű halmazt így jellemezhetünk: tetszőleges T egyelemű halmaz esetén pontosan kettő $T \longrightarrow K$ nyíl létezik. Ilyen halmaz természetesen végtelen (nem is halmaznyi) sok van, amelyek – mint halmazok, azaz legalább egy elemükben – mind különbözőek. A Set *kategóriában* azonban nem különböztethetők meg, minden olyan állítás, amely az egyikre igaz, igaz a másikra is. Érdemes ehelyütt megjegyezni, hogy a halmazelmélet atyja, Georg Cantor éppenséggel ilyennek gondolta a halmazokat: olyan objektumok összességének, amelyek egymástól csupán „numerikusan” különböznek, azaz annyiban, hogy az egyik az egyik, a másik meg egy másik. . .

Terminátor

A Set kategóriában két izomorf objektum között általában több izo nyíl is halad; ha például az E és az F halmaz egyaránt n elemű, akkor az $E \longrightarrow F$ izo nyilak - azaz az $E \longrightarrow E$ bijekciók – száma éppen $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Az egyelemű halmazok ebből a szempontból (is) kivételesek: bármely kettő között pontosan egy nyíl halad, és az izo. A Set kategóriában tehát ezek az objektumok nem „csupán” izomorfak, hanem ennél több is igaz: közöttük pontosan egy izo nyílpár halad. Lássuk most az „egyeleműség” absztrakt meghatározását.

2.2.2 Definíció. *A $\mathcal{C}$ kategória egy T objektumát terminális objektumnak* *(röviden terminátornak) nevezzük, ha $\mathcal{C}$ tetszőleges* A *objektuma esetén pontosan egy* $A \longrightarrow T$ *nyíl létezik.*

Ha T terminátor, akkor tetszőleges A objektum esetén az egyetlen $A \longrightarrow T$ nyilat gyakran $!_A$ jelöli.

A halmazok kategóriájában minden egyelemű halmaz terminátor: ha T egyelemű, akkor tetszőleges E halmaz esetén pontosan egy $f : A \longrightarrow T$ függvény létezik, az a (konstans) függvény, amely A minden eleméhez a T egyetlen elemét rendeli.

2.2.3. Állítás. *Ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában T_1 és T_2 egyaránt terminátorok, akkor izomorfak, és pontosan egy $T_1 \longrightarrow T_2$ (illetve $T_2 \longrightarrow T_1$) izo nyíl létezik.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy T_1 és T_2 terminális objektumok. Mivel T_2 terminális, pontosan egy $T_1 \longrightarrow T_2$ nyíl létezik, jelölje ezt f. De ugyanúgy igaz az is, hogy pontosan egy $T_2 \longrightarrow T_2$ nyíl létezik. Ez utóbbi viszont csak az 1_{T_2} 1-nyíl lehet, amelynek – kategóriáról lévén szó – mindenképpen léteznie kell. Hasonlóan: pontosan egy $T_2 \longrightarrow T_1$ nyíl (jelölje azt g) és pontosan egy $T_1 \longrightarrow T_1$ nyíl – jelesül az 1_{T_1} 1-nyíl – létezik. A $g \circ f$ kompozíció, amelynek a kategória definíciója szerint léteznie kell, csak $T_1 \longrightarrow T_1$ nyíl lehet. Mivel azonban ilyenből csak egy van, azt kapjuk, hogy $g \circ f = 1_{T_1}$. A gondolatmenetet *mutatis mutandis* megismételve: $f \circ g = 1_{T_2}$. ♡

2.2.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy* T *a* $\mathcal{C}$ *kategória egy terminális objektuma, és hogy az* $f : T \longrightarrow T'$ *nyíl izo. Ekkor* T' *is terminális objektum.*

Bizonyítás: Legyen tehát T egy terminátor, $f : T \longrightarrow T'$ pedig egy izo nyíl az $f' : T' \longrightarrow T$ inverzzel; ekkor tehát $f \circ f' = 1_{T'}$ és $f' \circ f = 1_T$. Azt kell igazolnunk, hogy T' is terminátor, azaz tetszőleges C objektum esetén pontosan egy $C \longrightarrow T'$ nyíl létezik. Legyen tehát C tetszőleges objektum. Mivel T terminátor, azért létezik (pontosan) egy $!_C : C \longrightarrow T$ nyíl. Az $f \circ !_C$ nyíl eszerint C-ből indul és T'-be érkezik: legalább egy $C \longrightarrow T'$ nyíl tehát létezik. Annak igazolásához, hogy legfeljebb egy ilyen nyíl van, tegyük fel, hogy g_1 és g_2 egyaránt $C \longrightarrow T'$ nyilak. Mivel $f' \circ g_1$ és $f \circ g_2$ egyaránt $C \longrightarrow T$ nyilak, így mindkettőnek azonosnak kell lennie az (egyetlen ilyen) $!_C$ nyíllal, minek következtében $f1 \circ g_1 = f' \circ g_2$. Ezután a már többször bevált trükkhöz folyamodunk:

$$g_1 = 1_{T'} \circ g_1 = f \circ f' \circ g_1 = f \circ f' \circ g_2 = 1_{T'} \circ g_2 = g_2,$$

g_1 és g_2 tehát nem különbözhetnek egymástól, T' valóban terminátor. ♡

Iniciális objektum

Mint emlékszünk, az $\varnothing$ üres halmaz (egyik) meghatározó tulajdonsága, hogy tetszőleges A halmaz esetén pontosan egy $\varnothing \longrightarrow A$ függvény létezik. Ez a tulajdonság is általánosítható tetszőleges kategóriára.

2.2.5 Definíció. *A $\mathcal{C}$ kategória egy* I *objektumát iniciális objektumnak nevezzük, ha $\mathcal{C}$ tetszőlegs* A *objektuma esetén pontosan egy* $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{A}$ *nyíl létezik.*

A Set kategóriában tehát $\varnothing$ *az* inciális objektum, a meghatározottsági axióma szerint ugyanis nem létezhet két különböző üres halmaz. Egy tetszőleges $\mathcal{C}$ kategóriában ennél valamivel kevesebbet tudunk csak bizonyítani:

2.2.1. Ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában I_1 és I_2 egyaránt iniciális objektumok, akkor izomorfak, és pontosan egy $\mathrm{I}_1 \longrightarrow \mathrm{I}_2$ (illetve $\mathrm{I}_2 \longrightarrow \mathrm{I}_1$) izo nyíl létezik.

A 2.2.4. Állítás párja is igazolható:

2.2.2. Tegyük fel, hogy I a $\mathcal{C}$ kategória egy iniciális objektuma, és hogy az $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}'$ nyíl izo. Bizonyítsuk be, hogy ekkor I' is iniciális objektum!

Vegyük észre: a terminális és az iniciális objektum definíciója csak a nyilak irányában különbözik egymástól, a szerző tehát nem követett el merényletet, amikor az iniciális objektumok izomorfiájának igazolását az Olvasóra hagyta. (Ilyen „duális" fogalompárral már találkoztunk és még sokszor találkozni is fogunk. Hamarosan precízebben is tisztázni fogjuk, hogy mit is jelent ez a „dualitás" – persze az Olvasó már most kipróbálhatja magát.

2.2.3. Mutassuk meg, hogy a halmazok kategóriájában az injektivitás és a szürjektivitás „duális" fogalmak! [Útmutatás: idézzük fel az 1.8. alfejezet tételeit.]

2.3. A halmazok kategóriája

Az első fejezet lényegében erről a kategóriáról szólt, néhány példán érzékeltettük, hogy mi mindent el lehet mondani csupán a nyilak segítségével. Az Olvasó nyilván emlékszik, hogyan adtuk meg az üres halmaz, a nemürességég, az egyeleműség, az injekció, a szürjekció és a bijekció csak függvényeket használó meghatározásait. A sornak még messze nincs vége, a továbbiakban számos halmazelméleti konstrukcióról kiderül, hogy – az alkalmazások szempontjából kimerítően, bár általában „csak izomorfizmus erejéig" – egyértelműen meghatározhatók kizárólag nyilakra hivatkozva.

A Set kategória jelentőségét mutatja, hogy benne minden kis kategória „reprezentálható".

2.3.1. Tétel. *Bármely $\mathcal{C}$ kis kategóriához megadható egy olyan kategória, amelynek objektumai halmazok, nyilai pedig függvények, és amelyre teljesül, hogy objektumai és nyilai bijektíven megfeleltethetők az $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ és az $\mathrm{Ar}\,\mathcal{C}$ elemeinek, méghozzá úgy, hogy az identitások képei identitások, a kompozíciók képei pedig a képek kompozíciói.*

BIZONYÍTÁS: Mivel $\mathcal{C}$ kicsi, csupán halmaznyi sok nyíl van benne. Halmaz tehát tetszőleges $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ esetén az A-ba érkező nyilak $A^* = \{f : \mathrm{Codom}\, f = A\}$ összessége is. Tetszőleges $f : A \longrightarrow B$ $\mathcal{C}$-beli nyíl egyértelműen meghatároz egy $f^* : A^* \longrightarrow B^*$ függvényt: azt, amelyiknek hozzárendelési szabálya: $g \mapsto f \circ g$. (Ha g az A-ba, akkor $f \circ g$ valóban a B-be érkezik.)

Belátjuk, hogy a $*$-gal indexelt halmazok, illetve függvények pontosan olyan kategóriát alkotnak, amilyet a tétel kíván.

Tekintsük az $E^* = \{f : \mathrm{Codom}\, f = E\}$ halmazt. Az 1_{E^*} nyíl csak az $E^* \longrightarrow E^*$ identikus függvény lehet, amely az E^* halmaz minden g eleméhez önmagát rendeli. Világos azonban, hogy ekkor 1_{E^*} éppen 1^*_E, elvégre az utóbbi függvény hozzárendelési szabálya $g \mapsto 1_E \circ g = g$. 1-nyilak tehát az új kategóriában is léteznek, és „jók” is: egyértelműen megfeleltethetők a $\mathcal{C}$ kategória 1-nyilainak, és mint függvények, pontosan azt teszik, amit az identitásoknak tenniük kell.

Ami a kompozíciókat illeti: ha $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow C$ a $\mathcal{C}$ kategória nyilai, akkor a $(g \circ f)^* : A^* \longrightarrow C^*$ függvény az A^* halmaz tetszőleges h eleméhez a C^*-beli $(g \circ f) \circ h$ nyilat rendeli. Ez a függvény azonban éppen a $g^* \circ f^* : A^* \longrightarrow C^*$ függvény, amelynek hozzárendelési szabálya: $h \mapsto g \circ (f \circ h)$. Két $\mathcal{C}$-beli nyíl kompozíciójának képe tehát valóban a nyilak képeinek kompozíciója, az asszociativitás pedig – függvényekről lévén szó – nyilvánvaló. ♡

2.3.1. Bizonyítsuk be a tételt úgy, hogy az A^* halmazok helyett az $A^{**} = \{f \in \mathrm{Ar}_{\mathcal{C}} : \mathrm{Dom}\, f = A\}$ halmazokból indulunk ki!

A $\mathcal{C}$ és a $\mathrm{Set}_{\mathcal{C}}$ kategória tehát „lényegében” megegyezik. Mondhatjuk-e, hogy izomorfak? Egyelőre nem, hiszen még nem értelmeztünk olyan kategóriát, amelynek objektumai kategóriák – de nem lesz ez mindig így. (Az Olvasó persze már most elgondolkodhat azon, hogy mik lennének a nyilak a kategóriák kategóriájában.)

2.3.2. Az összes halmaz összességén a függvényeknél általánosabb nyilakkal is értelmezhetünk kategóriát. Tekintsük $A \longrightarrow B$ nyilaknak az olyan $\langle A, B, R\rangle$ hármasokat, amelyekben $R \subseteq A \times B$ halmaz tetszőleges részhalmaz lehet. Az ilyen R-eket – mint emlékszünk – relációknak neveztük. Az $f : A \longrightarrow B$ és a $g : B \longrightarrow C$ nyilak kompozíciója az az $\langle A, C, R_{f \circ G}\rangle$ nyíl, amelyben

$$R_{g \circ f} = \{\langle a, c\rangle \in A \times C : \text{ létezik olyan } b \in B, \text{ amellyel } \langle a, b\rangle \in f \text{ és } \langle b, c\rangle \in g\}.$$

Igazoljuk, hogy az $\langle A, A, \Delta_A\rangle$ hármasok megfelelnek 1-nyilaknak, a kompozíció pedig asszociatív – azaz valóban egy kategóriát adtunk meg! [Ebben a – Rel-nek nevezett – kategóriában Set is benne foglaltatik, elvégre a nyilak között ott vannak a függvények is.]

2.3.3. Egyszerűbb, mindazonáltal még mindig „halmazos” kategóriát tetszőleges E halmazból kiindulva értelmezhetünk. Legyenek az objektumok a $\wp E$ halmaz elemei (azaz E részhalmazai), két objektum között pedig haladjon nyíl pontosan akkor, ha az első részhalmaza a másodiknak. Igazoljuk, hogy így valóban kategóriát kaptunk!

2.3.4. Általánosítsuk az előbbi példát úgy, hogy az objektumok között „minden” halmaz ott legyen.

2.4. Egyszerűbb példák

A halmazok kategóriája a legkézenfekvőbb kategória, de messze nem a legegyszerűbb. Sokkal „átláthatóbb” például ez:

Aki nem látja, jól látja: ennek a kategóriának egyetlen objektuma (és így egyetlen nyila) sincs. A definícióban foglaltak persze mind igazak rá – üresen, mint a zöldség az üres halmaz összes eleméről. Ezért (is) nevezhetjük *az üres kategóriának,* ha „néven” akarjuk nevezni, akkor a **0** jelet használhatjuk. (Emlékezzünk vissza, hogy a 0 halmazelméleti „megfelelője” a Neumann- és a Zermelo-féle definíció szerint is az $\varnothing$.)

2.4.1. Jogos-e az „az” kitétel?

Az üres kategóriánál valamivel bonyolultabb – de még mindig könnyen átlátható szerkezetű – az a kategória, amelyben egyetlen objektum (jelöljük A-val) és egyetlen nyíl van. Az utóbbi csak az identitás lehet, kategóriánk tehát így néz ki:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \end{tikzcd}$$

Ebben a kategóriában a kompozíciók is egyszerűek: az 1_A nyíl önmagával vett kompozíciói. Ezek nem lépik át saját árnyékukat, elvégre $1_A \circ 1_A$ is csak 1_A lehet. Ezt a kategóriát **1** jelöli.

2.4.2. Ellenőrizzük, hogy teljesül-e minden, amit egy kategóriától megköveteltünk!

Lássuk, milyen egyszerű kategóriák adhatók meg két objektummal. A legegyszerűbb az, amelyben mindössze két nyíl van: a két identitás:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

Az olyan kategóriát, amelyben csak 1-nyilak vannak, *diszkrét kategóriának* nevezzük, elvégre ilyenkor az objektumok csak magukkal foglalkoznak, nem avatkoznak egymás dolgaiba. Egy diszkrét kategóriában minden objektum egyszerre terminális és iniciális, és bármely objektum egyedül önmagával izomorf.

Valamivel bonyolultabb a kép, ha a két objektum között is halad – pontosan – egy nyíl:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

Ebben a kategóriában már többféle kompozíció létezik: az ideintitások önmagukkal vett kompozíciói, illetve $f \circ 1_A$ és $1_B \circ f$. Azt, hogy ezek a kompozíciók melyik nyilakat adják meg, a definícióban szereplő axiómák egyértelműen rögzítik. [Hogyan?] Ennek a kategóriának is van neve: **2**. Ebben a kategóriában A iniciális, B pedig terminális objektum; a kettő ugyanakkor nem izomorf. [Miért?]

Következzen most az a kategória, amelyben két objektum van, két nemidentitás nyíllal:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

A kompozíciók itt sem hagynak helyet az önkénynek – csakúgy, mint a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, bend right, "f"'] & B \arrow[loop right, "1_B"] \arrow[l, bend right, "g"'] \end{tikzcd}$$

kategóriában.

2.4.3. Ellenőrizzük, hogy a bemutatott kétobjektumú kategóriáink valóban azok! Vannak-e az utóbbi kettőben iniciális vagy terminális objektumok?

Tekintsük most a következő diagramot! (*Diagramnak* nevezünk tetszőleges ábrát, amelyben objektumok és nyilak vannak, és – persze – minden nyíl esetében egyértelmű, hogy melyik objektumok között halad.)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "h"'] & B \arrow[loop right, "1_B"] \arrow[l, "g" description] \end{tikzcd}$$

Kategóriát ad-e meg ez a diagram? A $g \circ f$ kompozíció csak $A \longrightarrow A$ nyíl lehet, ilyen viszont csak egy van: 1_A. Eszerint tehát $g \circ f = 1_A$. Az $f \circ h$ kompozíció csak $B \longrightarrow B$ nyíl lehet, így neki sincs sok választása: $f \circ h = 1_B$. Eszerint $(g \circ f) \circ h = 1_A \circ h = h$, mivel azonban $g \circ (f \circ h) = g \circ 1_B = g$, diagramunk nem lehet kategória, egy kategóriában ugyanis $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

Láttunk már **0**-t, **1**-et, **2**-t – lássuk most a **3**-at!

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[loop right, "1_C"] \\
& B \arrow[loop below, "1_B"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

2.4.4. Hogyan folytatnánk a sort?

2.4.5. Hány olyan – lényegileg – különböző kategória van, amelyben pontosan három, illetve pontosan négy nyíl van?

Mit jelent az, hogy „lényegileg különböző”? Ezen a ponton az Olvasó intuíciójára bízzuk a választ. Ha arra gondol, hogy a „lényegileg azonos” valamiféle izomorfizmus, akkor nem jár messze az igazságtól... Ehhez ugyanarra van szükségünk, amit már az előző alfejezet végén is hiányoltunk: kategóriára, amelynek objektumai is kategóriák.

2.5. Rendezések

Legyen E egy halmaz, $\leq$ pedig egy E-n értelmezett, *reflexív* és *tranzitív* reláció. Ez a következőt jelenti: az E halmaz tetszőleges x eleme esetén $x \leq x$, és E tetszőleges x, y és z elemei esetén $x \leq y$ és $y \leq z$ egyidejű fennállásából $x \leq z$ következik.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy E-n egy *előrendezést* adtunk meg, vagy hogy E előrendezett halmaz, vagy hogy az $\langle E, \leq \rangle$ „struktúra” egy előrendezés. Jegyezzük meg: egy előrendezés nem feltétlenül „sorba” rendezés: egy sík egyeneseinek halmazán értelmezett párhuzamosság éppúgy előrendezés, mint – mondjuk – a természetes számokon értelmezett $\leq$ vagy $=$.

Ha egy E halmazon értelmeztünk egy $\leq$ előrendezést, akkor egyúttal egy kategóriát is megadtunk: azt a kategóriát, amelynek objektumai az E halmaz elemei, és amelyben az A objektumból a B objektumba pontosan akkor halad (pontosan egy) nyíl, ha a szóban forgó rendezésben $A \leq B$. Az identitások létezését $\leq$ reflexivitása, a kompozíciókét pedig $\leq$ tranzitivitása garantálja. Az identitások automatikusan „jól viselkednek”. [Miért?]

A konstrukció megfordítható. Ha egy kategóriában igaz, hogy bármely két objektum között legfeljebb egy nyíl halad – azaz valamennyi Hom-halmaz legfeljebb egyelemű –, akkor $\longrightarrow$ egy előrendezés az objektumok összességén.

Mivel előrendezések szinte mindenütt előfordulnak, megfigyelésünk alapján garmadával gyárthatunk példákat kategóriákra.

Az előző alfejezetben szereplő **1**, **2** és **3** kategóriákban minden Hom-halmaz pontosan egyelemű – ezek tehát mind megfelelnek, csakúgy, mint a **0**, amelyben „a" Hom-halmazoknak éppen eggyel kevesebb elemük van...

Számhalmazainkból – $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ – a szokásos $\leq$ rendezéssel kategóriákat származtathatunk. A $\mathbb{Z}$, vagy az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett $\|$ („osztója"; $a\|b$ azt jelöli, hogy a osztója b-nek, azaz van olyan c szám, hogy $ac = b$) reláció ugyancsak előrendezés, ahogy bármely E halmaz esetén a $\wp E$ hatványhalmazon a $\subseteq$ reláció is az.

A példákban szereplő rendezésekre jóval több is igaz, mint a reflexivitás és a tranzitivitás. Némelyik például *antiszimmetrikus:* $x \leq y$ és $y \leq x$ egyidejű fennállásából tetszőleges x és y esetén $x = y$ következik, és akad köztük *lineáris* is: ekkor tetszőleges x és y esetén $x \leq y$ és $y \leq x$ közül legalább az egyik fennáll. (A reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációkat *részbenrendezésnek* nevezzük.)

2.5.1. A fent említet relációk közül melyik antiszimmetrikus, illetve lineáris? És mi a helyzet az emberek halmazán értelmezett $\heartsuit$ relációval? [A világirodalom műveinek jelentős része azt igazolja, hogy $\heartsuit$ (i) nem szimmetrikus (viszonzatlan szerelmek...) (ii) nem tranzitív (szerelmi háromszög-sztorik) vagy (iii) nem reflexív (önpusztítós történetek...).]

A rendezett halmazokból származtatott kategóriákban az iniciális, illetve a terminális objektum – amennyiben létezik – a rendezés szerinti abszolút minimum, illetve maximum. [A $\langle E, \leq \rangle$ rendezett halmaznak x maximális (minimális) eleme, ha minden $y \in E$ esetén $x \leq y$ ($y \leq x$).] $\mathbb{Z}$-ben mint kategóriában (a szokásos $\leq$ rendezéssel) sem iniciális, sem terminális objektum nincs; $\mathbb{N}$-ben mint kategóriában (szintén a szokásos $\leq$ rendezéssel) 0 iniciális, terminátor azonban nincs; egy A halmaz $\wp A$ hatványhalmazában mint kategóriában (ahol a nyilak a $\subseteq$-relációk mentén haladnak), $\varnothing$ az iniciális, A pedig a terminális objektum.

2.5.2. Bizonyítsuk be, hogy egy előrendezésből származtatott kategóriában nem létezhet két különböző izomorf objektum!

Rendezett halmazok kategóriái

Az előrendezett halmazok tehát tekinthetők kategóriának. Ez azonban nem az egyetlen módja annak, hogy előrendezésekből kategóriát kapjunk. Tekintsük ugyanis előrendezett halmazok egy „összességét". [Egy ilyen „összesség" nem feltétlenül halmaz. Az összes előrendezett halmaz halmaza például nem létezik – miért nem?] Legyen $\langle E_1, \leq_1 \rangle$ és $\langle E_2, \leq_2 \rangle$ két rendezett struktúra; azt mondjuk, hogy az $f : E_1 \longrightarrow E_2$ függvény monoton, ha tetszőleges $x, y \in E_1$

esetén abból, hogy $x \leq_1 y$, következik, hogy $fx \leq_2 fy$.[1] A monoton függvényekre vonatkozóan könnyen igazolható a következő két tény:

– az 1_E identikus függvény tetszőleges E-n értelmezett előrendezés esetén monoton;

– monoton függvények kompozíciója is monoton: ha $\langle E_1, \leq_1 \rangle$ és $\langle E_2, \leq_2 \rangle$ és $\langle E_3, \leq_3 \rangle$ előrendezett halmazok, $f : E_1 \longrightarrow E_2$ és $g : E_2 \longrightarrow E_3$ pedig monoton fügvények, akkor monoton a $g \circ f : E_1 \longrightarrow E_3$ összetett függvény is.

2.5.3. Igazoljuk, hogy a fenti két tény könnyen igazolható!

Ezzel beláttuk: ha adott előrendezett halmazoknak egy összessége, akkor ez az összesség a halmazok között haladó monoton függvényekkel mint nyilakkal kategóriát alkot.

A rendezett halmazok egy kategóriájában az izo nyilak azok a monoton bijekciók, amelyeknek az inverze is monoton. Jegyezzük meg: egy monoton bijekció inverze nem feltétlenül monoton. Ha például az $E_1 = \{a, b, c, d\}$ halmazon a $\leq_1$ előrendezést az $a \leq_1 b$, $c \leq_1 d$ relációk, az $E_2 = \{e, f, g, h\}$ halmazon a $\leq_2$ előrendezést pedig az $e \leq_2 f \leq_2 g \leq_2 h$ relációk adják meg, akkor az az $m : E_1 \longrightarrow E_2$ bijekció, amelynél $m(a) = e$, $m(b) = f$, $m(c) = g$ és $m(d) = h$ – mint az könnyen ellenőrizhető –, monoton, az m^{-1} inverz függvény azonban nem az: $f \leq_2 g$ teljesül, $m^{-1}(f) = b$ és $m^{-1}(g) = c$ között azonban nem áll fenn a $\leq_1$ reláció.

2.5.4. Milyen feltételek mellett lesz egy monoton $\langle E_1, \leq_1 \rangle \longrightarrow \langle E_2, \leq_2 \rangle$ monoton bijekció inverze is monoton?

A rendezett halmazok között a monoton függvények a *struktúratartó leképezések*. Másféle struktúrákban másfajta függvények lesznek a struktúratartók – de ahhoz, hogy kategóriáról beszélhessünk, általában elég azt igazolni, hogy struktúratartó nyilak kompozíciója is struktúratartó. Az identikus függvények semmit nem tudnak elrontani, a struktúrát sem.

2.6. Algebrai struktúrák

Míg a rendezett halmazok esetében egy reláció, az algebrai struktúrák esetében egy (vagy több) művelet adja a struktúra alapját. A művelet absztrakt

[1] Ez az (általános) monotonitásfogalom nem ugyanaz, mint amelyet a valós függvények esetében használtunk. Egy $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény esetében a monotonitás – mint emlékszünk – azt jelentette: f monoton növekvő, vagy monoton csökkenő. Jegyezzük azonban meg: ha $\langle E, \leq \rangle$ előrendezés, akkor $\langle E, \geq \rangle$ is az, $\geq$ az reláció, amelynek egy $\langle a, b \rangle$ rendezett pár pontosan akkor eleme, ha $\langle b, a \rangle$ eleme a $\leq$ relációnak.

fogalma – például – a számokkal végzett egyszerű műveletekből származtatható. Ha „mindentől eltekintünk" (azaz eléggé hunyorítunk), akkor a – mondjuk a természetes számok halmazán értelmezett – összeadás, a szorzás vagy a hatványozás lényege ugyanaz: két számhoz hozzárendelünk egy harmadikat. Az összeadás és a szorzás esetében a két szám sorrendje nem számít, a hatványozás esetében azonban már igen: a^b és b^a általában nem egyenlők.

2.6.1. Adjuk meg az összes olyan $\langle a, b\rangle$ természetes számpárt, amelyekre teljesül, hogy $a^b = b^a$.

Az összeadás, a szorzás vagy a hatványozás esetében tehát rendezett számpárokhoz rendelünk egy számot. Ha most eltekintünk attól is, hogy mind az input(ok), mind az output szám, akkor már meg is kaptuk a művelet absztrakt definícióját: az $E \times E \longrightarrow E$ függvényeket E-n értelmezett (kétváltozós) műveleteknek nevezünk. A kétváltozós műveletek tehát egy halmaz elemeiből képezett rendezett párokhoz a szóban forgó halmaz egy elemét – az adott inputokhoz tartozó outputot – rendelik. Ha a művelet a $\diamond$, akkor $\diamond(\langle a, b\rangle)$ helyett általában $a\diamond b$-t írunk. Ha E egy halmaz, $\diamond$ pedig egy E-n értelmezett művelet, akkor a $\langle E, \diamond\rangle$ rendezett párt *algebrai struktúrának*, az E halmazt pedig a struktúra alaphalmazának nevezzük. Gyakran magát a struktúrát is csupán az alaphalmaz „neve" jelöli.

Félcsoportok, monoidok, csoportok

Azt mondjuk, hogy az $\langle E, \diamond\rangle$ algebrai struktúra *félcsoport,* ha a $\diamond$ asszociatív művelet, azaz tetszőleges $x, y, z \in E$ esetén $(x\diamond y)\diamond z = x\diamond(y\diamond z)$. Az E halmaz egy e elemét az $\langle E, \diamond\rangle$ algebrai struktúra *neutrális elemének* nevezzük, ha minden $x \in E$ esetén $x \diamond e = e \diamond x = x$. A neutrális elemmel rendelkező félcsoportokat *monoidnak* nevezzük, a kitűntetett elemet általában a monoid „nevében" is feltűntetjük: $\langle E, \diamond, e\rangle$.

Az üres halmaz a rajta értelmezett („üresen asszociatív") üres művelettel félcsoport. [Ellenőrizzük!] A pozitív egész számok az összedással félcsoportot alkotnak, amely nem monoid. Az összeadás neutrális eleme a 0, $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ tehát már monoid. A szorzás esetében a neutrális elem az 1, így monoid – például – a $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1\rangle$ vagy $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ is.

2.6.2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges E halmaz esetén $\langle \wp E, \cup, \varnothing\rangle$ és $\langle \wp E, \cap, E\rangle$ is monoid!

2.6.3. Igazoljuk, hogy tetszőleges A halmaz esetén az $A \longrightarrow A$ függvények halmaza a kompozícióval mint művelettel szintén monoid, amelynek neutrális eleme az 1_A identikus függvény!

2.6.4. Lássuk be, hogy minden monoidnak pontosan egy neutrális eleme van!

Ha adott egy $\langle M, \diamond, e\rangle$ monoid, akkor automatikusan adott vele egy kategória is, amelynek egyetlen objektuma van – mondjuk $*$ –, nyilai pedig M elemei. Hogyan lesz ebből kategória? Mivel minden nyíl $*$-ból indul és oda is érkezik, bármelyik kettőnek létezik a kompozíciója, amelyet így értelmezünk: az e és f nyilak esetén $e \circ f$ legyen $e \diamond f$. Végül az 1_* identitás szerepére monoidunk neutrális elemét kérjük fel. Könnyen belátható, hogy így valóban kaegóriát kapunk: az 1-nyíl hatástalanságát a neutrális elem karakterisztikus tulajdonsága biztosítja, a kompozíció asszociativitását pedig a $\diamond$ művelet analóg jellemzője.

2.6.5. Az $\langle M, \diamond\rangle$ monoidhoz „konkrétabban" is rendelhetünk kategóriát. Újfent egyetlen objektumunk lesz: ezúttal azonban maga az M halmaz. A nyilak az M elemei által meghatározott $M \longrightarrow M$ függvények: ha $m \in M$, akkor az m-nek megfelelő függvény az az $\widehat{m} : M \longrightarrow M$ függvény, amelynek hozzárendelési szabálya: $x \mapsto mx$. Az m és n nyilak $n \circ m$ kompozíciója az $\widehat{n \diamond m}$ függvény. Igazoljuk, hogy így valóban kategóriát adtunk meg! [Az $x \mapsto xm$ hozzárendelési szabályok helyett választhattuk volna az $x \mapsto mx$ alakú szabályokat is. Ha a művelet nem *kommutatív* (azaz $x \diamond y = y \diamond x$ nem teljesül minden x-re és y-ra), akkor az $x \mapsto mx$ és az $x \mapsto xm$ függvények nem feltétlenül azonosak.]

Az $\langle G, \diamond, e\rangle$ monoidot *csoportnak* nevezzük, ha G minden elemének van inverze, azaz tetszőleges $x \in G$ esetén létezik olyan $x' \in G$, hogy $x \diamond x' = x' \diamond x = e$. Ilyenkor x és x' nyilván egymás inverzei.

2.6.6. Igazoljuk, hogy egy csoportban minden elem inverze egyértelműen meghatározott!

Csoportot alkotnak például az egész számok az összeadásra, vagy a pozitív racionális számok a szorzásra nézve. Ha E tetszőleges halmaz, akkor az $E \longrightarrow E$ bijekciók is csoportot alkotnak: ebben a csoportban a művelet a függvénykompozíció, a neutrális elem az 1_E identitásfüggvény, egy f függvény (csoportbeli) inverze pedig f („közönséges") f^{-1} inverze.

Mint minden monoid, a csoportok is meghatároznak egy egyobjektumú kategóriát, amelyben a nyilak a csoport elemei. Ekkor minden nyílnak létezik (egyértelmű) inverze; az tehát, hogy a monoid csoport, a kategórielmélet nyelvén annyit tesz: a belőle származtatott kategóriában *minden nyíl izo.*

Az $x \mapsto x'$ hozzárendelés nyilván egy $E \longrightarrow E$ függvényt ad meg (E a szóban forgó csoport alaphalmaza). Az ilyen függvényt az algebristák gyakran egyváltozós műveletként tartják számon. Az absztrakció magasabb szintjén maga az egységelem is tekinthető műveletnek, méghozzá (nyilván kitalálja az Olvasó) nullváltozós műveletnek. Ha tehát precízek akarunk lenni, akkor egy csoportot egy $\langle E, \diamond, e, i\rangle$ rendezett négyessel adunk meg: e a neutrális elem, i pedig az a függvény, amely E minden eleméhez annak inverzét rendeli.

Monomorfizmusok, „algebrai struktúrák kategóriái"

Ahogy a rendezett halmazok esetében a monoton függvények, úgy az algebrai struktúrákban a homomorfizmusok a struktúratartó leképezések. Ha $\langle E_1, \diamond_1\rangle$ és $\langle E_2, \diamond_2\rangle$ félcsoportok, akkor egy félcsoport-homomorfizmus olyan $f : E_1 \longrightarrow E_2$ függvény, amely „megtartja a műveletet", azaz tetszőleges $x, y \in E_1$ esetén $f(x \diamond_1 y) = fx \diamond_2 fy$. Ha mindkét algebrai struktúra monoid, akkor a monomorfizmusoknak a neutrális elemet is meg kell őrizniük: ha tehát e_1 az $\langle M_1, \diamond_1, e_1\rangle$, e_2 pedig az $\langle M_2, \diamond_2, e_2\rangle$ monoid neutrális eleme, akkor az $f : M_1 \longrightarrow M_2$ monoid-homomorfizmusok olyan félcsoport-homomorfizmusok, amelyekre $f(e_1) = e_2$. Végül ha $\langle G_1, \diamond_1, e_1, i_1\rangle$ és $\langle G_2, \diamond_2, e_2, i_2\rangle$ csoportok, akkor egy $f : G_1 \longrightarrow G_2$ csoport-homomorfizmus olyan $G_1 \longrightarrow G_2$ függvény, amely megtartja a műveletet, a neutrális elemet neutrális elembe viszi, és amelynél az inverzek képe a képek inverze, azaz $f(i_1(x)) = i_2(f(x))$ minden x esetén.

2.6.7. Bizonyítsuk be, hogy az utolsó kikötés elhagyható: ha f monoid-homomorfizmus, akkor amennyiben csoportból indul és csoportba is érkezik, úgy az inverz párokat inverz párokba viszi!

Akár félcsoportokról, akár monoidokról, akár csoportokról van szó,
– az identikus függvény mindig homomorfizmus, és
– két homomorfizmus kompozíciója is az.

2.6.8. Lássuk be!

Eszerint tehát rendre kategóriát kapunk, ha objektumoknak félcsoportok, monoidok vagy csoportok, nyilaknak pedig a megfelelő struktúrák monomorfizmusait választjuk. Az összes félcsoport, monoid vagy csoport természetesen nem alkot halmazt, ezek tehát meglehetősen „nagy" kategóriák – lokálisan azonban kicsik, hiszen bármely két félcsoport, monoid vagy csoport között csupán halmaznyi sok monomorfizmus adható meg.

Iniciális és terminális objektumok; izomorfizmus

A monoidok (illetve a csoportok) kategóriájában az egyelemű monoidok (illetve csoportok) egyszerre iniciális és terminális objektumok. Ha ugyanis egy monoid (illetve csoport) egyelemű, akkor az egyetlen elem csak a neutrális elem lehet, így egy egyelemű monoidból (illetve csoportból) tetszőleges monoidba (illetve csoportba) csupán egy homomorfizmus érkezhet: az, amelyik az egyetlen elemhez az „érkezési” monoid (illetve csoport) neutrális elemét rendeli. Az pedig nyilvánvaló, hogy egy egy egyelemű monoidba (illetve csoportba) bármely monoidból (illetve csoportból) pontosan egy homomorfizmus érkezik: a konstans függvény által megadott homomorfizmus.

2.6.9. Igazojuk, hogy az említett függvények valóban homomorfizmusokat adnak meg!

A félcsoportok kategóriájában bármely egyelemű félcsoport terminális objektum, iniciális objektum pedig „az” üres félcsoport. A nemüres félcsoportok kategóriájában azonban nincs iniciális objektum. Ezt például a következőképpen láthatjuk be. Tekintsük azt az $\langle E, \diamond_E \rangle$ félcsoportot, amelyben $E = \{a, b\}$, a $\diamond_E$ műveletet pedig így értelmezzük: $e \diamond_E e = e \diamond_E f = e$ és $f \diamond_E f = f$. [Könnyen belátható, hogy $\diamond_E$ valóban asszociatív – Lássuk be!] Ekkor tetszőleges $\langle F, \diamond_F \rangle$ félcsoportból legalább két homorfizmus érkezik az $\langle E, \diamond_E \rangle$ félcsoportba: az egyik F minden eleméhez e-t, a másik F minden eleméhez f-et rendeli.

2.6.10. Lássuk be, hogy ezek valóban homomorfizmusok!

A kategóriaelméleti izomorfizmusdefiníció értelmében az „algebrai kategóriák” izo nyilai olyan bijektív homomorfizmusok, amelyeknek az inverze is homomorfizmus. Könnyen belátható azonban, hogy az utóbbi kitétel fölösleges: ha két (ugyanolyan típusú) algebrai struktúra között megadtunk egy bijektív homomorfizmust, akkor annak inverze automatikusan homomorfizmus lesz. Lássuk, miért van ez így a monoidok kategóriájában! Legyen $\langle M_1, e_1, \diamond_1 \rangle$ és $\langle M_2, e_2, \diamond_2 \rangle$ két monoid (egységelemeik természetesen e_1 és e_2), $f : M_1 \longrightarrow M_2$ pedig egy bijektív homomorfizmus. Legyen az $f : M_1 \longrightarrow M_2$ *függvény* inverze a $g : M_2 \longrightarrow M_1$ függvény; ekkor tehát $f \circ g = 1_{M_2}$. Belátjuk, hogy g is monomorfizmus. Mivel $f(e_1) = 2_2$, azért $g(e_2) = e_1$, a neutrális elem g szerinti képe tehát neutrális elem. Már csak azt kell igazolnunk, hogy g művelettartó, azaz $g(x \diamond_2 y) = g(x) \diamond_1 g(y)$ minden $x, y \in M_2$ esetén. Ehhez – mivel f injektív – elegendő, ha teljesül $f(g(x \diamond_2 y)) = f(g(x) \diamond_1 g(y))$. Az utóbbi egyenlőség azonban könnyen bizonyítható. Egyrészt abból, hogy f homomorfizmus, következik, hogy $f(g(x) \diamond_1 g(y)) = f(g(x)) \diamond_2 f(g(y))$, mivel azonban $f \circ g = 1_{M_2}$, azért $f(g(x)) \diamond_2 f(g(y)) = x \diamond_2 y$. Másrészt (ugyanezen okból) $f(g(x \diamond_2 y)) = 1_{M_2}(x \diamond_2 y) = x \diamond_2 y$.

2.6.11. Bizonyítsuk be a csoportokra vonatkozó analóg állítást!

2.6.12. Fejtsük ki, mit mond ki a 3. alfejezetben bizonyított „reprezentációs tétel” a csoportokból származtatott kategóriákra! [Az algebristák erre a speciális esetre Cayley-tétel néven hivatkoznak.]

2.7. A természetes számok

Ebben az alfejezetben a természetes számok egy fontos jellemzőjére világítunk rá a kategóriaelmélet reflektorával. Ebben nem az egyes számok mibenléte, vagy a számsorban elfoglalt helye kerül előtérbe, hanem a természetes-szám-struktúra egésze: megmutatjuk, hogy a természetes számokra gondolhatunk úgy, mint egy kategória iniciális objektumára.

Idézzük fel, milyenek is a természetes számok halmazelméleti modelljei. Mindegyikben adott egy halmaz, annak egy kitűntetett eleme (a nulla), és egy, az adott halmazon értelmezett és abba érkező függvény, a *rákövetkezés*. A Neumann János-féle értelmezésben – mint emlékszünk – a „számok” és az S_N rákövetkezésfüggvény értelmezése így megy:

$$\begin{aligned}
0_N &=_{\text{def}} \varnothing \\
1_N &=_{\text{def}} \{\varnothing\} = \{0\} \\
2_N &=_{\text{def}} \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\
3_N &=_{\text{def}} \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\
&\vdots \\
(n+1)_N &=_{\text{def}} S_N(n) = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots n\}
\end{aligned}$$

Elképzelhető természetesen rengeteg egyéb definíció is. A Zermelo-féle meghatározás például így megy:

$$\begin{aligned}
0_Z &=_{\text{def}} \varnothing \\
1_Z &=_{\text{def}} \{\varnothing\} = \{0'\} \\
2_Z &=_{\text{def}} \{\{\varnothing\}\} = \{1'\} \\
3_Z &=_{\text{def}} \{\{\{\varnothing\}\}\} = \{2'\} \\
&\vdots \\
(n+1)_Z &=_{\text{def}} S_Z(n) = \{n\}
\end{aligned}$$

A lényeg, hogy valamennyinek egy Dedekind–Peano-struktúrát kell megadnia. Egy $\langle M, o, f\rangle$ hármast akkor nevezünk Dedekind–Peano-struktúrának (röviden DP-struktúrának), ha (i) M halmaz és $o \in M$, (ii) $f : M \longrightarrow M$ injektív függvény, (iii) minden $m \in M$ esetén $f(m) \neq o$, és (iv) minden $E \subseteq M$ esetén teljesül, hogy

$$(o \in E \;\&\; (\forall z \in M)(z \in E \Rightarrow f(z) \in E)) \Rightarrow E = M.$$

Az utolsó, indukciós kikötés a természetes számok „minta” DP-struktúrája esetében azt mondja: ha azt akarjuk bizonyítani, hogy egy adott tulajdonsággal minden természetes szám rendelkezik, akkor „elég” azt igazolni, hogy

(i) a nulla ilyen tulajdonságú, továbbá, hogy (ii) bármely n számra teljesül: ha n rendelkezik az adott tulajdonsággal, akkor $n+1$ is.

A klasszikus halmazelméletben persze minden objektum „konkrét”, azaz az elemei által – és nem valamiféle struktúrában elfoglalt pozícióján keresztül – meghatározott. Így a halmazelmélettel foglalkozó szakkönyvek általában kitűntetnek egy „konkrét” DP-struktúrát (leggyakrabban a Neumann- vagy a Zermelo-félét), bevezetik rá az $\langle \mathbb{N}, s, 0 \rangle$ jelölést, majd igazolják, hogy akármilyen DP-struktúrát ad meg az ellenség, az „lényegében” megegyezik a kiválasztott szerencséssel. Ezt „lényegi egyezést” természetesen a kategóriaelméleti izomorfizmusfogalom is megragadja. Lássuk, hogyan!

Nevezzük *Peano-kategóriának* (és jelöljük $\mathcal{P}$-vel) azt a kategóriát, amelynek objektumai olyan $\langle E, e, f \rangle$ rendezett hármasok, amelyekben E egy halmaz, $e \in E$, f pedig egy $E \longrightarrow E$ függvény. A Peano-kategória nyilait a következőképpen értelmezzük: az $\langle E_1, e_1, f_1 \rangle$ objektumból a $\langle E_2, e_2, f_2 \rangle$ objektumba érkező nyilak olyan $g : E_1 \longrightarrow E_2$ függvények, amelyek megtartják a kitűntetett elemet, azaz $g(e_1) = g(e_2)$, és teljesül rájuk, hogy $g \circ f_1 = f_2 \circ g$, azaz $f_1(g(x)) = g(f_2(x)$ minden $x \in E$ esetén, vagy ami ugyanaz: a

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_1"'] & E_2 \arrow[d, "f_2"] \\
E_1 \arrow[r, "g"'] & E_2
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. A Peano-kategória tehát speciális algebrai kategória: objektumai olyan algebrai struktúrák, amelyeknek két művelete van, egy null- és egy egyváltozós, a nyilak pedig művelettartó függvények, azaz homomorfizmusok. Akad szerző, aki a Peano-kategória objektumait *Dedekind-algebráknak* nevezi.

Ellenőrizzük, hogy valóban kategóriát kaptunk-e! Az 1-nyilaknak megfelelnek az egyszerű identitások, ha pedig a g_1 nyíl az $\langle E_1, e_1, f_1 \rangle$ objektumból a $\langle E_2, e_2, f_2 \rangle$ objektumba, a g_2 nyíl pedig $\langle E_2, e_2, f_2 \rangle$ objektumból a $\langle E_3, e_3, f_3 \rangle$ objektumba érkezik, akkor $g_2 \circ g_1$ megfelel a kompozíciónak: $g_2 \circ g_1(e_1) = g_2(g_1(e_1)) = g_2(e_2) = e_3$ mutatja, hogy a kitűntetett elemek megtartásával nincs gond, a kompozíciós kikötés teljesüléséhez pedig elég a következő ábrát szemügyre venni:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & E_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & E_3 \arrow[d, "f_2"] \\
E_1 \arrow[r, "g_1"'] & E_2 \arrow[r, "g_2"'] & E_3
\end{tikzcd}$$

Mivel mindkét négyzet kommutatív, a téglalap is az:

$$\begin{aligned}(g_2 \circ g_1) \circ f_1 = g_2 \circ (g_1 \circ f_1) = g_2 \circ (f_2 \circ g_1) = \\ = (g_2 \circ f_2) \circ g_1 = (f_3 \circ g_2) \circ g_1 = f_3 \circ (g_2 \circ g_1)\end{aligned}$$

Mindezen előkészületek után lássuk a medvét:

2.7.1. Tétel. *A Peano-kategóriában minden DP-struktúra iniciális objektum.*

Bizonyítás: Legyen $\langle E, e, f\rangle$ a Peano-kategória tetszőleges objektuma, $\langle D, d, h\rangle$ pedig egy DP-struktúra. Azt kell igazolnunk, hogy a Peano-kategóriában pontosan egy $g : \langle D, d, h\rangle \longrightarrow \langle E, e, f\rangle$ nyíl létezik. Ha egyáltalán létezik, a g nyíl olyan $D \longrightarrow E$ függvény, amelyre $g(d) = e$, és $g \circ h = f \circ g$, azaz amellyel a

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[d, "g"] \\ E \arrow[r, "f"'] & E \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. A g függvény – definíció szerint – egy $\langle D, E, R_g\rangle$ rendezett hármas, amelynek harmadik tagja egy $R_g \subseteq D \times E$ függvényszerű reláció. A tétel bizonyításához ennélfogva elegendő, ha a megfelelő tulajdonságú R_g létezését igazoljuk.

Vezessük be a következő jelöléseket. Ha S egy reláció (olyan halmaz, amelynek minden eleme rendezett pár), akkor D_S legyen az S-beli rendezet párok első tagjainak, I_S pedig a második tagjainak a halmaza. Ha S függvényszerű reláció és $x \in D_S$, akkor azt az (egyetlen) y-t, amellyel $\langle x, y\rangle \in S$, jelölje Sx.

Értelmezzünk most egy $\mathbf{G}$ halmazt a következőképpen: $\mathbf{G}$ elemei olyan R függvényszerű relációk, amelyekre teljesül, hogy $D_R \subseteq D$, $I_R \subseteq E$, $d \in D_R$, $\langle d, e\rangle \in R$ és minden $x \in D$ esetén: ha $h(x) \in D_R$, akkor $x \in D_R$ és $R(d(x)) = f(R(n))$. Bebizonyítjuk, hogy $\mathbf{G}$ egyelemű halmaz – egyetlen eleme pedig éppen az általunk keresett g függvényt megadó R_g reláció.

(i) Első lépésként belátjuk, hogy $\mathbf{G}$ tetszőleges S és S' eleme, illetve $x \in D$ esetén teljesül, hogy ha $x \in D_S \cap D_{S'}$, akkor $S(x) = S'(x)$. Legyen $X \subseteq D$ a D halmaz azon elemeinek részhalmaza, amelyekre fennáll, hogy tetszőleges $S, S' \in \mathbf{G}$ esetén ha $x \in D_S \cap D_{S'}$, akkor $S(x) = S'(x)$; azt kell igazolnunk, hogy $X = D$. Most kihasználjuk, hogy $\langle D, d, h\rangle$ DP-struktúra. Az világos, hogy $d \in X$, elvégre $\mathbf{G}$ minden P elemére teljesül, hogy $\langle d, e\rangle \in P$. Belátjuk, hogy tetszőleges $y \in D$ esetén igaz, hogy amennyiben $y \in X$, úgy $h(y) \in X$. Tegyük fel tehát, hogy $y \in X$. Mivel S és S' egyaránt $\mathbf{G}$ eleme, azért – $\mathbf{G}$ definíciója szerint – $h(y) \in D_S$ és $h(y) \in D_{S'}$, továbbá

$$\begin{aligned} S(hy) &= f(S(y)) = && \text{mivel } S \in \mathbf{G} \\ &= f(S'(y)) = && \text{mivel } S(y) = S'(y) \\ &= S'(hy) && \text{mivel } S' \in \mathbf{G} \end{aligned}$$

Eszerint tehát $h(y) \in X$, az indukciós konklúzió szerint $X = D$.

(ii) Ezek szerint tehát a $\mathbf{G}$ halmaz elemei között legfeljebb egy olyan reláció lehet, amely egy $D \longrightarrow E$ függvényt ad meg. Elegendő tehát igazolni, hogy van legalább egy ilyen reláció. Értelmezzünk egy $R^* \subseteq D \times E$ relációt a következőképpen: R^* elemei olyan $\langle x, y \rangle$ rendezett párok, amelyekre teljesül, hogy valamely $S \in \mathbf{G}$ esetén $x \in D_S$ és $S(x) = y$. (Könnyen belátható, hogy R^* az $\cup\mathbf{G}$ unióhalmaz.) Az így definiált R^* reláció függvényszerű: ha $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in R^*$, akkor vannak olyan $S, S' \in \mathbf{G}$ függvényszerű relációk, amelyekkel $\langle x, y \rangle \in S$ és $\langle x, y' \rangle \in S'$, de az (i) pontban belátott összefüggés szerint ekkor $y = y'$. A $\mathbf{G}$ halmaz definíciója alapján nyilvánvaló az is, hogy $R^* \in \mathbf{G}$.

(iii) Annak igazolása maradt csak hátra, hogy $D_{R^*} = D$. Ha ez is sikerül, akkor az R^* reláció megfelel R_g-nek. Újra az indukció sémájához folyamodunk. Már tudjuk, hogy $\langle d, e \rangle \in R^*$. Ha pedig valamely $\langle x, y \rangle \in R^*$, az annyit tesz: van olyan $S \in \mathbf{G}$, hogy $x \in D_S$ és $S(x) = y$. Ekkor – mint az könnyen igazolható – fennáll $S \cup \{\langle d(x), f(S(x)) \rangle\} \in \mathbf{G}$ is, azaz ha $x \in D_{R^*}$, akkor $d(x) \in D_{R^*}$. ♡

Terítsük ki a lapjainkat: amit beláttunk, nem más, mint az *iterációs tétel,* amely a konkrét $\langle \mathbb{N}, 0, s \rangle$ DP-struktúrára megfogalmazva így szól: ha E egy halmaz, e az E halmaz egy tetszőleges eleme, h pedig egy $E \longrightarrow E$ függvény, akkor pontosan egy olyan $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ függvény létezik, amelyre $f(0) = e$ és tetszőleges n szám esetén $f(n+1) = h(f(n))$. Világos, hogy $f(1)$ csak $h(f(0)) = h(e)$, $f(2)$ csak $h(f(1)) = h(h(e))$ lehet, és így tovább... Tételünk szerint a „csak ... lehet" és az „és így tovább..." fordulatok valóban megállják a helyüket.

A szokásos tárgyalásban az iterációs tételre hivatkozunk akkor is, amikor belátjuk, hogy bármely két DP-struktúra izomorf (méghozzá éppen a Penao-kategóriabeli izomorfizmus értelmében). Erre már nincs szükségünk: ha egy kategóriában vannak iniciális objektumok, akkor azok mind izomorfak egymással, mi több: bármelyik kettő között *pontosan egy* izo nyílpár halad.

A tétel bizonyítása alapján nyilvánvaló: az „iteráló" függvény létezésének igazolásához többször is [pontosan hányszor?] az indukciós sémára kellett hivatkoznunk. A képlet – kissé leegyszerűsítve – tehát így szól: *indukció* $\Rightarrow$ *iteráció.* Ennek a megfordítása is igaz. A kategóriaelmélet terminológiája szerint az *iteráció* $\Rightarrow$ *indukció* állítás éppen a

2.7.2. Tétel. *A Peano-kategória minden iniciális objektuma DP-struktúra.*

Bizonyítás: Legyen $\langle E, e, f \rangle$ a Peano-kategória egy iniciális objektuma. Legyen e' olyan halmaz, amelyre teljesül, hogy $e' \notin E$; legyen továbbá $E' = E \cup \{e'\}$; jelölje továbbá az $1_{E'}|_E : E \longrightarrow E'$ függvényt i. Tekintsük most azt a $k : E' \longrightarrow E$ függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya:

$$k(x) = \begin{cases} e, & \text{ha } x = e', \text{ és} \\ fx & \text{máskor} \end{cases}$$

Az i függvény az E halmaz elemeit helyben hagyja, minek következtében $k \circ i = f$. Legyen $f' = i \circ k$; mivel $e' \in E'$ és f' egy E'-n értelmezett, E'-be érkező függvény, az $\langle E', e', f' \rangle$ hármas szintén a $\mathcal{P}$ kategória egy objektuma. A k függvény megad egy $\mathcal{P}$-beli $\langle E', e', f' \rangle \longrightarrow \langle E', e', f' \rangle$ nyilat: ehhez csak azt kell észrevenni, hogy $k(e') = e$ és hogy $k \circ f' = k \circ i \circ k = f \circ k$.

Mivel $\langle E, e, f \rangle$ iniciális objektum, létezik pontosan egy $h : \langle E, e, f \rangle \longrightarrow \langle E', e', f' \rangle$ nyíl. A $k \circ h : \langle E, e, f \rangle \longrightarrow \langle E, e, f \rangle$ nyíl – mivel $\langle E, e, f \rangle$ iniciális objektum – csak az $\langle E, e, f \rangle$ objektum 1-nyila lehet, minek következtében $k \circ h = 1_E$.

Mivel tetszőleges $x \in E$ esetén $h(fx) = f'(hx) = i(k(hx)) = i(x) = x$, azért $h \circ f = 1_E$.

Ennyi előkészület után már nem lesz nehéz igazolni, hogy $\langle E, e, f \rangle$ valóban DP-struktúra.

(i) Nincs olyan $x \in E$, amelyre $fx = e$. Ha ugyanis egy $x \in E$ esetén $fx = e$, akkor $he = h(fx) = x \in E$ lenne, holott tudjuk, hogy $he = e'$.

(ii) Ha $fx = fy$, akkor $h(fx) = h(fy)$, amiből – figyelembe véve, hogy $h \circ f = 1_E$ – azt kapjuk, hogy $x = y$, f tehát injektív.

(iii) Az indukciós séma igazolásához legyen $F \subseteq E$ olyan halmaz, hogy $e \in F$, és amelyre teljesül, hogy tetszőleges $x \in F$ esetén $fx \in F$, azaz $f(F) \subseteq F$. Világos, hogy ekkor $\langle F, e, f|_F \rangle$ is Peano-objektum. Mivel $\langle E, e, f \rangle$ iniciális objektum, létezik pontosan egy $h : \langle E, e, f \rangle \longrightarrow \langle F, e, f|_F \rangle$ nyíl.

Jelölje az $1_E|_F : F \longrightarrow E$ függvényt j; könnyen ellenőrizhető, hogy ez a függvény a $\mathcal{P}$ kategóriában egy $\langle F, e, f|_F \rangle \longrightarrow \langle E, e, f \rangle$ nyilat ad meg. A $j \circ h : \langle E, e, f \rangle \longrightarrow \langle E, e, f \rangle$ nyíl ekkor csak az $\langle E, e, f \rangle$ iniciális objektum 1-nyila lehet. Ekkor viszont tetszőleges $x \in E$ esetén $x = 1_E x = j(hx) = hx \in F$, azaz $E \subseteq F$. Figyelembe véve, hogy $F \subseteq E$ szintén fennáll, azt kapjuk, hogy $F = E$. ♡

A bizonyítás nem függ attól, hogy létezik-e Dedekind–Peano-struktúra. Tanulságos lehet ezért a következő, alternatív gondolatmenet is, amely a *par excellence* Dedekind–Peano-struktúra ($\langle \mathbb{N}, 0, s \rangle$) létezésén és azon alapul, hogy a Peano-kategóriában (mint minden kategóriában) bármely két iniciális objektum izomorf.

Alternatív bizonyítás: Legyen $\langle E, e, f \rangle$ a Peano-kategória egy iniciális objektuma. Mivel az $\langle \mathbb{N}, 0, s \rangle$ „minta DP-struktúra" szintén iniciális objektum, a kettő izomorf egymással. Ez azt jelenti, hogy létezik egy bijektív $h : \mathbb{N} \longrightarrow E$ függvény, amelyre teljesül, hogy $h(0) = e$ és $f \circ h = h \circ s$, és amelynek h^{-1} inverzére $h^{-1}(e) = 0$ és $h^{-1} \circ f = s \circ h^{-1}$. Mivel $e \in E$ és $f : E \longrightarrow E$ függvény, már csak azt kell belátnunk, hogy (i) f injektív, hogy (ii) $f(x) \neq e$ teszőleges $x \in E$ esetén, és hogy (iii) tetszőleges $X \subseteq E$ esetén, ha $e \in X$, és minden $x \in E$ esetén $fx \in E$, úgy $X = E$.

(i) Tegyük fel, hogy $fx = fy$. Akkor $h^{-1}(fx) = h^{-1}(fy)$, és így – mivel $h^{-1} \circ f = s \circ h^{-1}$ – azt kapjuk, hogy $s(h^{-1}(x)) = s(h^{-1}(y))$. Márpedig $s \circ h^{-1}$ egy injektív és egy bijektív függvény kompozíciója, és mint ilyen, injektív kell legyen, így aztán $x = y$.

(ii) Ha valamely $x \in E$ esetén $f(x) = e$, akkor $h^{-1}(fx) = h^{-1}(e) = 0$. Mivel azonban $h^{-1}(fx) = s(h^{-1}(x))$, azt kapjuk, hogy $s(h^{-1}(x)) = 0$, ami lehetetlen, hiszen $0 \notin \mathrm{Im}s$.

(iii) Tegyük fel, hogy az $X \subseteq E$ halmazra: $e \in X$, és minden $x \in X$ esetén $fx \in X$ is fennáll. Tekintsük az X halmaz $\mathbb{N}$-beli $X' = h^{-1}(X)$ képét; a bijektív h^{-1} inverze h, így $h(X') = X$. Mivel $e \in X$, azért $h^{-1}(e) = 0 \in \mathbb{N}$. Ha most $n \in X'$, akkor létezik $x \in X$, amellyel $n = h^{-1}(x)$. Ekkor $f(x) \in X$, és így $h^{-1}(fx) = s(h^{-1}(x)) = s(n) \in X'$ is fennáll. Azt kaptuk tehát, hogy ha $n \in X'$, akkor $s(n) \in X'$, méghozzá tetszőleges $n \in X'$ esetén. Eszerint – mivel $0 \in X'$ is fennáll – $X' = \mathbb{N}$. De akkor $X = h(X') = h(\mathbb{N}) = E$, hiszen h szürjektív (is). Összefoglalva: ha $e \in X$, és minden $x \in E$ esetén $fx \in E$, akkor $X = E$ – és éppen ezt kellett igazolnunk. ♡

Az *iteráció ⇒ indukció* séma második igazolásakor tehát kihasználtuk, hogy létezik *legalább egy* „konkrét" DP-struktúra. A Neumann-, vagy éppen a Zermelo-féle halmazelméleti természetesszám-modell „filozófiai jelentősége" éppen ebben áll: miután (bármelyiket) megkonstruáltuk, nyugodtan „eldönthetjük a létrát", és – amennyiben a strukturalizmus álláspontját tesszük magunkévá – mondhatjuk azt: *egy* természetesszám-struktúra nem más, mint a Peano-kategória egy iniciális objektuma. Igaz ugyan, hogy ez a „meghatározás" semmit nem mond arról, mik is „valójában" az egyes természetes számok – de egy hithű strukturalistának ez vajmi keveset számít, „a háromnak" szerinte semmilyen más megkülönböztető jellemzője nincs, mint hogy a számsorban a kettő után következik, azaz „ő" a nulla után a harmadik. A strukturalista meghatározásban ráadásul maga a természetesszám-struktúra is ilyen: csupán a tágabb keretben – a Peano-kategóriában – elfoglalt helye számít.

2.8. Topologikus struktúrák

A topologikus struktúrák (avagy, ahogy mondani szokás: a topologikus terek) az algebrai struktúrák és a rendezések mellett a matematika legalapvetőbb konstrukciói közé tartoznak. Mielőtt az általános definíciót megadnánk, célszerű néhány szót szólni a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának „természetes topológiájáról".

Azt mondjuk, hogy egy $E \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *nyílt,* ha E minden x eleme esetén megadható olyan ε pozitív valós szám, hogy $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq E$, azaz „$E$ minden elemének van olyan ε-környezete, amely részhalmaza E-nek". A nyílt

intervallumok[1] mind nyílt halmazok, sőt:
– $\mathbb{R}$ és $\varnothing$ is nyílt halamazok;
– akárhány nyílt halmazt adunk meg, azok unióhalmaza is nyílt; és
– véges sok nyílt halmaz metszethalmaza is nyílt.

A nyílt halmazok halmaza tehát az $\mathbb{R}$ halmaz $\wp\mathbb{R}$ hatványhalmazának egy részhalmaza.

A 3. pontban szereplő „véges sok" kitétel nem hagyható el: tekintsük ugyanis az $I_n =]0 - 1/n, 1 + 1/n[$ nyílt intervallumokat (ahol $n \in \mathbb{N}$). Ha ezek közül véges sokat kiválasztunk, és képezzük a metszetüket, akkor nyílt halmazt kapunk; az összes ilyen nyílt intervallum metszete viszont éppen a $[0, 1]$ zárt intervallum [lássuk be!], és egyetlen zárt intervallum sem nyílt halmaz.

2.8.1. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen zárt intervallum sem nyílt halmaz! [Útmutatás: tekintsük valamelyik végpont tetszőleges ε-környezetét!]

A motiváció tehát adott, az általánosítás a következő. *Topologikus térnek* nevezünk minden olyan $\langle E, \tau\rangle$ rendezett párt, amelyben E egy halmaz, τ pedig a $\wp E$ hatványhalmaz olyan részhalmaza, amelyre teljesül, hogy
– $E, \varnothing \in \tau$;
– tetszőlegesen sok τ-beli halmaz unióhalmaza is τ-beli;
– véges sok τ-beli halmaz metszete is τ-beli.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy τ meghatároz egy *topológiát* E-n. Az E halmazt az $\langle E, \tau\rangle$ topologikus tér alaphalmazának, E elemeit pedig általában „pontoknak" nevezzük.

Világos, hogy az $\mathbb{R}$ halmazon a nyílt részhalmazok megadnak egy topológiát. Tetszőleges E halmaz esetén $\langle E, \{\varnothing, E\}\rangle$ és $\langle E, \wp E\rangle$ topologikus tér; az előbbit *triviálisnak,* az utóbbit *diszkrétnek* nevezzük.

A $\wp\mathbb{N}$ halmaz egy X részhalmazát fölfelé zártnak nevezzük, ha tetszőleges $x \in X$ és $y \in \mathbb{N}$ esetén $x \leq y \Rightarrow y \in X$. Jelölje az $\mathbb{N}$ halmaz fölfelé zárt részhalmazainak halmazát $\tau_{\mathbb{N}}$, belátható, hogy $\langle N, \tau_{\mathbb{N}}\rangle$ ugyancsak topologikus tér.

2.8.2. Az utóbbi példa általánosítható. Ha $\langle E, \leq\rangle$ előrendezés, akkor E „fölfelé zárt" részhalmazai – vagyis azok az $E' \subseteq E$ halmazok, amelyekre teljesül, hogy tetszőleges $x \in E'$ és $y \in E$ esetén $x \leq y \Rightarrow y \in E'$ – megadnak egy topológiát E-n. Bizonyítsuk be, hogy valóban ez a helyzet!

A topologikus terek is tekinthetők egy kategória objektumainak, ebben a kategóriában a nyilak a *folytonos függvények.*

[1] Azaz a $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ alakú halmazok; a zárt intervallumok az $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ alakú halmazok.

Ha valaki esetleg elfelejtette volna a gyönyörű definíciót, most emlékeztetjük rá. Egy $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonosnak nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy $f(]a-\delta, a+\delta[) \subseteq]fa-\varepsilon, fa+\varepsilon[$. Az f függvény folytonos, ha minden $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.

Az $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ elemi függvények jó része folytonos: ilyenek a hatványfüggvények, az exponenciális függvények, de a sin és a cos is.

Az általános folytonosságfogalomhoz szükségünk van egy halmaz környezetének definíciójára. Legyen $\langle E, \tau\rangle$ topologikus tér, legyen továbbá $X \subseteq E$ halmaz. Azt mondjuk, hogy az X' halmaz X egy környezete, ha van olyan X-et tartalmazó $O \in \tau$ nyílt halmaz, amely része X'-nek. Ha $a \in E$, akkor az egyelemű $\{a\}$ halmaz környezeteit egyszerűen a környezeteinek nevezzük.

Legyen most $\langle E_1, \tau_1\rangle$ és $\langle E_2, \tau_2\rangle$ két topologikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : E_1 \longrightarrow E_2$ függvény az $a \in E_1$ pontban folytonos, ha fa minden V' környezetéhez létezik a-nak olyan V környezete, hogy $f(V) \subseteq V'$. Az f függvény folytonos, ha értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

2.8.3. Mutassuk meg, hogy a valós számok „szokásos" topológiájában egy $a \in \mathbb{R}$ pontnak egy E halmaz pontosan akkor környezete, ha van olyan $r > 0$ valós szám, amellyel fennáll, hogy $]a-r, a+r[\subseteq E$. Ezután már könnyen igazolható, hogy az $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényekre értelmezett „speciális" folytonosságfogalom valóban az általános meghatározás speciális esete.

2.8.4. Igazoljuk, hogy ha $\langle E_1, \tau_1\rangle$ és $\langle E_2, \tau_2\rangle$ topologikus terek, akkor egy $f : E_1 \longrightarrow E_2$ függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $O' \in \tau_2$ nyílt halmaz $\overset{-1}{f}(O')$ inverz képe is nyílt (azaz τ_1 eleme).

Ahhoz, hogy a topologikus terek a folytonos függvényekkel valóban kategóriát alkossanak, „mindössze" két dolognak kell teljesülnie:

– tetszőleges $\langle E, \tau\rangle$ topologikus tér esetén az $1_E : E \longrightarrow E$ identikus függvény folytonos;

– ha $\langle E_1, \tau_1\rangle$, $\langle E_2, \tau_2\rangle$, $\langle E_3, \tau_3\rangle$ topologikus terek, $f : E_1 \longrightarrow E_2$ és $f' : E_2 \longrightarrow E_3$ pedig folytonos függvények, akkor $f' \circ f : E_1 \longrightarrow E_3$ is folytonos függvény.

Az első igazolása nem jelent különösebb nehézséget, de a második sem. Legyen ugyanis $a \in E_1$; V'' pedig az $f' \circ f(a)$ pont egy környezete. Mivel f' folytonos, az fa pontnak van olyan V' környezete, amelyre igaz, hogy $f'(V') \subseteq V''$. Mivel azonban f is folytonos, az fa pont V' környezetéhez létezik a-nak olyan V környezete, amelyre igaz, hogy $f(V) \subseteq V'$. Az utóbbi összefüggésből viszont $f'(f(V)) \subseteq f'(V') \subseteq V''$, azaz $f' \circ f(V) \subseteq V''$ – ezzel igazoltuk, hogy $f' \circ f$ folytonos az a pontban.

A topologikus terek – Top-pal jelölt – kategóriájában az üres halmaz (az üres topológiával) iniciális, az egyelemű halmazok a maguk – szükségképpen diszkrét – topológiájával pedig terminális objektumok. Az izo nyilak azok a folytonos bijekciók, amelyeknek az inverze is folytonos. Ahogy a monoton bijekciók inverze sem feltétlenül monoton, egy folytonos bijekció inverze sem feltétlenül folytonos. Ha például a $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle$ és a $\langle \mathbb{R}, \tau' \rangle$ topologikus terekben τ a diszkrét, τ' pedig a triviális topológia, akkor az $1_{\mathbb{R}}$ függvény megteszi $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle \longrightarrow \langle \mathbb{R}, \tau' \rangle$ nyílnak, az ellenkező irányban viszont nem folytonos, így $\langle \mathbb{R}, \tau' \rangle \longrightarrow \langle \mathbb{R}, \tau \rangle$ nyílnak nem felel meg. [Igazoljuk!]

2.9. Megszámlálhatóköznevek, anyagnevek

A matematikai példák után lássunk most két konkrétabb, lingvisztikai–szemantikai kategóriatípust.

A köznevek egy részére jellemző, hogy alkalmazhatóak rájuk a szokásos logikai kvantorok (létezik egy..., minden ... esetén), és értelmesek a velük képzett némelyik ..., az egy ..., két ... stb. fordulatok. Hogy csak néhányat mondjunk: anya, apa, gyerek, feleség, politikus, tolvaj, kutya, háziállat, állat. Az ilyen főneveket megszámlálható közneveknek nevezzük, és CN-ként hivatkozunk rájuk[1]. A köznevek egy másik csoportjára az iméntiek nem igaza: ritkán mondunk olyat, hogy „két liszt", vagy „három víz". Az utóbbi esetekben ugyanis anyagnevekről van szó – ezekre az MN jelölést[2] vezetjük be.

A CN-ek és az MN-ek nem csupán annak alapján különböztethetők meg, hogy az iménti fordulatok értelmesek-e rájuk, vagy sem. Ha például két liter vizet összeöntünk, akkor az így keletkező „kumulátumot" teljes joggal nevezhetjük víznek, két cica „együttese" azonban nem cica (hanem két cica). Ezt (kicsit fellengzősen) úgy is fogalmazhatjuk: az MN-ek referenciája kumulatív, a CN-eké viszont nem.

Nem állítjuk természetesen, hogy a fentiek a CN-ek, illetve az MN-ek kimerítő meghatározását nyújtják. Könyvünk célkitűzéseit tekintve a precíz definícióknál (ha egyáltalán léteznek ilyenek) fontosabb, hogy mind a CN-ek, mind az MN-ek kategóriát alkotnak.

A megszámlálható köznevek kategóriája

Egy CN-kategória objektumai (természetesen) CN-ek, nyilait pedig a következőképpen értelmezzük. Ha C_1 és C_2 egyaránt CN-ek, akkor $C_1 \longrightarrow C_2$ azt a tényállást rögzíti, hogy „minden, ami C_1, az C_2. Világos, hogy tetszőges C objektum esetén $C \longrightarrow C$, elvégre „ami kutya, az kutya". Az asszociativitás nyilvánvalóan teljesül: ha például „minden, ami kutya, az állat", és „minden,

[1] Az angol *count noun* rövidítése.
[2] Az angol *mass noun* rövidítése.

ami állat, az élőlény", akkor „minden, ami kutya, az élőlény".

Hangsúlyozzuk: nem az összes CN kategóriájáról beszélünk (kétséges, hogy ilyen egyáltalán „létezik-e"). Inkább azt mondhatnánk: egy CN-kategória egy adott kontextusban szereplő individuumok egyfajta felosztását jelenti – filozofikusabb hangulatban nevezhetnénk ezt a kategóriát a kontextus ontológiai keretének is.

A CN-ek számos tekintetben megkerülhetetlenek. Egy CN nélkül például gyakorlatilag lehetetlen egy individuum „beazonosítása". Ha rámutatunk valamire, és azt mondjuk: *ez,* akkor az esetek egy jó részében kétséges, hogy sikerült-e egyértelműen jeleznünk, mire (vagy kire) is gondolunk. Ha azonban azt mondjuk: *ez a cica* (és közben valóban egy cicára mutatunk) akkor senki nem fog – ad absurdum – a cica farkára gondolni.

A CN-ek kategóriája a tulajdonnevek elsajátításában is fontos szerepet játszik. Ha egy kutyára mutatva azt mondom: ez Bobi, akkor esetleg valaki leledzhet abban a tévedésben is, hogy egy bizonyos alakot vagy színt nevezek Bobinak. Ha viszont kijelentem: ez a kutya Bobi, akkor mindjárt egyértelműbb a helyzet.

A CN-kategóriák jelentőségét mutatja az is, hogy a természetes nyelv predikátumai általában egy-egy *fajtán* értelmezettek, nem pedig valamiféle általános entitásfogalmon. [A fajták kategóriáját is hamarosan értelmezzük; ennek a kategóriának az objektumaira mint a CN-ek „interpretácóira" fogunk hivatkozni.] A „fehér" például meglehetősen mást jelent, ha emberekre vagy ha egerekre értelmezzük; egy magas férfi nem feltétlenül magas kosárlabdázó, ahogy egy „jó" tolvaj sem feltétlenül „jó" apa vagy „jó" politikus, és még sorolhatnánk a példákat. Nem ez a helyzet a klasszikus első- vagy éppen másodrendű logika esetében: a tárgyalási univerzum elemei itt „puszta" dolgok – és éppenséggel ez a „pusztaság" az, ami problematikus.

Az előbbivel szoros összefüggésben van a CN-ek szerepe egy adott kontextus „entitásainak" megszámlálásában. Ha például arra kérünk valakit, számolja meg az íróasztalunkon található „objektumokat", akkor az illető számos problémával szembesülhet: a számítógép billentyűzete egy tárgynak számít-e, vagy a billentyűket is külön-külön sorra kell vennie, és hasonló kérdés merülhet fel a pendrive-unk kupakja esetében is. Ha viszont adott a kontextus „ontológiai keretelméletét" nyújtó CN-kategória, amely rögzíti, hogy melyek számlálás során figyelembe veendő fajták, akkor egyszersmind egy (kontextusfüggő) „entitásfogalmat" is megadhatunk (a technikai részletekre egy későbbi fejezetben térünk vissza), így a számlálás is egyértelművé válik.

Ha a szemantikai-filozófiai finomságoktól eltekintünk, akkor egy CN-kategória meglehetősen egyszerű: teljesül ugyanis, hogy bármely két objektum között legfeljebb egy nyíl halad. Ez pedig – mint emlékszünk – az előrendezések kategóriájának megkülönböztető jellemzője, a CN-kategóriák tehát egytől-egyig „előrendezés-kategóriák".

Az anyagnevek kategóriája

„Ami vas, az vas", ha „ami réz az színesfém", és „ami színesfém, az fém", akkor „ami réz, az fém": ezek a példák jelzik, miként értelmezhető MN-ek egy tetszőleges összességén egy kategória.

Mondanunk sem kell: az MN-kategóriák – a CN-kategóriákhoz hasonlóan – előrendezés-kategóriák.

A CN- és az MN-kategóriák között intim viszony ál fenn. Egy anyagnév esetében általában nem értelmes többes számot alkalmazni: ha „vasakról" beszélünk, akkor általában vas*darabokra* gondolunk, nem az anyagnév „többesére". A CN-ek esetében természetesen képezhető a többes szám – és ami igazán érdekes, így az anyagnevekre sokban emlékeztető struktúrát kapunk. A többes számban álló CN-ek referenciája ugyanis már „kumulatív": cicák két „összességének" együttesére még mindig teljes joggal hivatkozhatunk így: „cicák". Egy CN-kategória objektumainak többes számai (az eredeti kategória nyilaival) tehát egy MN-szerű kategóriát alkotnak.

Megfordítva: ha egy MN-kategória minden objektuma elé az egy darab/egy adag/egy maroknyi stb. kitételt illesztjük, akkor (ugyanazokkal a nyilakkal) egy új kategóriát kapunk, amely meglehetősen CN-szerű: elvégre nyugodtan beszélhetünk „két darab vasról" vagy „minden csepp vízről".

2.10. Propozicionális logika

Számos logikai struktúra természetes módon tekinthető kategóriának. A kategóriaelméleti nézőpont ezekben is új általánosításokat mutat meg.

A propozicionális logika négy alapvető konnektívum, a negáció ($\neg$), a konjunkció (&), az alternáció ($\vee$) és a kondicionális ($\supset$), valamint két logikai „mondatkonstans", a falsum ($\perp$) és a verum ($\top$) elmélete. A propozicionális logikai rendszerek gazdag kategóriákat határoznak meg, amelyek a logikai konstansok strukturalista elméletének alapjául (is) szolgálnak.

Grammatika

A grammatikai szabályok végső célja a legfontosabb grammatikai kategóriának, a *mondatok* kategóriájának (induktív) definiálása. Az alapmondatok „szerkezet nélküli", tovább nem elemezhető objektumok, az ilyen mondatokat jelölik a mondatbetűk. Egy propozicionális logikai nyelv megadása ennélfogva a *mondatbetűk* megadását jelenti.

A propozicionális logika nyelvének logikai konstansai (a zárójelek mellett) a következők:

$$\perp, \neg, \supset, \vee, \&.$$

A $\perp$ a „mindig hamis" mondat, amely – ha úgy tetszik – „nulla-argumentumú" konnektívum. A $\perp$ természetesen definiálható is: tetszőleges $\mathfrak{m}$ mondatbetű esetén $\mathfrak{m} \,\&\, \neg\mathfrak{m}$ megteszi $\perp$-nak, $\neg\perp$ pedig $\top$-nak ($\top$ a *verum,* a „konstans igaz" mondat). Hogy a definíció egyértelmű legyen, megegyezhetünk például abban, hogy $\perp$-ot a mondatbetűk (valamiképpen sorbarendezett) halmaza első eleme segítségével definiáljuk. Így a „magábanvaló hamis" nyelvfüggővé válik, minden nyelvnek meglesz a maga hamissága. Ez persze csak látszólagos: könnyen igazolható, hogy az így definiált mondatra minden nyelvben ugyanazok a szabályok érvényesek. A $\perp$ logikai konstansként való értelmezés mellett ugyanakkor erős érv, hogy a negáció $\perp$ segítségével definiálható:

$$\neg A \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \quad A \supset \perp$$

Egy állítás hamis, ha feltevéséből ellentmondásra jutunk. A verum ekkor: $\top = \perp \supset \perp$.

A *mondatokat* a mondatbetűkből kapjuk a következő szabályok szerint: $\perp$ és a mondatbetűk mind mondatok, ha $\mathfrak{m}$ mondat, akkor mondat $\neg\mathfrak{m}$ is, ha $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$ mondatok, akkor $(\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n})$, $(\mathfrak{m} \vee \mathfrak{n})$ és $(\mathfrak{m} \,\&\, \mathfrak{n})$ is az. [Hosszabb mondatokban a legkülső zárójeleket gyakran elhagyjuk.] A mondatok jelölésére általában az $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ stb. szimbólumokat használjuk, a mondathalmazokat pedig általában görög nagybetűkkel (Γ, Δ stb.) jelöljük.

2.10.1. A nagy alfát és a nagy bétát erre a célra nemigen használjuk. Vajon miért?

Szintaxis

A szintaxis alapvető fogalma a *szintaktikai következményreláció*, azaz a *levezethetőség:* $\Gamma \vdash \mathfrak{m}$ jelöli azt, hogy az $\mathfrak{m}$ mondat a Γ mondathalmazból levezethető. A $\vdash$ reláció értelmezéséhez a következtetési szabályokat és az axiómasémákat kell rögzítenünk. Ha ezt megtettük, akkor $\Gamma \vdash \mathfrak{m}$ így definiálható: *létezik mondatoknak egy véges sorozata, amelynek minden tagja vagy Γ eleme, vagy egy axiómaséma behelyettesítése, vagy a sorozat előző tagjaiból valamely következtetési szabály alapján kapható meg – a sorozat utolsó tagja pedig* $\mathfrak{m}$. [Azt, hogy mi is „egy axiómséma", illetve „egy axiómaséma behelyettesítése", hamarosan megmondjuk.] Ha Γ üres halmaz, akkor csupán az axiómasémák behelyettesítéseit (a „logikai igazságokat" használhatjuk), az így levezetett mondatok a „származtatott" logikai igazságok. A definíció nem zárja ki, hogy egy levezetésben ugyanaz a mondat többször is szerepeljen. A gondolatmeneteket néha áttekinthetővé teszi, ha időnként összefoglaljuk, hol is tartunk, és ez igaz a „formális gondolatmenetekre”, azaz a levezetésekre is.

A következőkben a *klasszikus* és az *intuicionista propozicionális logika* – Hilbert–Frege-stílusú kalkuluson alapuló – szintaktikai következményrelációját értelmezzük. Sorra vesszük a konnektívumokat, és mindegyiküknél megadjuk a rájuk vonatkozó alapvető következtetési szabályokat, illetve a szabályoknak megfelelő axiómasémákat.

Feltételezhető, hogy az Olvasó az intuicionista logikával még nemigen találkozott. Ehelyütt jegyezzünk meg annyit, hogy a Jan Luitzen Egbertus Brouwer holland matematikus-filozófus nevéhez kapcsolható, a múlt század elején színre lépett intuicionizmus fő tézise a kizárt harmadik elve általános érvényének kétségbevonása. Egy logikai rendszerben érvényes a kizárt harmadik törvénye, ha az

$$A \vee \neg A$$

mondat tetszőleges A mondat esetén „logikai igazság”. Brouwer is elismeri, hogy a kizárt harmadik a véges összességekre vonatkozó állítások esetében érvényes, kétségbe vonja azonban, hogy érvényessége állítások tetszőleges körére kiterjeszthető.

A kizárt harmadik törvénye az intuicionista logika igazságértelmezése miatt válik érvénytelenné. Az intuicionisták ugyanis nem fogadják el a klasszikus, „platonista” igazságfogalmat, amely szerint az, hogy egy mondat igaz-e, vagy sem, „tőlünk” függetlenül dől el. Az intuicionisták szerint ugyanis egy mondat „csak akkor” igaz, ha igazsága számunkra – és nem csupán egy mindent tudó magasabbrendű elme számára – is nyilvánvaló. A matematikában ilyen bizonyossággal a bizonyítások szolgálnak: egy mondat „számunkra” is igaz, ha bebizonyítottuk, azaz kétségbevonhatatlanul igaz alapfeltevésekből véges számú, kétségbevonhatatlanul érvényes lépésben levezettük, és hamis, ha beláttuk, hogy nem fér össze alapvető posztulátumainkkal, azaz feltevése ellentmondáshoz vezet. Világos, hogy ha m nem bizonyított és nem is cáfolt, akkor – az „igaz” és a „hamis” ilyen értelmezése szerint – nem igaz, és nem is hamis. Ha mindezeken felül azt mondjuk: egy $\neg A$ negáció igazolása azt jelenti, hogy A-ból ellentmondást vezettünk le (a $\neg A = A \supset \bot$ definíció is ezt sugallja), valamint, hogy egy alternáció csak akkor igaz, ha legalább az egyik tagja igaz (az „erős értelemben”), akkor (az iménti m-mel) nem igaz az $m \vee \neg m$ mondat sem.

A kondicionálisok intuitív értelmezése a következő: az $A \rightarrow B$ kondicionális igaz, amennyiben A tetszőleges bizonyítása alapján megadható B egy bizonyítása. Figyeljünk fel rá, hogy eszerint a kondicionálisok „valójában” univerzális állítások, amelyek „azt mondják”: az előtag *minden* levezetése átalakítható az utótag egy levezetésévé.

Az alábbiakban mind a négy konstanra vonatkozóan magadjuk a következtetési szabályokat, illetve az ezeknek „megfelelő” sémákat. A klasszikus logikában nem kell valamennyi konnnektívumot definiálatlannak tekintenünk, elvégre – például – az alternáció és a konjunkció „kifejezhető” a negáció és a kondicionális segítségével. Az intuicionista logikában ez nem igaz, ebben a logikai rendszerben a konnektívumok „függetlenek” egymástól.

Kondicionális

A kondicionálisra vonatkozó két alapvető szabály a *modus ponens* és a *dedukciótétel:* ha Γ mondatok egy halmaza, A és B pedig mondatok, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$ és $\Gamma \vdash A$ esetén fennáll $\Gamma \vdash B$ is, továbbá ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$. Ha tehát egy premisszahalmazból le tudjuk vezetni A-t és az $A \supset B$ kondicionálist is, akkor – ugyanebből a premisszahalmazból – le tudjuk vezetni B-t is; ha pedig premisszák egy Γ halmazából és az A mondatból levezettük B-t, akkor ezzel megadtuk $A \supset B$ levezetését – egyedül a Γ premisszahalmaz alapján.

A modus ponens lesz kalkulusainkban az egyetlen következtetési szabály. Ha tehát tetszőleges A és B mondatok esetén egy levezetésben megjelenik A és $A \supset B$ is, akkor – természetesen utánuk – megjelenhet B is.

A deukciótétel érvényességéhez a következő két sémára van szükségünk:

$$A \supset (B \supset A) \tag{1}$$

és

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)). \tag{2}$$

Most, hogy már láttunk axiómasémákat, itt az ideje megmondani, mi egy axiómaséma behelyettesítése. Az (1) séma egy behelyettesítését kapjuk például, ha az A és a B helyébe egy-egy konkrét (azaz a mondatbetűkből és a $\perp$-ból az imént tárgyalt grammatikai szabályok alapján képzett, de nem feltétlenül különböző mondatot) helyettesítünk. Így ha m egy mondatbetű, akkor az $(m \,\&\, \neg m) \supset ((m \vee \neg m) \supset (m \,\&\, \neg m))$ mondat a (2) séma egy behelyettesítése (a séma „egy példánya”) , de ilyen a $\perp \supset (\perp \supset \perp)$ is. Ugyanígy értelmezzük az összes többi séma behelyettesítését is.

Mondatokat természetesen csak a sémabetűk (A, B, C) helyébe írhatunk; $\perp$ szerepét csak $\perp$ játszhatja el.[Természetesen létezik ennél precízebb meghatározás – az Olvasó is megpróbálkozhat egy ilyen megadásával –, de a továbbiakban nem lesz rá szükségünk.] Az axiómasémák behelyettesítéseit alkalmanként axiómáknak nevezzük.

2.10.1. Tétel. *Ha egy kalkulusban a modus ponens az egyetlen következtetési szabály, akkor* (1) *és* (2) *garantálja a dedukciótételt.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel ugyanis, hogy – adott Γ mondathalmaz, valamint m és n mondatok esetén – $\Gamma \cup \{m\} \vdash n$. Ekkor létezik mondatoknak egy olyan

$$\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_z \end{array}$$

véges sorzata, amelyben $k_z = n$, és amelynek minden tagja vagy
– axióma (azaz egy axiómaséma behelyettesítése), vagy
– $\Gamma \cup \{m\}$ eleme, vagy
– a sorozat két előző tagjából modus ponensszel következik.

Tekintsük most az iménti mondatsorozat alapján felírt

$$\begin{array}{c} m \supset k_1 \\ m \supset k_2 \\ \vdots \\ m \supset n \end{array}$$

sorozatot. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat – további tagok hozzávételével – levezetéssé alakítható, méghozzá az utolsó, $m \supset n$ mondat Γ-ból való levezetésévé.

Az, hogy mit kell még beillesztenünk $m \supset k_i$ elé, attól függ, hogy az eredeti levezetésben k_i honnan származik. Három eset lehetséges. (a) Ha az eredeti levezetésben szereplő k_i axióma, akkor $m \supset k_i$ is logikai igazság: modus ponensszel megkapható k_i és $k_i \supset (m \supset k_i)$ alapján (az utóbbi az (1) séma behelyettesítése). (b) Ha k_i a $\Gamma \cup \{m\}$ mondathalmaz eleme, akkor két eset lehetséges: (i) $k_1 \in \Gamma$ vagy (ii) $k_i = m$. (i) Ha $k_i \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash m \supset k_i$: itt megint elegendő az (1) sémára hivatkozni. (ii) Ha $k_i = m$, akkor $m \supset k_i = m \supset m$, az utóbbi azonban (1) és (2) alapján levezethető:

$$\begin{array}{l} (m \supset ((m \supset m) \supset m)) \supset ((m \supset (m \supset m)) \supset (m \supset m)) \\ (m \supset (m \supset m)) \\ (m \supset (m \supset m)) \supset (m \supset m) \\ (m \supset (m \supset m)) \\ (m \supset m) \end{array}$$

[A levezetés első sora a (2) axiómaséma, a második az (1) axiómaséma behelyettesítése; a harmadik sor az első kettőből modus ponensszel következik, a negyedik újra az (1) séma behelyettesítése; az ötödik pedig a harmadikból és a negyedikből kapható meg modus ponensszel. Ellenőrizzük!]

(c) Az eredeti levezetésbeli k_i mondatot modus ponessel a k_h és $k_h \supset k_i$ mondatokból kaptuk. Ebben az esetben a második mondatsorozatban – az $m \supset k_i$ előtt – szerepelniük kell az $m \supset k_h$ és a $m \supset (k_h \supset k_i)$ mondatoknak. Ekkor azonban a (2) behelyettesítéseként kapott

$$(m \supset (k_h \supset k_i)) \supset ((m \supset k_h) \supset (m \supset k_i))$$

axiómából a modus ponens kétszeri alkalmazásával éppen az $m \supset k_i$ mondatot kapjuk. ♡

2.10.2. Igazoljuk, hogy $A \supset B$ olyan mondat, amelyre teljesül, hogy (i) belőle és A-ból a B mondatra következtethetünk, és amely (ii) a „leggyengébb" olyan mondat, amelyre (i) teljesül, azaz tetszőleges C mondat esetén, amennyiben C-ből és A-ból következik B, úgy C-ből következik $A \supset B$ is! [A „leggyengébb" kitétel természetesen egy minimumot jelent – hamarosan látni fogjuk, milyen rendezés szerint. Az (i) és (ii) kitételeket tekinthetjük a kondicionális strukturalista meghatározásának.]

Alternáció

Az *alternációra* vonatkozó következtetési szabályok: (i) ha $\Gamma \vdash A$, akkor – tetszőleges B-vel – $\Gamma \vdash A \vee B$ és $\Gamma \vdash B \vee A$, és (ii) ha $\Gamma \vdash A \vee B$, $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ és $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$, akkor $\Gamma \vdash C$.

Ahhoz, hogy ezek a kalkuluson alapuló levezetés szerint is érvényesek legyenek, elegendő, ha rögzítjük az alábbi axiómasémákat:

$$A \supset (A \vee B) \tag{3}$$

$$A \supset (B \vee A), \tag{4}$$

$$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)) \tag{5}$$

Lássuk a szabályok igazolását. (i) Tegyük fel, hogy a Γ mondathalmazból levezethető az A mondat. Könnyen belátható: ha

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}$$

az A mondat egy levezetése a Γ premisszahalmazból, akkor

$$\begin{array}{l} \vdots \\ A \\ A \supset (A \vee B) \\ A \vee B \end{array}$$

megteszi az $A \vee B$ mondat egy levezetésének. Ha ugyanis az első levezetésben kizárólag Γ elemei, axiómasémák behelyettesítései, illetve két előző sorból modus ponensszel kapott mondatok állnak, akkor ez a második mondatsorozatra is áll: az utolsó előtti sor ugyanis egy axióma, az utolsó pedig az előző kettőből modus ponensszel kapható meg. Ha most nem a (3), hanem a (4) sémát alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy $\Gamma \vdash A$ fennállásából tetszőleges B mondat esetén $\Gamma \vdash B \vee A$ következik. Végül ha $\Gamma \vdash A \vee B$, $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ és $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$ egyaránt fennáll, akkor a két utóbbiból a dedukciótétel szerint

$\Gamma \vdash A \supset C$ és $\Gamma \vdash B \supset C$. Létezik tehát olyan

$$\begin{array}{l} \vdots \\ A \vee B \\ A \supset C \\ B \supset C \end{array}$$

mondatsorozat, amelyben a kipontozott helyeken kizárólag Γ elemei, axiómasémák behelyettesítései vagy két korábbi tagból modus ponensszel kapott mondatok állnak. Ekkor a

$$\begin{array}{l} \vdots \\ A \vee B \\ A \supset C \\ B \supset C \\ (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)) \\ (B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C) \\ (A \vee B) \supset C \\ C \end{array}$$

mondatsorozat (amelyben a kipontozott rész megegyezik az előbbi levezetés kipontozott részével) a C mondat egy Γ-ból való levezetése.

2.10.3. Ellenőrizzük, hogy valóban ez a helyzet!

2.10.4. Bizonyítsuk be, hogy $A \vee B$ olyan mondat, amelyre teljesül, hogy (i) tetszőleges C mondat esetén, amennyiben C-ből A és B is következik, úgy C következik az $A \vee B$ mondatból is, és (ii) a leggyengébb olyan mondat, amelyre (i) teljesül, azaz tetszőleges D mondat esetén, ha bármely C mondat, amely A-ból és B-ből is következik, következik D-ből is, akkor D-ből következik $A \vee B$! [Ezt tekinthetjük az alternáció strukturalista meghatározásának.]

Konjunkció

A *konjunkció* következtetési szabályai: (i) ha $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \,\&\, B$, valamint (ii) $\Gamma \cup \{A \,\&\, B\} \vdash A$ és $\Gamma \cup \{A \,\&\, B\} \vdash B$. Egy konjunkcióra – bizonyos premisszák alapján – akkor következtethetünk, ha – ugyanabból a premisszahalmazból – a konjunkció mindkét tagja következik; egy konjunkcióból bármelyik tagja következik.

Ahhoz, hogy ezek – ugyancsak mint levezetett sémák – a kalkulussal értelmezett $\vdash$ reláció szerint érvényben maradjanak, elegendő a következő három axiómaséma:

$$A \supset (B \supset (A \,\&\, B)), \tag{6}$$

$$(A \mathbin{\&} B) \supset A \tag{7}$$

és

$$(A \mathbin{\&} B) \supset B. \tag{8}$$

2.10.5. Vezessük le az &-szabályokat a (6)–(8) sémák és a dedukciótétel alapján.

2.10.6. Bizonyítsuk be, hogy $A \mathbin{\&} B$ olyan mondat, amelyből (i) az A és a B mondat egyaránt következik, továbbá amely (ii) a leggyengébb olyan mondat, amelyre (i) teljesül, azaz tetszőleges C mondat esetén, amennyiben C-ből A is és B is következik, úgy C-ből következik $A \vee B$ is! [Ezt tekinthetjük a konjunkció strukturalista meghatározásának.]

Negáció, falsum

A *negáció* – mint már említettük – értelmezhető $\perp$ alapján is: $\neg A$ ekkor per definitionem az $A \supset \perp$ mondat. A kondicionálisra vonatkozó szabályaink szerint így ha $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash \neg A$, akkor $\Gamma \vdash \perp$, illetve ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash \perp$, akkor $\Gamma \vdash \neg A$. Ekkor elegendő, ha a falsumra vonatkozóan egy egyszerű sémát rögzítünk:

$$\perp \supset A, \tag{F}$$

a falsumból tehát bármi következik. Ha a falsumot és a negációt egyaránt használjuk, akkor felvehetjük az

$$A \supset (\neg A \supset \perp)$$

sémát is. Ha pedig a falsum nem szerepel a logikai konstansaink között, akkor (F) helyett a következő két séma biztosítja a negáció „megfelelően" viselkedését.

$$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A) \tag{9}$$

és

$$\neg A \supset (A \supset B). \tag{10}$$

2.10.7. Igazoljuk, hogy a $\neg A$ mondat olyan, amelyre fennáll, hogy (i) a $\{A, \neg A\}$ premisszahalmazból bármely mondat következik, és amely (ii) a „leggyengébb" az (i) feltételnek eleget tevő mondatok között, azaz tetszőleges B mondat esetén, amennyiben az $\{A, B\}$ mondathalmazból bármely mondat következik, úgy B-ből következik $\neg A$ is! [Ez lenne a negáció strukturalista meghatározása.]

A $\vdash$ reláció

Az (1)-(10) vagy az (1)–(8), (F) sémák az intuicionista logika Frege–Hilbert-stílusú kalkulusának sémái. Ha ezekhez a sémákhoz hozzávesszük a kizárt harmadik érvényességét rögzítő

$$A \vee \neg A,$$

sémát, vagy a kettős tagadás

$$\neg\neg A \supset A$$

sémáját, akkor az így értelmezett szintaktikai következményreláció a klasszikus propozicionális logika szintaktikai következményrelációja.

Gyakran használjuk a *bikondicionálist* ($\Leftrightarrow$) is. A bikondicionális mind az intuicionista, mind a klasszikus logikában definiált logikai konstans:

$$A \equiv B \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad (A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$$

A propozicionális logika mint kategória

Ha adott az intuiconista propozicionális logika mondatainak egy halmaza a $\vdash$ relációval, akkor egyúttal egy kategóriát is értelmezhetünk. Az $\mathcal{L}_I$ kategória objektumai a mondatok; az m mondatból az n mondatba mutató nyilak pedig az $\{m\} \vdash n$ levezetések, azaz olyan véges mondatsorozatok, amelyeknek minden tagja vagy m, vagy az (1)-(10), vagy az (1)–(8), (F) axiómasémák behelyettesítése, vagy a sorozat két előbbi tagjából a modus ponens következtetési szabály alapján kapható meg – a sorozat utolsó tagja pedig n. Ha a kizárt harmadik sémájának alkalmazását is megengedjük, akkor a klasszikus logika kategóriaelméleti megfelelőjét kapjuk. [Jegyezzük meg: a dedukciótétel alapján az $\{m\} \vdash n$ levezetések az $m \supset n$ kondicionális – üres premisszahalmazból való – levezetéseivé alakíthatók.]

Ezzel valóban egy kategóriát adtunk meg. Az 1-nyilak a legegyszerűbb levezetések: ha x egy mondat, akkor x megteszi egy $\{x\} \vdash x$ levezetésnek. [Ellenőrizzük!] Ha $x \longrightarrow y$ és $y \longrightarrow z$, akkor létezik két véges mondatsorozat, amelyek közül az első az $\{x\} \vdash y$, a második az $\{y\} \vdash z$ fennállását igazolja. Ha most a két véges mondatsorozat tagjait egymás után leírjuk, akkor (mint az könnyen belátható) egy $\{x\} \vdash z$ levezetést kapunk. A nyilak kompozíciója tehát a szokásos módon értelmezhető, és nem jelent problémát az asszociativitás igazolása sem: ha három mondatsorozatot kell egymás után illesztenünk, akkor mindegy, hogy az első kettő után illesztjük a harmadikat, vagy az első után illesztjük a második és a harmadik összeillesztéséből (magyarul konkatenációjából) kapott mondatsorozatot.

Az $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ kategóriában két objektum között több nyíl is haladhat, elvégre egy mondatból egy másikat többféleképpen is levezethetünk. Ebben a kategóriában nincs sem terminális, sem iniciális objektum. Ha ugyanis az iniciális objektum szerepét bármi betölthetné, akkor az csak a falsum lehet, elvégre „hamis állításból bármi következik": ha $\mathfrak{m}$ egy mondat, akkor – mint az könnyen ellenőrizhető – az alábbi mondatsorozat azt igazolja, hogy $\{\perp\} \vdash \mathfrak{m}$:

$$\begin{array}{l} \perp \\ \perp \supset \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m} \end{array}$$

Ez azonban nem az egyetlen levezetés, elvégre a sorozatot – például – tetszőleges axióma tetszőleges behelyettesítésével bővíthetnénk, ami viszont azt jelenti: tetszőleges A mondat esetén létezik $\perp \longrightarrow A$ nyíl, csak éppen végtelen sok, nem pedig – mint azt az iniciális objektum definíciója megkövetelné – pontosan egy.

Hasonló sors vár a terminátor-esélyes verumra ($\top = \perp \supset \perp$ is. A

$$\begin{array}{l} (\perp \supset ((\perp \supset \perp) \supset \perp)) \supset ((\perp \supset (\perp \supset \perp)) \supset (\perp \supset \perp)) \\ (\perp \supset (\perp \supset \perp)) \\ (\perp \supset (\perp \supset \perp)) \supset (\perp \supset \perp) \\ (\perp \supset (\perp \supset \perp)) \\ (\perp \supset \perp) \end{array}$$

levezetés szerint $\top$ az üres premisszahalmzaból (és így tetszőleges $\mathfrak{m}$ mondatból is) levezethető. [A levezetés első sora a (2) axiómaséma, a második az (1) axiómaséma behelyettesítése; a harmadik sor az első kettőből modus ponensszel következik, a negyedik újra az (1) séma behelyettesítése; az ötödik pedig a harmadikból és a negyedikből kapható meg modus ponensszel. Ellenőrizzük! Déja vue?] De ez a levezetés is kényünk-kedvünk szerint bővíthető, így ugyanazt mondhatjuk, mint az iniciális objektum esetében: tetszőleges A mondat esetén létezik $A \longrightarrow \top$ nyíl, csak éppen végtelen sok, és nem – mint azt a terminátor definíciója megkövetelné – pontosan egy.

A probléma orovosolható. Tekintsük ugyanis azt az $\mathcal{L}_\mathrm{I}^*$ a kategóriát, amelynek objektumai ugyanazok, mint az $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ kategória objektuma (azaz a propozicionális logika mondatai), de a nyilakat másképp értelmezzük: az, hogy létezik $A \longrightarrow B$ nyíl, azt jelenti, hogy *létezik* $\{A\} \vdash B$ levezetés. Így – mint az könnyen ellenőrizhető – egy „előrendezés-kategóriát kapunk. Ennnél is fontosabb azonban, hogy az új nyíldefinícióval $\perp$ és $\top$ már valóban iniciális, illetve terminális objektum lesz. [Ha csak az számít, hogy létezik *legalább egy* levezetés, akkor hiába van ezer…]

Ha nem az intuicionista, hanem a klasszikus logika levezetésfogalmából indulunk ki, akkor a $\mathcal{L}_\mathrm{C}$, illetve $\mathcal{L}_\mathrm{C}^*$ kategóriákat kapjuk.

3. fejezet

Kategóriakonstrukciók

Ha adott egy (vagy több) kategória, akkor természetes módon értelmezhetünk további kategóriákat.

3.1. „A dualitás elve"

Idézzük fel a kategória definícióját. Egy kategória nyilak és objektumok olyan összessége, amelyre teljesül a következő négy állítás. (i) Minden f nyílhoz létezik pontosan egy $\mathrm{Dom}\, f$ és pontosan egy $\mathrm{Codom}\, f$ objektum, amelyekre teljesül, hogy az f nyíl $\mathrm{Dom}\, f$-ből indul és $\mathrm{Codom}\, f$-be érkezik. (ii) Ha az f és g nyilak olyanok, hogy $\mathrm{Codom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$, akkor egyértelműen létezik a $g \circ f$ kompozíció, amelyre teljesül, hogy $\mathrm{Dom}\,(g \circ f) = \mathrm{Dom}\, f$ és $\mathrm{Codom}\,(g \circ f) = \mathrm{Codom}\, g$. (iii) Minden A obejktumhoz létezik egy 1_A-nyíl, amelyre $\mathrm{Dom}\, 1_A = \mathrm{Codom}\, 1_A = A$, továbbá tetszőleges olyan g nyíl esetén, amelynél $\mathrm{Dom}\, g = A$, $1_A \circ g = g$, és tetszőleges olyan g' nyíl esetén, amelyre $\mathrm{Codom}\, g' = A$, $g' \circ 1_A = g'$. (iv) Tetszőleges f, g és h nyílak esetén, amennyiben létezik az $f \circ g$ és a $g \circ h$ kompozíció, akkor létezik az $(f \circ g) \circ h$ és az $f \circ (g \circ h)$ kompozíció is, és a két utóbbi egyenlő.

Végezzünk el most egy kísérletet a szövegszerkesztővel. Cseréljük le a négy állításban valamennyi Dom-ot Codom-ra és viszont, ezen felül írjuk valamennyi kompozíciót fordított sorrendben. Érdekes eredményre jutunk: az új állítások ugyanazt mondják. Ellenőrizzük ezt a (ii) esetében. Az említett cserékkel azt kapjuk: Ha az f és g nyilak olyanok, hogy $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Codom}\, g$, akkor egyértelműen létezik az $f \circ g$ kompozíció, amelyre teljesül, hogy $\mathrm{Codom}\,(f \circ g) = \mathrm{Codom}\, f$ és $\mathrm{Dom}\,(f \circ g) = \mathrm{Dom}\, g$. Ez ugyanazt „mondja", mint (ii): ha két nyíl olyan, hogy a második onnan indul, ahova az első érkezik, akkor létezik a kompozíciójuk, amely onnan indul, ahonnan az első, és oda érkezik, ahova a második. [Az, hogy az új változatban g szerepét f játssza és viszont, nyilván nem oszt nem szoroz – elvégre *tetszőleges* nyilakról van szó.]

3.1.1. Ellenőrizzük, hogy (i), (iii) és (iv) hasonlóan viselkedik.

Legyen φ egy, a kategóriaelmélet nyelvén megfogalmazott állítás; jelölje φ fentiek szerinti „fordítását" φ^*. [Világos, hogy $(\varphi^*)^* = \varphi$.] Mivel a kategóriaelmélet bármely α axiómája esetén $\alpha^* = \alpha$, azért *ha* φ *az axiómákból levezethető, akkor levezethető* φ^* *is.*

Ha tehát egy φ állítás igaz minden $\mathcal{C}$ kategóriában, akkor φ^* is ilyen, azaz tetszőleges φ állítás esetén $\varphi \Rightarrow \varphi^*$.

A geometriában valamelyest jártas Olvasó nyilván már megjegyezte magában: hasonló szituációval találkozhatunk – például – a projektív síkok elméletében. A *projektív sík* axiómái között szerepel például, hogy *ármely két különböző ponthoz létezik pontosan egy egyenes, amelyre mindkét pont illeszkedik*, és az is, hogy *bármely két különböző egyeneshez létezik pontosan egy pont, amelyre mindkét egyenes illeszkedik.* Ha a „pont" szó helyett „egyenest" írunk, akkor az előbbi az utóbbivá alakul és viszont. [Itt kihasználtuk az „illeszkedik" kifejezés kétértelműségét – az egyik esetben azt értjük rajta, hogy „átmegy", a másikban meg azt, hogy „rajta van". Ha ez utóbbiakat alkalmazzuk, akkor a „fordításban" őket is fel kell cserélnünk.] Mi több, általánosan is igaz: ha egy φ állítás az axiómák alapján levezethető, akkor levezethető a „pont" és „egyenes" szavak felcserélésével kapott φ^* „fordítása" is.

Egyebek mellett a fenti megfigyelések adják a következő definíció jelentőségét.

3.1.1 Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória. A $\mathcal{C}$ ellentett vagy duális kategóriájának (röviden duálisának) nevezzük azt a $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ kategóriát, amelynek objektumai ugyanazok, mint $\mathcal{C}$ objektumai, nyilai pedig $\mathcal{C}$ nyilainak megfordításai:*

1. *ha* $f : A \longrightarrow B$ *egy nyíl a $\mathcal{C}$ kategóriában, akkor* $f : B \longrightarrow A$ *nyíl a $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ kategóriában;*

2. *az 1-nyilak a $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ kategóriában ugyanazok;*

3. *ha a $\mathcal{C}$ kategóriában* $h = g \circ f$*, akkor a $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ kategóriában* $h = f \circ g$.

3.1.2. Ellenőrizzük, hogy $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Példák

Fontos, hogy lássuk: a $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ kategória nyilai *nem* függvények. Azt, hogy $f : A \longrightarrow B$ egy $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$-beli nyíl, csupán azt jelenti, hogy Set-ben $f : B \longrightarrow A$ nyíl, azaz függvény; a Set kategória duálisa ebben az értelemben tisztán formális konstrukciónak tekintendő. Hasonló megjegyzés érvényes minden olyan kategóriára, amelynek nyilai (esetleg struktúratartó) függvények.

Diszkrét kategória duálisa is diszkrét, hiszen minden egy 1-nyíl önmaga megfordítása. Ha a $\mathcal{C}$ kategóriát egy $\langle E, \leq\rangle$ előrendezésből származtattuk, akkor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a $\langle E, \geq\rangle$ előrendezésből származó kategória. [Az E halmaz tetszőleges x, y elemei esetén $x \leq y$ pontosan akkor, ha $y \geq x$.]

3.1.3. Mik a duálisai a 2.3. alfejezetbeli „csöppnyi" kategóriáknak?

3.1.4. Igazoljuk, hogy ha egy monoid kommutatív, akkor a neki megfeltetett egyelemű kategória duálisa önmaga! Mi a helyzet, ha a monoid nem kommutatív?

A megszámlálható köznevek CN kategóriájának $\mathrm{CN}^{\mathrm{op}}$ duális kategóriájában a nyilakat természetes módon mint *aspektusokat* értelmezhetjük. Ha például HENTES $\longrightarrow$ EMBER egy nyíl a CN kategóriában („minden hentes ember"), akkor a fordított irányú $\mathrm{CN}^{\mathrm{op}}$-beli nyilat így értelmezhetjük: bizonyos emberekre gondolhatunk úgy, mint hentesekre.

Duális konstrukciók

Idézzük fel a terminális objektum definícióját: egy $\mathcal{C}$ kategóriában az A objektumot terminálisnak nevezzük, ha $\mathcal{C}$ bármely X objektuma esetén pontosan egy olyan f nyíl létezik, hogy $\mathrm{Dom}\, f = X$ és $\mathrm{Codom}\, f = A$. A „fordítás" így szól: $\mathcal{C}$ bármely X objektuma esetén pontosan egy olyan f nyíl létezik, hogy $\mathrm{Dom}\, f = A$ és $\mathrm{Codom}\, f = X$ – ez pedig éppen azt mondja, hogy A – a $\mathcal{C}$ kategóriában iniciális objektum. Ha most nem csupán az A definíciójában szereplő nyilakat fordítjuk meg, hanem a teljes hátteret, vagyis a $\mathcal{C}$ kategória összes nyilát is (azaz áttérünk a $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ kategóriára), akkor valójában nem változik semmi: A terminális objektum marad – a $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ kategóriában.

Az ilyen esetekben duális fogalmakról (vagy konstrukciókról) beszélünk. Ha tehát belátjuk, hogy egy tetszőleges $\mathcal{C}$ kategóriában minden terminális objektum izomorf, akkor egyúttal azt is beláttuk, hogy bármely $\mathcal{C}$ kategóriában minden iniciális objektum izomorf, hiszen minden iniciális objektum terminális – a megfelelő duális kategóriában.

3.1.5. Mutassuk meg, hogy az „A és B a $\mathcal{C}$ kategória izomorf objektumai" állítás fordítása önmaga, azaz ha A és B a $\mathcal{C}$ kategóriában izomorfak, akkor ilyenek az $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ duális kategóriában is!

3.2. Részkategória

A részstruktúrákkal a matematikában lépten-nyomon találkozunk. Egy algebrai példát említve: a nemnulla racionális számok multiplikatív csoportjában (amelyben az alaphalmaz a nemnulla racionális számok halmaza, a művelet a szokásos szorzás, a neutrális elem az 1, az inverz pedig a reciprok) az $\{1\}$, a $\{-1, 1\}$ halmazokra, vagy éppenséggel az összes pozitív racionális szám $\mathbb{Q}^+$ halmazára is teljesül, hogy zárt a műveletre nézve (a halmaz bármely két elemét összeszorozva halmazbeli elemet kapunk), (elemként) tartalmazza a csoport egységelemét, és zárt az inverzképzésre is (tetszőleges elemével együtt annak reciproka is eleme). Az ilyen esetekben részcsoportról beszélünk. Általánosabban: a $\langle G', \diamond', e', i' \rangle$ *csoport* az $\langle G, \diamond, e, i \rangle$ csoport részcsoportja, amennyiben $G' \subseteq G$, $e' = e$, a $\diamond'$ és az i' művelet pedig olyanok, hogy tetszőleges $x, y \in G'$ esetén $x \diamond' y = x \diamond y \in G'$ és $i'(x) = i(x) \in G'$.

Mindenezek után a kategóriákra vonatkozó analóg definíció nem jelent különösebb megrázkódtatást.

3.2.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{C}$ kategória a $\mathcal{D}$ kategória részkategóriája, ha*

1. *$\mathcal{C}$ minden objektuma $\mathcal{D}$ objektuma, és minden $\mathcal{C}$-beli nyíl a $\mathcal{D}$ kategóriában is nyíl, azaz* $\mathrm{Ob}\mathrm{C} \subseteq \mathrm{Ob}\mathrm{D}$ *és* $\mathrm{Ar}\,\mathrm{C} \subseteq \mathrm{Ar}\,\mathcal{D}$.
2. *Bármely $\mathcal{C}$-beli f nyíl $\mathcal{C}$-beli kiindulópontja, illetve végpontja ugyanaz, mint az illető nyíl $\mathcal{D}$-beli kiinduló-, illetve végpontja; így tetszőleges* $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *esetén* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$.
3. *A $\mathcal{C}$ kategória tetszőleges A objektumának $\mathcal{C}$-beli 1_A 1-nyila egyúttal* D*-beli 1-nyíl is.*
4. *Ha $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow C$ a $\mathcal{C}$ kategória komponálható nyilai, akkor a $\mathcal{C}$-beli $g \circ f$ kompozíció ugyanaz, mint az f és g nyilak $\mathcal{D}$-beli kompozíciója.*

Azt, hogy a $\mathcal{C}$ kategória a $\mathcal{D}$ kategória részkategóriája, általában így jelöljük: $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Példák

Tetszőleges $\mathcal{C}$ kategória esetén $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$. Ha $\mathcal{C}'$ az a kategória, amelyet úgy kapunk, hogy a $\mathcal{C}$-ben csak az 1-nyilakat hagyjuk meg (azaz $\mathcal{C}$-t diszkrétté csupaszítjuk), akkor $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$.

A halmazok és a függvények Set kategóriájában a véges halmazok (és a közöttük haladó függvények) Finset-tel jelölt kategóriája részkategóriát alkot. Tetszőleges E és F véges halmazok esetén a Finset-beli $E \longrightarrow F$ nyilak ugyanazok, mint a Set-beli nyilak (azaz $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fin}}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(A,B)$); azt mondjuk, hogy Finset *teljes* részkategóriája Set-nek. A Set kategória másfelől részkategóriája a halmazok és relációk Rel kategóriájának. Ez utóbbi viszonyban a Hom-halmazok nyilván különböznek (két halmaz között általában „több" reláció értelmezhető, mint függvény), a két kategória objektumai viszont ugyanazok. Ez utóbbi tényre gyakran így hivatkozunk: Set a Rel *„széles"* részkategóriája.

A Fin kategória érdekes részkategóriája a Neumann-féle véges rendszámok (és a közöttük haladó függvények) Finord kategóriája. (A véges rendszámok – mint emlékszünk – a természetes számok halmazelméleti „modelljei"; a nullának a $\emptyset$, az $\{n+1\}$ számnak pedig az n-elemű $\{0,1,\ldots,n\}$ halmaz felel meg.) Finord teljes, de nem széles kategória Finset-ben, rendelkezik ugyanakkor egy figyelemre méltó tulajdonsággal: a Finset kategória tetszőleges A objektumához létezik Finord-beli A' objektum, amellyel A – a Finset kategóriában – izomorf. Az ilyen esetekben *reprezentatív részkategóriáról* beszélünk.

3.2.1. Igazoljuk, hogy valóban így áll a dolog!

Mivel minden monoid egyúttal félcsoport is, a monoid-homomorfizmusok tekinthetők speciális részcsoport-homomorfizmusnak. A kategóriákra áttérve ez annyit tesz: a monoidok kategóriája a félcsoportok kategóriájának (se nem teljes, se nem széles) részkategóriája.

Egy $\langle E, \leq\rangle$ előrendezésből származó $\mathcal{C}$ kategória esetében a $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ részkategóriák azoknak az $\langle E', \leq'\rangle$ előrendezéseknek felelnek meg, amelyekben $E' \subseteq E$, a $\leq'$ rendezés pedig (mint rendezett párok halmaza) részhalmaza a $\leq$ rendezésnek.

3.2.2. Mifélék a részkategóriák a természetes számok szokásos $\langle N, \leq\rangle$ rendezéséből származtatott kategóriában?

A klasszikus propozicionális logikai levezetésekben a kizárt harmadik (vagy a kettős tagadás) sémája is alkalmazható, az intuicionista logika levezetéseiben viszont nem. Mivel a levezethetőség definíciója a két esetben ezen felül semmi másban nem különbözik, nyilvánvaló, hogy egy intuicionista logikabeli levezetés egyúttal klasszikus logikai levezetés is. Eszerint tehát (2.10. alfejezet jelöléseit használva): $\mathcal{L}_C \subset \mathcal{L}_I$ és $\mathcal{L}_C^* \subset \mathcal{L}_I^*$. Egyelőre nem tudjuk igazolni, hogy itt nem teljes részkategóriákról van szó – de nyugodtan elhihetjük...

3.2.3. Keressünk részkategória-viszonyokat az általános logikai kategóriák között!

3.3. Nyílkategóriák

Ha egy nyíl „valaki" – de elegalábbis egy objektum – szeretne lenni, a kategóriaelmélet készen áll a megfelelő konstrukcióval. Tetszőleges $\mathcal{C}$ kategória esetén értelmezhető ugyanis egy olyan – $\mathcal{C}^{\rightarrow}$-lal jelölt – kategória, amelynek objektumai a $\mathcal{C}$ kategória nyilai. A $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ *nyíl-kategóriában* az $f : A \longrightarrow B$ objektumból a $g : C \longrightarrow D$ objektumba érkező nyilak a $\mathcal{C}$ kategória olyan $m : A \longrightarrow C$ és $n : B \longrightarrow D$ nyilaiból álló $\langle m, n\rangle$ rendezett párok, amelyekkel az

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "n"'] & D \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $n \circ f = g \circ m$. A kompozíciók értelmezése nem okoz problémát: ha az $\langle m, n\rangle$ nyíl a $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ kategória $f : A \longrightarrow B$ objektumából a $g : C \longrightarrow D$ objektumba, az $\langle m', n'\rangle$ nyíl pedig a $g : C \longrightarrow D$ objektumból a $h : E \longrightarrow F$ objektumba érkezik, akkor a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "g"] & E \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "n"'] & D \arrow[r, "n'"'] & F \end{tikzcd}$$

diagramban mindkét négyzet kommutatív, így nyilván kommutatív a téglalap is: $h \circ m' \circ m = n' \circ n \circ f$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\langle m' \circ m, n' \circ n\rangle$ nyíl megfelel a $\langle m' n'\rangle \circ \langle m, n\rangle$ kompozíciónak.

A $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ kategória $f : A \longrightarrow B$ objektumának 1-nyila az $1_f = \langle 1_A, 1_B\rangle$ rendezett pár; az

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd}$$

diagram nyilván kommutatív.

3.3.1. Ellenőrizzük, hogy az imént definiált kompozíció asszociatív, és hogy az 1-nyilak valóban hatástalanok.

A konstrukció általánosítható. Tetszőleges $\mathcal{C}$ kategória esetén értelmezhetünk egy $\mathcal{C}^{\triangleright}$ kategóriát, amelynek objektumai a $\mathcal{C}$ kategória

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & C \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

„kommutatív háromszögei", nyilai pedig a $\mathcal{C}$ kategória nyilainak rendezett hármasai, amelyekkel a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & C \\ & B \arrow[ur] & \\ A' \arrow[uu] \arrow[rr] \arrow[dr] & & C' \arrow[uu] \\ & B' \arrow[uu] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

háromszög alapú hasábok kommutatívak.

3.3.2. Mik a kompozíciók és az 1-nyilak ebben a kategóriában? Értelmezzünk nyíl-kategóriát, amelynek objektumai a $\mathcal{C}$ kategória kommutatív négyzetei! [Egy négyzet „többféleképpen" is lehet kommutatív.]

3.3.3. Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória. Mik az ojektumai és nyilai a $(\mathcal{C}^{\rightarrow})^{\rightarrow}$ kategóriának?

A részaspektusok kategóriája

A kategóriakonstrukciók természetesen kombinálhatók is. A megszámlálható köznevek CN-kategóriájából képzett $(\mathrm{CN}^{\mathrm{op}})^{\rightarrow}$ kategória. Ennek objektumai a CN kategória nyilainak megfordításai, amelyek – mint emlékszünk – értelmezhetők a megszámláható köznevek lehetséges aspaktusaiként. Ha $f : \textsc{apa} \longrightarrow \textsc{férfi}$ egy nyíl valamely $\mathcal{C}$ CN-kategóriában, akkor a $\mathrm{CN}^{\mathrm{op}}$ kategóriában e nyíl megfelelője értelmezhető így: bizonyos férfiakra úgy gondolhatunk, mint apákra. Hasonlóan, ha a $\mathcal{C}$ kategóriában van $g : \textsc{szülő} \longrightarrow \textsc{ember}$ nyíl, akkor ennek duálisa azt mondja: némelyik ember szülő. Ha pedig az f és a g nyilak duálisaira mint a $(\mathrm{CN}^{\mathrm{op}})^{\rightarrow}$ kategória objektumaira gondolunk, akkor egy közöttük haladó nyíl – definíció szerint – nem más, mint egy $\mathrm{CN}^{\mathrm{op}}$-beli nyilakból álló $\langle m, n\rangle$ rendezett pár. Könnyen kitalálható, mifélék ezek a nyilak: azok, amelyek a $\mathcal{C}$ kategóriában „azt mondják": „minden féfi ember", illetve azt, hogy „minden apa szülő”. Lássuk tehát a – $(\mathsf{CN}^{\mathsf{op}})^{\rightarrow}$-beli – ábrát:

$$\begin{tikzcd} \text{EMBER} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "g"'] & \text{FÉRFI} \arrow[d, "f"] \\ \text{SZÜLŐ} \arrow[r, "n"'] & \text{APA} \end{tikzcd}$$

Ilyenkor azt mondhatjuk, hogy az f aspektus a g aspektus „részaspektusa”. A $(\mathsf{CN}^{\mathsf{op}})^{\rightarrow}$ kategóriát ezek szerint egyfajta alapvető aspektuselméletként is értelmezhetjük.

3.4. Szeletkategóriák

A szeletkategóriák bizonyos értelemben – amelyre az alfejezet végén visszatérünk – a nyílkategóriákkal állnak közeli rokonságban.

Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, A pedig $\mathcal{C}$ egy objektuma. Értelmezzünk egy $\mathcal{C}{\downarrow}A$ kategóriát a következők szerint. A $\mathcal{C}{\downarrow}A$ kategória objektumai a $\mathcal{C}$ kategória A-ba érkező nyilai; az $f : B \longrightarrow A$ objektumból a $g : C \longrightarrow A$ objektumba érkező nyilak pedig a $\mathcal{C}$ kategória azon $s : B \longrightarrow C$ nyilai, amelyekkel $g \circ s = f$, azaz amelyekkel a

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. A kompozíció értelmezése a következő. Ha az $f : B \longrightarrow A$ és a $g : C \longrightarrow A$ $\mathcal{C}{\downarrow}A$-objektumok között az s, a $g : C \longrightarrow A$ és a $: C \longrightarrow A$ pedig a t nyíl halad, akkor az $t \circ s$ $\mathcal{C}{\downarrow}A$-beli kompozíciónak megteszi a $t \circ s$ $\mathcal{C}$-beli kompozíció:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "t \circ s"] \arrow[dr, "s"] \arrow[ddr, "f"'] & & D \arrow[ddl, "h"] \\ & C \arrow[ur, "t"] \arrow[d, "g"] & \\ & A & \end{tikzcd}$$

Az 1_B nyíllal a

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "1_B"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

diagram automatikusan kommutatív: 1_B tehát a $\mathcal{C}{\downarrow}A$ kategória $f : B \longrightarrow A$ objektumának 1-nyila.

3.4.1. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{C}{\downarrow}A$ kategóriában értelmezett kompozíció asszociatív, és hogy az 1-nyilak is a kategóriadefiníciónak megfelelően viselkednek.

$\mathcal{C}{\downarrow}A$ tehát valóban kategória, a szokásos elnevezése: *szeletkategória,* vagy *az* A *alatti objektumok kategóriája.*

A $\mathrm{Set}\downarrow A$ kategória objektumai az A-ba érkező függvények; egy $\langle E, \leq \rangle$ előrendezésből származó $\mathcal{C}$ kategória és egy $e \in E$ objektum esetén a $\mathcal{C}{\downarrow}a$ objektumai az E halmaz azon elemeinek felelnek meg, amelyek a $\leq$ előrendezés szerint „kisebbek", mint e.

A $\mathcal{C}\downarrow A$ minden objektuma egy $X \longrightarrow A$ alakú nyíl. Ezeket a nyilakat a $\langle f, X\rangle$ rendezett pár egyértelműen meghatározza felírni, és esetenként célszerű lehet – mondjuk – a $\langle f_1, X_1\rangle$ objektumból a $\langle f_2, X_2\rangle$ objektumba érkező nyilakról beszélni.

Nyílkategóriák és szeletkategóriák

Egy adott $\mathcal{C}$ kategória esetében a $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ és $\mathcal{C}\downarrow A$ objektumai egyaránt nyilak, és az utóbbiak az előbbiek egy szépen körülhatárolt részét alkotják. Természetes kérdés tehát: vajon az utóbbi kategória nem részklategóriája az előbbinek? Az elhamarkodott válasz a kérdésre egyértelmű *nem* – elvégre az előbbi kategória nyilai a $\mathcal{C}$ kategória nyilaiból álló rendezett párok, az utóbbiéi viszont – „egyszerű" – $\mathcal{C}$-nyilak.

A megfontolt válasz: *lényegében igen.* Tekintsük ugyanis a $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ kategória $X \longrightarrow A$ alakú elemeinek, és $\langle f, 1_A\rangle$ alakú nyilainak összességét. Ezek – mint az könnyen ellenőrizhető – $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ egy $\mathcal{C}^{\rightarrow}_A$ részkategóriáját alkotják.

3.4.2. Ellenőrizzük könnyen!

A $\mathcal{C}\downarrow A$ és a $\mathcal{C}^{\rightarrow}_A$ kategória objektumai tehát megegyeznek, és a nyilaik között is igen intim a viszony: ha az előbbi kategória egy f nyilának az utóbbi kategória $\langle f, 1_A\rangle$ alakú nyilát feleltethetjük meg, akkor a kompozíciók is egyszerre „működnek”, hiszen egy

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

háromszög pontosan akkor kommutatív, ha a

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}$$

négyzet is az.

3.4.3. Ellenőrizzük, hogy az iménti „megfeleltetéssel” 1-nyilakhoz 1-nyilakat rendelünk!

3.4.4. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathcal{C}{\downarrow}A$ kategóriában 1_A terminális objektum!

A $\mathcal{C}{\downarrow}A$ és a $\mathcal{C}_A^{\rightarrow}$ kategória tehát „lényegében” ugyanaz. Ez a „lényegében” ugyanaz természetesen izomorfizmust jelent: a kategóriák kategóriájában, amelyben a nyilak a funktorok – de ez egy későbbi fejezet zenéje.

Fordítsunk!

A $\mathcal{C}{\downarrow}A$ kategória objektumai a $\mathcal{C}$ kategória A-ba érkező nyilai. Mi a helyzet az A-ból induló nyilakkal? Természetesen ezek is kategóriát alkotnak – jelölése: A $\mathcal{C}{\uparrow}A$ –, amelyben egy $f : A \longrightarrow B$ objektumból a $g : A \longrightarrow C$ objektumba érkező nyilak olyan $t : B \longrightarrow C$ ($\mathcal{C}$-beli) nyilak, amelyekkel $s \circ f = g$, azaz amelyekkel a

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[rr, "t"'] & & C \end{tikzcd}$$

háromszög kommutatív. Ezt a kategóriát is szeletkategóriának – néha *az A alatti objektumok kategóriájának* – nevezzük.

3.4.5. Mik $\mathcal{C}{\uparrow}A$ kategória 1-nyilai? Adjuk meg a $C^{\rightarrow}$ kategória azon részkategóriáját, amely „lényegében ugyanaz”, mint $\mathcal{C}{\uparrow}A$.

3.5. Kategóriák szorzata

Az algebrai és a topologikus struktúrák esetében sztenderd szorzatkonstrukció természetesen a kategóriaelméletben is létezik. Mivel szorzatokról a későbbiekben még sok szó esik, ehelyütt rövidre fogjuk.

Ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ kategóriák, akkor a $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ szorzatkategória objektumai olyan $\langle A_1, A_2\rangle$ rendezett párok, amelyekben A_1 a a $\mathcal{C}_1$, A_2 pedig a $\mathcal{C}_2$ kategória objektuma. A nyilakat szintén „koordinátánként" értelmezzük: az $\langle A_1, B_1\rangle$ objektumból a $\langle A_2, B_2\rangle$ érkező nyilak olyan $\langle f, g\rangle$ párok, amelyekben $f : A_1 \longrightarrow B_1$ a $\mathcal{C}_1$ és $g : A_2 \longrightarrow B_2$ a $\mathcal{C}_2$ kategória nyilai. A kompozíciók értelmezése sem tartogat meglepetést: $\langle f_2, g_2\rangle \circ \langle f_1, g_1\rangle = \langle f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2\rangle$. Végül az $\langle A, B\rangle$ objektum 1-nyila $\langle 1_A, 1_B\rangle$.

3.5.1. Hány objektuma, illetve nyila van az 2×3 kategóriának?

4. fejezet

Speciális nyilak és objektumok

Már tudjuk, mit tudnak az izo nyilak, a terminátorok és az iniciális objektumok. Rajtuk kívül egy kategóriában számos speciális objektum-, illetve nyílkonstrukció létezik. Ebben a fejezetben a legfontosabbakat vesszük sorra.

4.1. Mono nyilak

A mono nyilak az injektív függvények absztrakt megfelelői; segítségükkel értelmezhető a részobjektum fogalma.

4.1.1 Definíció. *A $\mathcal{C}$ kategóriában egy $f : A \longrightarrow B$ nyíl mono, ha $\mathcal{C}$ tetszőleges $g, h : C \longrightarrow A$ nyilai esetén abból, hogy $f \circ g = f \circ h$, következik, hogy $g = h$.*

Ha tehát f mono, a

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

diagram pedig kommutatív, akkor $g = h$; a mono nyilakkal a kompozíciós egyenlőségek „balról egyszerűsíthetők”. Visszájáról fogalmazva: ha $f : A \longrightarrow B$ mono, akkor tetszőleges $g, h : C \longrightarrow A$ nyilai esetén $g \neq h \Rightarrow f \circ g \neq f \circ h$.

Példák

A Set kategóriában a mono nyilak az injektív függvények: az 1.8. alfejezet 1. tétele pontosan ezt állítja. A fogalom mindazonáltal általánosabb: az

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

kategóriában – **2**-nek neveztük – az f nyíl mono (ellenőrizzük!), de injektivitásról ebben az esetben nyilván nem beszélhetünk.

Az $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ monoidnak megfelelő kategóriában minden nyíl mono (ha $n + m = n + m'$, akkor $m = m'$).

A monoidok kategóriájában a mono nyilak az injektív homomorfizmusok. Az állítás egyik felét egyszerű belátni: ha $\langle M_1, \diamond_1, e_1 \rangle$ és $\langle M_2, \diamond_2, e_2 \rangle$ monoidok, $f : M_1 \longrightarrow M_2$ pedig injektív homomorfizmus, akkor f mono nyíl a monoidok kategóriájában. Legyen ugyanis $\langle M_0, \diamond_0, e_0 \rangle$ egy monoid, $g, h : M_0 \longrightarrow M_1$ pedig olyan monoid-homomorfizmusok, amelyekre $f \circ g = f \circ h$. Eszerint tetszőleges $m \in M_0$ esetén $f(gx) = f(hx)$, amiből – f injektivitása miatt – $gx = hx$, és így $g = h$ következik.

A megfordítás valamivel trükkösebb: azt kell belátni, hogy ha $f : M_1 \longrightarrow M_2$ mono nyíl a monoidok kategóriájában, akkor f injektív. Legyen tehát x és y az M_1 halmaz két különböző eleme. Tekintsük a $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ monoidot (a természetes számok az összeadással és a 0-val mint neutrális elemmel), továbbá az $s_x, s_y : \mathbb{N} \longrightarrow M_1$ függvényeket:

$$s_x(m) = \underbrace{x \diamond_1 \ldots \diamond_1 x}_{m \text{ darab } x} = x^m$$
$$s_y(m) = \underbrace{y \diamond_1 \ldots \diamond_1 y}_{m \text{ darab } y} = y^m$$

Könnyen belátható, hogy s_x és s_y monoid-homomorfizmusok, méghozzá – mivel $x \neq y$ – különböző homomorfizmusok. Ha most az M_1 monoid x és y elemei esetén $fx = fy$, akkor minden m pozitív természetes számra

$$f(s_x(m)) = f(x^m) = (fx)^m = (fy)^m = f(y^m) = f(s_y(m)),$$

azaz $f \circ s_x = f \circ s_y$ – ami viszont azt jelenti, hogy f nem mono. Ha tehát f mono, akkor $fx \neq fy$, és pontosan ezt kellett igazolni.

Mono nyilak elemi tulajdonságai

Egy izo nyíl minden kategóriában mono: ha $f : A \longrightarrow B$ izo a $\mathcal{C}$ kategóriában, inverze pedig f^{-1}, akkor tetszőleges $g, h : C \longrightarrow A$ nyilakra teljesül, hogy ha $f \circ g = f \circ h$, akkor

$$g = 1_A \circ g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = 1_A \circ h = h.$$

4.1.1. Bizonyítsuk be, hogy minden 1-nyíl mono!

Mono nyilak kompozíciója is mono, mono kompozíciók csak mono nyillal kezdődhetnek.

4.1.2. Állítás. *Legyenek* $f : A \longrightarrow B$ *és* $g : B \longrightarrow C$ *nyilak; ha* f *és* g *egyaránt mono, akkor* $g \circ f$ *is az; ha* $g \circ f$ *mono, akkor* f *is az.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy f és g egyaránt mono nyilak, és hogy a $k, l : D \longrightarrow A$ nyilakkal $k \circ g \circ f = l \circ g \circ f$. Akkor – mivel f mono – $k \circ g = l \circ g$, amiből – mivel g is mono – $k = l$.

A második állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $g \circ f$ mono; legyenek továbbá $m, n : D \longrightarrow A$ olyan nyilak, amelyekkel $f \circ m = f \circ n$. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $m = n$: abból viszont, hogy $(g \circ f) \circ m = g \circ (f \circ m) = g \circ (f \circ n) = (g \circ f) \circ n$, és hogy $g \circ f$ mono, éppen ezt kapjuk. ♡

4.1.2. Bizonyítsuk be, hogy ha I a $\mathcal{C}$ kategória egy iniciális objektuma, $f : A \longrightarrow I$ pedig mono nyíl, akkor f izo. [Legyen g az egyetlen $I \longrightarrow A$ nyíl; $f \circ g$ csak 1_I lehet; az pedig, hogy $g \circ f = 1_A$, következik abból, hogy $f \circ g \circ f = f \circ 1_A$.]

Részobjektumok

Egy E halmaz részhalmazainak $\wp E$ halmazán értelmezett $\subseteq$ reláció reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus: ez utóbbi azt jelenti, hogy tetszőleges $F, G \in \wp E$ esetén $F \subseteq G$ és $G \subseteq F$ egyidejű fennállásából $F = G$ következik. A részhalmazokra gondolhatunk úgy is, mint E-be érkező függvényekre: az $F \subseteq E$ részhalmaznak „természetes módon” megfeleltethető az $f = 1_E|_F : F \longrightarrow E$ függvény: az E halmaz identikus függvényének F-ra való leszűkítése. Egy $F \subseteq E$ részhalmaz az elemei által egyértelműen meghatározott – lássuk, mi a helyzet a kategóriaelméleti általánosításban!

Legyenek $f : A \longrightarrow C$ és $g : B \longrightarrow C$ azonos végpontú nyilak a $\mathcal{C}$ kategóriában. Ha van olyan $h : A \longrightarrow B$ nyíl, amellyel $f = g \circ h$, akkor azt mondjuk, hogy f *átfaktorál* g-n. Mi az ábra ilyenkor?

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] & C \\
A \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "f=g\circ h"'] &
\end{tikzcd}$$

Amennyiben f és g – és így az előző alfejezetben bizonyított állítás szerint h is – egyaránt mono, akkor azt, hogy f átfaktorál g-n, így jelöljük: $f \subseteq g$.

A C-be érkező mono nyilak összességén értelmezett $\subseteq$ reláció reflexív és tranzitív. A reflexivitás nyilvánvaló, hiszen bármely $f : A \longrightarrow C$ nyíl átfaktorál önmagán:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & C \\
A \arrow[u, "1_A"] \arrow[ur, "f=g\circ 1_A"'] &
\end{tikzcd}$$

A tranzitivitás sem jelent gondot. Ha $f \subseteq g$ és $g \subseteq h$, akkor vannak olyan m, n nyilak, amelyekkel a

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "h"] & \\
B \arrow[u, "n"] \arrow[r, "g"'] & C \\
A \arrow[u, "m"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $f = g \circ m$ és $g = h \circ n$. Ekkor azonban $f = h \circ n \circ m$, az $n \circ m$ nyíl tehát megteszi azt a szívességet, hogy f-et „átfaktoráltatja” h-n, fennáll tehát $f \subseteq h$ is.

A halmazelméleti $\subseteq$ relációval való analógia az antiszimmetrikusságnál ér véget: ha az $f : A \longrightarrow C$ és $g : B \longrightarrow C$ mono nyilakra $f \subseteq g$ és $g \subseteq f$ egyaránt teljesül, akkor csupán annyit tudunk igazolni, hogy A és B a $\mathcal{C}$ kategória izomorf objektumai. Tegyük fel ugyanis, hogy f az $m : A \longrightarrow B$ nyílon keresztül faktorál át g-n, g pedig az $n : B \longrightarrow A$ nyílon keresztül faktorál át f-en:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, shift left, "n"] \arrow[dr, "g=f\circ n"] & \\
& C \\
A \arrow[uu, shift left, "m"] \arrow[ur, "f=g\circ m"'] &
\end{tikzcd}$$

Ekkor $f \circ n \circ m = g \circ m = f = f \circ 1_A$, amiből – mivel f mono – azt kapjuk, hogy $n \circ m = 1_A$. *Mutatis mutandis:* $m \circ n = 1_B$.

Ha a C-be érkező f és g mono nyilakra $f \subseteq g$ és $g \subseteq f$ egyaránt fennáll, akkor azt jelöljük így: $f \sim g$. Könnyen belátható, hogy a $\sim$ reláció a szóban forgó nyilak összességén reflexív, tranzitív és szimmetrikus – azaz *ekvivalenciareláció.*

4.1.3. Lássuk be!

Ha egy E halmazon $\sim$ ekvivalenciareláció, akkor az egymással $\sim$ relációban álló elemek E-t ekvivalencia-„osztályokra” osztják. Azt az ekvivalenciaosztályt, amelynek e eleme, általában $[e]$ jelöli, $[e] = \{x \in E : x \sim e\}$. Világos, hogy (i) az E halmaz minden eleme szerepel valamelyik ekvivalenciaosztályban (a $\sim$ reláció reflexivitása miatt minden $x \in E$ esetén $x \in [x]$), és hogy (ii) E egyetlen eleme sem szerepelhet két különböző ekvivalenciaosztályban. (Ha

x az F és a G ekvivalenciaosztálynak is eleme, akkor $F = G$, mivel ekkor F bármelyik z és G bármelyik v eleme $\sim$ relációban áll egymással: $z \in F$ miatt $x \sim z$, $v \in G$ miatt $x \sim v$, mivel $\sim$ szimmetrikus, azért $z \sim x$ is igaz, végül $z \sim x$ és $x \sim v$ együttes fennállásából $\sim$ tranzitivitása miatt $z \sim v$ következik.)

Mindezen előkészületek után következhet a

4.1.3 Definíció. *Legyen C a $\mathcal{C}$ kategória egy objektuma. A C-be érkező $\mathcal{C}$-beli mono nyilak $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályait C részobjektumainak nevezzük.*

Ha $f : A \longrightarrow C$ mono nyíl, akkor $[f]$ jelöli azt a részobjektumot, amelynek f eleme. A C objektum részobjektumainak összességét $\operatorname{Sub} C$ jelöli. A $\mathbf{c}$ részobjektumot C *valódi részobjektumának* nevezzük, ha $1_C \notin \mathbf{c}$.

Legyenek $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ a C részobjektumai. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{f}$ „része” $\mathbf{g}$ nek – jelölés: $\mathbf{f} \subseteq \mathbf{g}$ –, ha van olyan $f \in \mathbf{f}$ és $g \in \mathbf{g}$, hogy $f \subseteq g$.

4.1.4. Bizonyítsuk be, hogy az f és a g kiválasztásában megnyilvánuló önkényesség látszólagos: ha $f \subseteq g$, akkor tetszőleges $[f]$-beli f' és $[g]$-beli g' esetén $f' \subseteq g'$ is fennáll!

4.1.5. Igazoljuk, hogy a $\operatorname{Sub} C$ összességen értelmezett $\subseteq$ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus reláció (azaz részbenrendezés)!

Részhalmazok és részobjektumok

A Set kategóriában a mono nyilak az injektív függvények, a részobjektumok ennélfogva injektív függvények ekvivalenciaosztályai. Minden E-be érkező injektív függvény az E pontosan egy részobjektumnak eleme. Ha az $f : A \longrightarrow E$ és a $g : B \longrightarrow E$ injekciók az E halmaz ugyanazon $\mathbf{e}$ részobjektumának elemei, akkor van olyan $m : A \longrightarrow B$ bijekció, hogy $f = g \circ m$ és $g = f \circ m^{-1}$. Ha most $y \in \operatorname{Im} f$, akkor van olyan $a \in A$, amellyel $fa = y$, ekkor azonban $ma \in B$ és $g(ma) = fa = y$ miatt $y \in \operatorname{Im} g$ is fennáll, azaz $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} g$. Hasonlóan belátható, hogy $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$, a két halmaz tehát egyenlő. Az E halmaz részobjektumainak elemei tehát olyan injekciók, amelyeknek az értékkészlete ugyanaz az $E' \subseteq E$ halmaz. Ezek között van természetesen az (injektív) $1_E|_{E'}$ függvény, az 1_E identitás E'-re való leszűkítése is.

4.1.6. Bizonyítsuk be, hogy az 1_E identikus függvénynek az E minden részobjektumában pontosan egy leszűkítése szerepel.

4.2. Epi nyilak

Ha $f : A \longrightarrow B$ a $\mathcal{C}$ kategóriában mono nyíl, akkor f a $\mathcal{C}^{op}$ duális kategóriában olyan nyíl, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $g, h : B \longrightarrow C$ nyilak esetén abból, hogy $g \circ f = h \circ f$, következik, hogy $g = h$, a $\mathcal{C}^{op}$-beli kompozíciók tehát f-fel „jobbból egyszerűsíthetők". Az ilyen tulajdonságú nyilakat epi nyilaknak nevezzük.

4.2.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{C}$ kategória egy $f : A \longrightarrow B$ nyila epi, ha tetszőleges $\mathcal{C}$-beli $g, h : B \longrightarrow C$ nyilak esetén $g \circ f = h \circ f$ fennállásából $g = h$ következik.*

Ha tehát f epi, akkor amennyiben az

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, úgy $h = g$.

Epi és mono duális nyíltulajdonságok: ha egy nyíl egy $\mathcal{C}$ kategóriában epi, akkor a $\mathcal{C}^{op}$ kategóriában mono. A mono nyilakra vonatkozó tételek duálisainak bizonyításával ennélfogva már nem kell a drága időnket pazarolnunk. Az előző alfejezetbeli állítás az epi nyilakra átfogalmazva például így szól.

4.2.2. Állítás. *Az $f : A \longrightarrow B$ és $g : B \longrightarrow C$ nyilakra teljesülnek a következők: (i) ha f és g egyaránt epi, akkor $g \circ f$ is az; (ii) ha $g \circ f$ epi, akkor g is az.*

Példák

A Set kategóriában az epi nyilak pontosan a szürjektív függvények (1.8. alfejezet, 2. tétel). A Set kategóriában tehát teljesül, hogy ha egy nyíl egyszerre mono és epi, akkor izo. Ennek a megfordítása általánosan is igaz: egy izo nyíl tetszőleges kategóriában mono és epi. Azt, hogy minden izo nyíl mono, már láttuk.

4.2.1. Igazoljuk, hogy minden izo nyíl epi!

Általában nem igaz viszont, hogy ha egy nyíl epi és mono, akkor izo. A **2**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

kategóriában f – mint az könnyen ellenőrizhető – mono és epi, mindazonáltal nem tud izo lenni (nincs is olyan nyíl, amely az inverze lehetne).

A monoidok kategóriájában a mono nyilak – mint emlékszünk – az injektív homomorfizmusok. Plauzíbilis feltételezés lenne azt gondolni, hogy ebben a kategóriában az epi nyilak a szürjektív homomorfizmusok – de nem így áll a dollog. A $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ monoid f „beágyazása" a $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ monoidba (az a függvény tehát, amely minden természetes számhoz önmagát, pontosabban „önmaga" $\mathbb{Z}$-beli megfelelőjét[1]) rendeli. Ez a függvény nyilván homomorfizmus, és nyilván nem szürjektív (a negatív egészek nem elemei az értékkészletének) – mindazonáltal epi nyíl a monoidok kategóriájában. Az ok 1-szerű: az egész számok monoidján értelmezett, az $\langle M, \diamond, e\rangle$ monoidba érkező h monoid-homomorfizmusokat egyértelműen meghatározza a $h(1)$ függvényérték. Ha ugyanis m pozitív egész szám, akkor

$$h(m) = h(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{m \text{ darab 1-es}}) = \underbrace{h(1) \diamond \ldots \diamond h(1)}_{m \text{ darab } h(1)}.$$

A $h(-1)$ függvényérték szintén egyértelműen meghatározott: nem más, mint a $h(1)$ elem M-beli inverze, ilyenből viszont nem lehet több (lássuk be!). Így ha $m = -n$ negatív egész szám, akkor

$$h(m) = h(\underbrace{(-1) + \ldots + (-1)}_{n \text{ darab } -1\text{-es}}) = \underbrace{h(-1) \diamond \ldots \diamond h(-1)}_{n \text{ darab } h(-1)}.$$

Ha tehát g és h egyaránt $\mathbb{Z} \longrightarrow M$ homomorfizmusok, és $g \circ f = h \circ f$, akkor $g(1) = h(1) = e$, minek következtében $g = h$.

Osztott epi, osztott mono

Az utóbbi példa tanulsága: egy epi még akkor sem feltétlenül szürjektív, ha ténylegesen egy függvény. A Set kategóriában az epi nyilak a szürjektív függvények, és az 1.9. alfejezetben beláttuk, hogy a szürjektív függvények pontosan azok, amelyeknek létezik jobbinverze (az $f : A \longrightarrow B$ függvény jobbinverze a $g : B \longrightarrow A$ függvény, amennyiben $f \circ g = 1_B$). Ha a g függvény f jobbinverze, akkor f a g balinverze; a balinverz létezése pedig – mint emlékszünk – a szóban forgó függvény injektivitásával ekvivalens (feltéve, hogy az értelmezési tartomány nem üres). Mivel az inverzek létezése „tisztán nyilas" tulajdonság, tetszőleges kategóriában értelmezhető.

[1] A szokásos halmazelméleti konstrukciókban a $\mathbb{Z}$ halmaz elemei másféle objektumok, mint $\mathbb{N}$ elemei, így – például – az 1 mint természetes szám nem ugyanaz a halmaz, mint az 1 mint egész szám. Annyit mondazonáltal kijelenthetünk: a $\mathbb{Z}$ elemei között – ha „álruhában is, de – jól felismerhetően ott vannak $\mathbb{N}$ elemei is. Kicsit precízebben: a $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ monoidnak van egy, a $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ monoiddal izomorf részmonoidja.

4.2.3 Definíció. *Ha egy* f *nyílnak létezik jobbinverze, akkor osztott epi, ha létezik balinverze, akkor osztott mono nyílnak nevezzük.*

Az elnevezés jogos: minden osztott epi epi, és minden osztott mono mono. Ha például $f : A \longrightarrow B$ osztott mono, amelynek balinverze az $f' : B \longrightarrow A$ nyíl (azaz $f1 \circ f = 1_A$), és $g, h : C \longrightarrow A$ olyanok, hogy $f \circ g = f \circ h$, akkor teljesül $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$, így $1_A \circ g = 1_A \circ h$ és így $g = h$.

4.2.2. Lássuk be, hogy minden osztott epi epi! (Valójában már beláttuk...)

Az osztott mono és az osztott epi tehát „erősebb" tulajdonságok, mint az (egyszerű) epi és mono. Ezt mutatja a következő egyszerű állítás is.

4.2.4. Állítás. *Legyen* f *a egy* $\mathcal{C}$ *kategória egy nyila. (i) Ha* f *mono és osztott epi, akkor* f *izo. (ii) Ha* f *epi és osztott mono, akkor izo.*

BIZONYÍTÁS: Az (i) állítást látjuk be, a második bizonyítását – a dualitás elvét megemlítve – az Olvasóra hagyjuk. Tegyük fel tehát, hogy $f : A \longrightarrow B$ osztott mono; f egy balinverzét jelölje f'. Belátjuk, hogy f egyúttal jobbinverz is (amiből – mivel a „kétoldali" inverz már egyértelmű – az is következik, hogy f' az *egyetlen* balinverz). Mivel $f' \circ f =_A'$, azért $f \circ (f' \circ f) = 1_A \circ f$, amiből – kihasználva, hogy f mono – azt kapjuk, hogy $f' \circ f = 1_A$. ♡

Hom-függvények. Mono, epi és izo nyilak jellemzése

Ebben az alfejezetben $\mathcal{C}$ mindvégig egy kis kategóriát jelöl, azaz olyan kategóriát, amelyben tetszőleges A és B objektumok esetén az A-ból B-be érkező nyilak $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ összessége halmazt alkot.

A $\mathcal{C}$ kategória bármely $f : B \longrightarrow C$ nyila tetszőleges A objektum esetén meghatároz egy

$$\mathrm{Hom}\,(A, f) : \mathrm{Hom}\,(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A, C)$$

függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya: $g \mapsto f \circ g$. [Ha a g nyíl A-ból B-be, akkor $f \circ g$ A-ból C-be mutat.] Hasonlóan, $f : B \longrightarrow C$ tetszőleges D objektum esetén meghatároz egy

$$\mathrm{Hom}\,(f, D) : \mathrm{Hom}\,(C, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(B, D)$$

függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya: $g \mapsto g \circ f$. [Ha g a C objektumból D-be érkezik, akkor $g \circ f$ a B-ből a D objektumba mutat.]

A Hom-függvények injektivitása, illetve szürjektivitása alapján feltételeket fogalmazhatunk meg arra vonatkozóan, hogy egy $\mathcal{C}$ egy nyila mikor mono, epi, illetve izo. [Mint azt még jó néhány alkalommal látni fogjuk, számos kategóriaelméleti konstrukció jellemezhető a Hom-halmazok és a Hom-függvények alapján. A kategóriaelméleszek egy része idegenkedik az efféle jellemzéstől, mivel álláspontjuk szerint a matematika megalapozását éppenséggel a kategóriaelmélet nyújtja, így nem a halmazelméleti konstrukciókkal kell a kategóriaelméleti fogalmakat megvilágítani, hanem éppenséggel fordítva... Ebben a könyvben – mint már említettük – nem a „megalapozás" tematikáján van a fő hangsúly, így nem ódzkodunk a Hom-halmazos, illetve -függvényes jellemzésektől sem.]

4.2.5. Állítás. *A $\mathcal{C}$ kategória egy $f : A \longrightarrow B$ nyila pontosan akkor*

1. *mono, ha* $\mathrm{Hom}(C, f)$ *minden* C *objektum esetén injektív függvény;*
2. *epi, ha* $\mathrm{Hom}(f, C)$ *minden* C *objektum esetén injektív függvény;*
3. *osztott mono, ha* $\mathrm{Hom}(f, C)$ *minden* C *objektum esetén szürjektív függvény;*
4. *osztott epi, ha* $\mathrm{Hom}(C, f)$ *minden* C *objektum esetén szürjektív függvény;*
5. *izo, ha* $\mathrm{Hom}(C, f)$ *minden* C *objektum esetén bijektív függvény, vagy amennyiben* $\mathrm{Hom}(f, C)$ *minden* C *objektum esetén bijektív függvény.*

Bizonyítás: 1. Az, hogy tetszőleges C objektum, illetve $g, h : C \longrightarrow A$ nyilak esetén amennyiben $f \circ g = f \circ h$, úgy $g = h$, pontosan azt jelenti, hogy a $\mathrm{Hom}(C, f)$ függvény injektív. A 2. állítás igazolása hasonlóan megy. A 3. állítás bizonyításához először tegyük fel, hogy f osztott mono; legyen f egy balinverze f', ekkor $f' \circ f = 1_B$. Legyen most C teszőleges objektum, azt kell igazolnunk, hogy $\mathrm{Hom}(f, C)$ szürjektív, azaz tetszőleges $h : A \longrightarrow C$ nyílhoz létezik $k : B \longrightarrow C$ nyíl, amellyel $h = f \circ k$. A k szerepére $h \circ f'$ tökéletesen alkalmas: B-ből indul és C-be érkezik, továbbá $h \circ f' \circ f = h \circ 1_B = h$. Megfordítva, ha $\mathrm{Hom}(f, C)$ tetszőleges C objektum esetén szürjektív, akkor $C = B$ esetén is az. Ez utóbbi azt jelenti, hogy bármely $i : B \longrightarrow B$ nyílhoz létezik legalább egy olyan $j : A \longrightarrow B$ nyíl, amellyel $j \circ f = i$. Az $i = 1_B$ választással egy „jó" j éppen f balinverze lesz. A 4. állítást a 3. mintájára igazolhatjuk; az 5. állítás pedig – mondjuk – az 1–4. állításokból, valamint a 4.2.2. Állításból már következik. ♡

4.2.3. Részletezzük az 5. állítás bizonyítását!

4.3. Szorzat

Ebben az alfejezetben az 1.4. pontban bevezetett „nemhivatalos" Descartes-szorzat definíció elfoglalja jól megérdemelt helyét.

4.3.1 Definíció. *Legyenek* A *és* B *a* $\mathcal{C}$ *kategória objektumai. Azt mondjuk, hogy a* C *objektum a* $p_A : C \longrightarrow A$ *és a* $p_B : C \longrightarrow B$ *nyilakkal az* A *és* B *objektumok szorzata, ha* $\mathcal{C}$ *tetszőleges* C' *objektuma, valamint* $f : C' \longrightarrow A$ *és* $g : C' \longrightarrow B$ *nyilai esetén pontosan egy olyan* $k : C' \longrightarrow C$ *nyíl létezik, amellyel a*

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "k"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & C \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $p_A \circ k = f$ *és* $p_B \circ k = g$.

A p_A és a p_B nyilak a szorzat *projekciói.* A gördülékenyebb fogalmazás kedvéért néha a C objektumot nevezzük A és B szorzatának, de mindig tartsuk szem előtt: egy szorzat mindig egy objektumból és két nyílból áll. A

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

diagramot *szorzatdiagramnak*, definiáló tulajdonságát pedig a szorzat *univerzális tulajdonságának* nevezzük. A szorzat általában nem egyértelmű, gyakran célszerű azonban A és B szorzatai közül kijelölni egyet – ilyenkor a C objektumot általában $A \times B$ jelöli.

Példák

A Set kategóriában a szokásos Descartes-fél szorzat – mint azt az 1.4. alfejezetben már láttuk – kielégíti az általános szorzatdefiníció feltételeit. Ha

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Set-beli szorzatdiagram, akkor a k függvény hozzárendelési szabálya: $x \mapsto \langle fx, gx \rangle$.

Két halmaz Set-beli szorzatának szerepére persze számtalan más halmaz is alkalmas lehet. Ez a „meghatározatlanság” azonban – érveltünk az említett alfejezetben – a definíciónak inkább előnye, mint hátránya. Azt helyezi reflektorfénybe, ami a szorzat szempontjából valóban fontos, és azt tartja a háttérben, ami úgyis esetleges (például a rendezett párok értelmezését).

A halmazokkal egy másik kategóriát is értelmeztünk: azt, amelyben a nyilak a $\subseteq$ reláció fennállásának felelnek. (Az, hogy így kategóriát kapunk, annak köszönhető, hogy $\subseteq$ reflexív és tranzitív.) Mi ebben a kategóriában az A és B objektumok szorzata? Olyan C halmaz, amely egyrészt részhalmaza A-nak és B-nek is, másrészt tetszőleges D halmazra igaz, hogy ha D az A és a B halmaznak egyaránt részhalmaza, akkor részhalmaza C-nek is. Röviden: C a „legbővebb" olyan halmaz, amely A-nak és B-nek is részhalmaza. Ez a halmaz már jó ismerősünk: nem más, mint az A és B halmazok $A \cap B$ metszete.

4.3.1. Bizonyítsuk be, hogy a metszet új meghatározása ekvivalens az eredetivel!

A propozicionális logikának megfeleltetett kategóriákban egy A objektumból (azaz mondatból) pontosan akkor mutat nyíl a B-be, ha a B mondat az A mondat alapján levezethető. Mik a szorzatok ebben a kategóriában? Az A és B mondat egy $A \times B$ szorzatuknak a következőket kell „tudnia": (i) léteznie kell egy $A \times B \longrightarrow A$ és egy $A \times B \longrightarrow B$ nyilnak, azaz két mondat szorzatából mindkét „tag" levezethető; (ii) tetszőleges C mondat esetén, amennyiben C-ből A és B is levezehető, úgy C-ből levezethető $A \times B$ is. Ez a két tulajdonság a konjunkció két karakterisztikus tulajdonsága: az A és B mondatok $A \,\&\, B$ konjunkciójából A és B egyaránt következik, és ha egy mondatból A és B egyaránt következik, akkor következik belőle $A \,\&\, B$ is. Ez a meghatározás a konjunkciót a „használata" alapján, azaz a következtetésekben játszott szerepe alapján, nem pedig a tagok igazságértékére hivatkozva jellemzi. (Ahogy az óvodában tanultuk: $A \,\&\, B$ igaz, ha A és B is igaz.) Ha egy mondatot a következtetések szempontjából kell jellemeznünk, akkor azt kell megmondanunk, hogy milyen következtetésket lehet levonni belőle, illetve hogy hogyan lehet rá következtetni. A konjunkciót (i) tulajdonsága az előbbi, a (ii) az utóbbi szempont szerint karakterizálja.

A megszámlálható köznevek egy kategóriájában két objektumnak nem létezik feltétlenül a szorzata. A KUTYA és a HEGY CN-ek szorzata olyan XXX CN kellene, hogy legyen, amelyre teljesül, hogy minden XXX kutya, hogy minden XXX hegy, továbbá bármi, ami kutya is meg hegy is, az XXX. Talán nem túl merész feltevés: ilyen szó a természetes nyelvekben nincs.

Az utóbbi három példában egyaránt egy-egy előrendezés szerepelt. Lássuk, mik a szorzatok egy előrendezés-kategóriában! Az $\langle E, \leq \rangle$ előrendezésből származtatott kategóriában egy $A \in E$ objektumból pontosan akkor mutat nyíl a $B \in E$ objektumba, ha $A \leq B$. Az A és B objektumok szorzata tehát – amennyiben létezik – olyan C objektum, amely egyrészt nem nagyobb sem A-nál, sem B-nél, másrészt tetszőleges olyan D-re, amelyre $D \leq A$ és $D \leq B$ egyaránt fennáll, teljesül $D \leq C$ is. Az ilyen tulajdonságú C objektumot A és B „legkisebb alsó korlátjának", magyarul *infimumának* nevezzük.

[Az Olvasóban felmerülhet: az éremnek talán lesz egy (duális) másik oldala is. Ha ugyanis a metszet, a konjunkció és az infimum ugyanazon konstrukció speciális esetei, akkor ugyanez lesz majd elmondható az unió–alternáció–szuprémum hármasról is. Ha így van, akkor az Olvasó sejtése Fermat híres sejtéséhez hasonlítható: előbb-utóbb beigazolódik. . .]

A szorzatok az algebra bevett konstrukciói – most egy példán érzékeltetjük, hogy ezek is a kategóriaelméleti általánosítás speciális esetei. Tekintsük a félcsoportok kategóriáját, amelynek objektumai félcsoportok (mint emlékszünk, a félcsoportok olyan $\langle F, \diamond\rangle$ rendezett párok, amelyekben $\diamond$ egy, az F halmazon értelmezett asszociatív művelet), nyilai pedig a félcsoport-homomorfizmusok. Legyen $\langle F_1, \diamond_1\rangle$ és $\langle F_2 \diamond_2\rangle$ két félcsoport. Értelmezzünk az $F_1 \times F_2$ halmazon egy $\diamond$ műveletet a következőképpen:

$$\langle a_1, b_1\rangle \diamond \langle a_2, b_2\rangle =_{\mathrm{def}} \langle a_1 \diamond_1 a_2, b_1 \diamond_2 b_2\rangle$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\diamond$ asszociatív művelet, $\langle F_1 \times F_2, \diamond\rangle$ tehát félcsoport – méghozzá olyan, amely a p_{F_1} és p_{F_2} projekciókkal (amelyek egy $\langle a, b\rangle \in F_1 \times F_2$ rendezett párhoz annak első, illetve második tagját rendelik) megfelel a szorzattal szemben támasztott követelményeknek. Ehhez két dolognak kell teljesülnie. Először, a p_{F_1} és a p_{F_2} függvényeknek félcsoport-homorfizmusoknak kell lenniük – és ez így is van:

$$p_{F_1}(\langle a_1, b_1\rangle \diamond \langle a_2, b_2\rangle) = p_{F_1}(\langle a_1 \diamond_1 a_2, b_1 \diamond_2 b_2\rangle) = a_1 \diamond_1 a_2,$$

és hasonlóan

$$p_{F_2}(\langle a_1, b_1\rangle \diamond \langle a_2, b_2\rangle) = p_{F_2}(\langle a_1 \diamond_1 a_2, b_1 \diamond_2 b_2\rangle) = b_1 \diamond_2 b_2.$$

Másodszor, ha $\langle F_0, \diamond_0\rangle$ egy félcsoport, $f_1 : F_0 \longrightarrow F_1$ és $f_2 : F_0 \longrightarrow F_2$ pedig homomorfizmusok, akkor léteznie kell egyetlen olyan $f : F_0 \longrightarrow F \times F_2$ homomorfizmusnak, amellyel $p_{F_1} \circ f = f_1$ és $p_{F_2} \circ f_2 = f_2$, amellyel tehát a

$$\begin{tikzcd}
 & F_0 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
F_1 & F_1 \times F_2 \arrow[l, "p_{F_1}"] \arrow[r, "p_{F_2}"'] & F_2
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Mivel halmazokról van szó, az egyetlen szóba jöhető f függvény az, amelynek hozzárendelési szabálya $x \mapsto \langle f_1 x, f_2 x\rangle$. Azt kell csak igazolnunk, hogy f homomorfizmus:

$$\begin{array}{ll}
f(x \diamond_0 y) = \langle f_1(x \diamond_0 y), f_2(x \diamond_0 y)\rangle = & f \text{ definíciója szerint} \\
= \langle f_1 x \diamond_1 f_1 y, f_2 x \diamond_2 f_2 y\rangle = & \text{mivel } f_1 \text{ és } f_2 \text{ homomorfizmusok} \\
= \langle f_1 x, f_2 x\rangle \diamond \langle f_1 y, f_2 y\rangle = & \diamond \text{ definíciója szerint} \\
= fx \diamond fy & f \text{ definíciója szerint}
\end{array}$$

A szorzat alapvető tulajdonságai

Láttuk tehát, hogy egy $\mathcal{C}$ kategóriában két objektumnak némelykor nem létezik szorzata, és az is előfordulhat, hogy több is létezik. Ha több létezik, akkor „lényegében ugyanazok" – ezt a fordulatot pontosítja a következő két állítás.

4.3.2. Állítás. *Legyen* A *és* B *a* $\mathcal{C}$ *kategória két objektuma,* C, p_A, p_B *pedig* A *és* B *egy szorzata; legyen továbbá* $i : C' \longrightarrow C$ *izo nyíl. Akkor* $C', p_A \circ i, p_B \circ i$ *ugyancsak* A *és* B *szorzata.*

Bizonyítás: A $p_A \circ i$ nyíl nyilván C'-ből A-ba, $p_B \circ i$ pedig C'-ből B-be mutat, így „mindössze" azt kell bizonyítanunk, hogy tetszőleges D objektum és $f : D \longrightarrow A$, $g : D \longrightarrow B$ nyilak esetén létezik pontosan egy $k : D \longrightarrow C'$ nyíl, amellyel $p_A \circ i \circ k = f$ és $p_B \circ i \circ k = g$.

(i) Először megmutatjuk, hogy legalább egy ilyen k nyíl biztosan létezik. Ehhez kihasználjuk, hogy C, p_A, p_B az A és B objektumok szorzata. A szorzat definíciója szerint létezik pontosan egy $l : D \longrightarrow C$ nyíl, amellyel $p_A \circ l = f$ és $p_B \circ l = g$. [Ez az a pont, ahol az Olvasónak célszerű lehet lerajzolni, mi is az ábra...] Ekkor a $k = i^{-1} \circ l$ választás megfelel:

$$p_A \circ i \circ i^{-1} \circ l = p_A \circ 1_C \circ l = p_A \circ l = f,$$

és hasonlóan: $p_B \circ i \circ i^{-1} \circ l = g$.

(ii) Most belátjuk, hogy legfeljebb egy „jó" k létezhet. Tegyük fel, hogy a $k' : D \longrightarrow C'$ nyílra teljesül $p_A \circ i \circ k' = f$ és $p_B \circ i \circ k' = g$. Ekkor az $i \circ k' : D \longrightarrow C$ nyílra teljesül, hogy $p_A \circ (i \circ k') = f$ és $p_B \circ (i \circ k') = g$. Ugyanez a két egyenlőség az l nyílra is áll, így l egyértelműsége miatt $i \circ k' = l$. Az utóbbi egyenlőségből pedig (az i^{-1} nyíllal „balról komponálva") azt kapjuk, hogy $i^{-1} \circ i \circ k' = i^{-1} \circ l$, amiből $k' = i^{-1} \circ l = k$. ♡

4.3.3. Állítás. *Ha egy* $\mathcal{C}$ *kategóriában* C, p_A, p_B *és* C', p'_A, p'_B *egyaránt az* A *és* B *objektumok szorzata, akkor* C *és* C' *izomorf objektumok.*

Bizonyítás: Ha C, p_A, p_B és C', p'_A, p'_B egyaránt szorzatok, akkor per definitonem egyetlen olyan $k : C \longrightarrow C'$, és egyetlen olyan $l : C' \longrightarrow C$ nyíl létezik, amellyel a

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] \arrow[dd, dotted, shift left, "k"] & \\
A & & B \\
& C' \arrow[ul, "p'_A"] \arrow[ur, "p'_B"'] \arrow[uu, dotted, shift left, "l"] &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $p_A \circ l = p'_A$, $p_B \circ l = p'_B$, $p'_A \circ k = p_A$ és $p'_B \circ k = p_B$. Belátjuk, hogy k izo nyíl, amelynek inverze éppen l, azaz hogy $l \circ k = 1_C$ és $k \circ l = 1_{C'}$.

Az $l \circ k : C \longrightarrow C$ nyílra teljesülnek az alábbiak:

$$
\begin{aligned}
p_A \circ l \circ k &= p'_A \circ k = p_A \\
p_B \circ l \circ k &= p'_B \circ k = p_B
\end{aligned}
$$

Most vegyük figyelembe, hogy a szorzat definíciója szerint a

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "p_B"] & \\
A & C \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

diagram kizárólag akkor kommutatív, ha a pontozott nyíl helyén 1_C áll. Mivel az $l \circ k$ nyíllal a diagram kommutatív, így $l \circ k = 1_C$. Hasonlóan igazolható, hogy $k \circ l = 1_{C'}$. ♡

A szorzatok tehát egy egyértelmű izomorfizmus erejéig meghatározottak: ha C és C' egyaránt az A és B objektumok szorzata (esetleg különböző projekciókkal), akkor pontosan egy $C \longrightarrow C'$ izo nyíl létezik.

4.3.2. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathcal{C}$ kategóriában a T objektum terminális, akkor $\mathcal{C}$ tetszőleges A objektuma megfelel T és A szorzatának: az egyik projekció az egyetlen $!_A : A \longrightarrow T$, a másik pedig az 1_A nyíl.

Nyilak szorzata

Ha $A \times B$ a $\mathcal{C}$ kategória A és B objektumainak szorzata, akkor a szorzat definíciója szerint tetszőleges $f : D \longrightarrow A$, $g : D \longrightarrow B$ nyilak esetén pontosan egy $D \longrightarrow A \times B$ nyíl ltezik, amellyel a

$$
\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

diagram kommutatív. Ezt a nyilat $\langle f, g \rangle$ jelöli. Ha most $f : A \longrightarrow B$ és $g : A' \longrightarrow B'$ $\mathcal{C}$-beli nyilak, és léteznek $\mathcal{C}$-ben $A \times B$, $A' \times B'$ szorzatok, akkor az f és g nyilak szorzata az az egyetlen $A \times B \longrightarrow A' \times B'$ nyíl, amellyel a

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, dotted] & B \arrow[d, "g"] \\
A' & A' \times B' \arrow[l, "p_{A'}"] \arrow[r, "p_{B'}"'] & B
\end{tikzcd}
$$

diagram kommutatív. Ezt a nyilat $f \times g$ jelöli; nyilván $f \times g = \langle f \circ p_A, g \circ p_B \rangle$.

Az $f \times g$ nyil nem csupán f-től és g-től függ, hanem attól is, hogy melyik $A \times B$, illetve $A' \times B'$ szorzatot választjuk (és melyik projekciókat). Ha a szorzatokat rögzítettük, akkor persze $f \times g$ is egyértelmű. (Hasonló megjegyzés érvényes az $\langle f, g \rangle$ nyílra is.)

A következő feladatok megoldása ugyanazt a sémát követi: belátjuk, hogy az x nyíl rendelkezik bizonyos tulajdonsággal, amellyel – a szorzat definíciója szerint – csak az y nyíl rendelkezhet, majd levonjuk az $x = y$ következtetést. Kellemes szórakozást!

4.3.3. Igazoljuk, hogy $\langle p_A, p_B \rangle = 1_A \times 1_B = 1_{A \times B}$!

4.3.4. Tekintsük a

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[d, "h"] \arrow[lldd, "f \circ h"'] \arrow[rrdd, "g \circ h"] & & \\
 & & C \arrow[d, "\langle f,g \rangle"] \arrow[lld, "f"'] \arrow[rrd, "g"] & & \\
A & & A \times B \arrow[ll, "p_A"] \arrow[rr, "p_B"'] & & B
\end{tikzcd}$$

diagramot. Bizonyítsuk be, hogy $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$!

4.3.5. Tekintsük a

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] & B \\
E \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "\langle l,k \rangle"] \arrow[dr, "l"'] & A \times C \arrow[u, "p_A"] \arrow[d, "p_C"'] \arrow[r, "g \times f"] & B \times D \arrow[u, "p_B"'] \arrow[d, "p_D"] \\
 & C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

diagramot. Bizonyítsuk be, hogy $(g \times f) \circ \langle l, k \rangle = \langle g \circ l, f \circ k \rangle$!

4.3.6. Tekintsük a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
A \times A' \arrow[u, "p_A"] \arrow[d, "p_{A'}"'] \arrow[r, "f' \times f"] & B \times B' \arrow[u, "p_B"'] \arrow[d, "p_{B'}"] \arrow[r, "g' \times g"] & C \times C' \arrow[u, "p_C"'] \arrow[d, "p_{C'}"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

diagramot. Bizonyítsuk be, hogy $(g' \times g) \circ (f' \times f) = (g \circ f) \times (g' \circ f')$!

Többtényezős szorzatok

A halmazelméletben a rendezett hármasokat rendezett párokként definiáljuk: $\langle a, b, c\rangle = \langle\langle a, b\rangle, c\rangle$. Az $A \times B \times C$ „hármas Descartes-féle szorzatot" ennek mintájára értelmezhetjük a $A \times (B \times C)$ szorzatként – de ugyanígy választhatnánk a $(A \times B) \times C$ definíciót is. A két halmaz természetesen különbözik, mindazonáltal a

$$\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \mapsto \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$$

hozzárendelési szabállya bijektív függvényt adhatunk meg közöttük. A két halmaz tehát – mint a Set kategória két objektuma – izomorf.

Ez a megfigyelés általánosítható. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{C}$ kategóriában bármely két objektumnak létezik a szorzata. Ekkor tetszőleges A, B és C objektumok esetén az $(A \times B) \times C$ és a $A \times (B \times C)$ szorzatok izomorfak

4.3.7. Bizonyítsuk be! [A nem különösebben lélekemelő hajsza tárgya a

$$\begin{tikzcd}
(A\times B)\times C \arrow[rr, shift left] \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[ddrr] & & A\times(B\times C) \arrow[ll, shift left] \arrow[d] \arrow[dll] \arrow[ddll] \\
A\times B \arrow[d] \arrow[dr] & & B\times C \arrow[dl] \arrow[d] \\
A & B & C
\end{tikzcd}$$

diagram. Az angol nyelvű szakirodalomban ezt a szabadidős tevékenységet „diagram chasing" néven emlegeti.]

Ezen a módon természetesen tetszőleges *véges* szorzat értelmezhető. Ennél egyszerűbb és általánosabb a következő konstrukció. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ a $\mathcal{C}$ kategória objektumai. Egy C objektumot a $p_i : C \longrightarrow A_i$ nyilakkal (n darab nyílról van szó, amelyek közül az i-edik az A_i objektumba mutat) az $A_1, \ldots, A_n$ objektumok szorzatának nevezünk, ha teljesül a következő: tetszőleges C' objektum és $f : C' \longrightarrow A_i$ nyilak esetén pontosan egy $h : C' \longrightarrow C$ nyíl létezik, amellyel minden $1 \leq i \leq n$ esetén $f_i = p_i \circ h$. Ha létezik, akkor az így értelmezett szorzat is „egyértelmű izomorfizmus erejéig egyértelmű". Ha például egy „hármas szorzatot" választunk ki, akkor arra többnyire az $A \times B \times C$ jelölést használjuk.

4.3.8. Igazoljuk, hogy ha valamennyi szorzat létezik, akkor $A \times B \times C$ izomorf $(A \times B) \times C$-vel (és így $A \times (B \times C)$-vel is)!

Felmerülhet a kérdés: miféle struktúra egy egytényezős szorzat? Az iménti definíció (n helyében 1-gyel, A_1-et A-val jelölve) ezt adja: A szorzata olyan

C objektum egy p_A nyíllal, amelyre teljesül, hogy tetszőleges C' objektum és $f : C' \longrightarrow A$ esetén pontosan egy $h : C' \longrightarrow C$ nyíl létezik, amellyel $p_A \circ h = f$. Könnyen belátható, hogy a C, p_A páros szerepére az A, 1_A kettős tökéletesen megfelel – egy objektum „szorzata" tehát önmaga (és 1-nyila), illetve bármely vele izomorf objektum a megfelelő izo nyíllal. Mit mondhatunk, ha $n = 0$? A szorzat ilyenkor egy objektum (nyíl nélkül, hiszen nincs hova mutatni), amelybe bármely objektumból pontosan egy nyíl érkezik – azaz egy terminátor.

4.3.9. Hogyan értelmezzük az $f_1 : A_1 \longrightarrow B_i$ nyilak (ahol $i = 1, \dots n$) $f_1 \times \dots \times f_n$ szorzatát? Általánosítsunk néhányat a szorzatnyilakra vonatkozó állításaink közül!

Az iménti konstrukció tovább általánosítható, elvégre az indexhalmaz nem csupán egy $[1, n] = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ intervallum, de tetszőleges – akár végtelen – I halmaz is lehet. A konstrukció kifejtése az Olvasó számára nyilván nem jelent problémát, így – itt legalábbis – nem töltjük vele a drága felületet.

4.4. Összeg

Az összeg a szorzatnak megfelelő duális konstrukció; egy $\mathcal{C}$ kategóriában az A és B objektumok összegének nevezünk minden olyan S objektumot, amely a $\mathcal{C}^{op}$ duális kategóriában A és B szorzata.

4.4.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy S objektum az $i_A : A \longrightarrow S$, $i_B : B \longrightarrow S$ nyilakkal az A és B objektum összege, amennyiben teljesül, hogy tetszőleges S' objektum, valamint $f : A \longrightarrow S'$ és $g : B \longrightarrow S'$ nyilak esetén pontosan egy $h : S \longrightarrow S'$ nyíl létezik, amellyel a*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & S \arrow[d, "h"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& S' &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $h \circ i_A = f$ és $h \circ i_B = g$.

A nyilak és a kompozíciók megfordításával a szorzat esetében bizonyítottak mintájára igazolhatjuk, hogy az összeg – amennyiben létezik – „egyértelmű izomorfizmus erejéig" meghatározott. Ha az A és B objektumoknak létezik az összege, és választunk egyet közülük, akkor az $A + B$ jelölést használjuk. A definícióban szereplő, az S összeg, valamint az f és g nyilak által egyértelműen meghatározott h nyilat szokás $[f, g]$-vel jelölni.

A duális konstrukciók esetében bevett dolog a „ko-” előtag használata, így az összeget a szakirodalom gyakran koszorzatként emlegeti. Amikor azonban a duális objektumoknak saját nevük is van, akkor inkább azt használjuk.[1]

Példák

A Set kategóriában az összeg a diszjunkt unió – lényegében ezt mutattuk meg az 1.5. alfejezetben. Egy $A+B$ halmaznak megfelel az A és B halmazok $A' = \{\langle a, \varnothing\rangle : a \in A\}$ és $B' = \{\langle b, \{\varnothing\}\rangle : b \in B\}$ „diszjunkt kópiáinak” $A' \cup B'$ uniója; i_A és i_B az $x \mapsto \langle x, \varnothing\rangle$, illetve az $x \mapsto \langle x, \{\varnothing\}\rangle$ hozzárendelési szabállyal megadott (értelmeszerűen injektív) függvények[2] A definícióban szereplő h függvény hozzárendelési szabálya pedig:

$$x \mapsto \begin{cases} fx, \text{ ha } \langle x, \varnothing\rangle \in A' \\ gx, \text{ ha } \langle x, \{\varnothing\}\rangle \in B' \end{cases}$$

Abban a kategóriában, amelynek objektumai halmazok, a nyilak pedig $\subseteq$ „mentén” haladnak, az A és B objektumok egy összege olyan S halmaz, amelynek A és B egyaránt részhalmaza, és amelyre teljesül, hogy minden olyan halmaznak részhalmaza, amelynek A is B is részhalmaza. Ennek a leírásnak egyetlen objektum felel meg: az A és B halmazok $A \cup B$ uniója.

4.4.1. Lássuk be! Miért nem lehet két halmaznak két különböző – mindazonáltal „izomorf” – uniója?

Az intuicionista propozicionális logika következményfogalmából származtatott $\mathcal{L}_I^*$ kategóriában az A és B mondatok összege olyan S mondat, amely A-ból és B-ből egyaránt következik, és amelyre teljesül, hogy teszőleges C mondat esetén, amennyiben C az A és a B mondatból egyaránt következik, úgy C az S-ből is következik. Ez pontosan az alternáció (A vagy B, $A \vee B$) bizonyításelméleti (vagy ha úgy tetszik, strukturalista) értelmezése: az $A \vee B$ mondatra A-ból és B-ből is következtethetünk, és ha a C állítást A-ból és B-ből is le tudjuk vezetni, akkor$C$ az $A \vee B$ alternációból is levezethető. [Ha $B = \neg A$, akkor egy fontos speciális esetet kapunk, amely az intuicionista logikában nem, a klasszikus logikában azonban, ahol $A \vee \neg A$ „logikai igazság”, érvényes: ha C egy A mondatból és annak $\neg A$ tagadásából is következik, akkor C üres premisszahalmazból is levezethető, azaz „logikai igazság” (természetesen a klasszikus logika levezetés-értelmezése szerint). Ezt a szabályt *dilemmának* nevezzük.]

[1] A terminátorokat ennélfogva nem nevezzük „koiniciális” objektumoknak, ahogy az inciális objektumokat sem hívjuk koterminátornak, de még kokokoterminátornak sem.

[2] Ezeket magyarul „inklúzióknak is nevezhetnénk – innen az „i”.

Ha most $\mathcal{C}$ egy $\langle E, \leq \rangle$ előrendezésből származó kategória, akkor az A és B objektumok összege – amennyiben létezik – olyan S objektum, amelyre $A \leq S$ és $B \leq S$ mellett teljesül, hogy bármely, az $A \leq S'$ és $B \leq S'$ „egyenlőtlenségeknek" eleget tevő S' objektum esetén $S \leq S'$. Az ilyen objektumot A és B legkisebb felső korlátjának (magyarul *szuprémumának*) nevezzük.

Rögzítsük itt a következő definíciót: ha egy $\langle E, \leq \rangle$ részbenrendezésben (ez, mint emlékszünk, azt jelenti, hogy a $\leq$ reáció reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus) bármely két objektumnak létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja is, akkor a $\langle E, \leq \rangle$ struktúrát *hálónak* nevezzük. Egy $\langle E, \leq \rangle$ hálónak megfeltetett $\mathcal{C}$ kategóriában tehát bármely két objektum között legfeljebb egy nyíl halad (ez az antisszimmetria következménye), és bármely két objektumnak létezik *a* szorzata és *az* összege is. Ha az $\langle E, \leq \rangle$ struktúrában a fentieken túl van abszolút minimum és abszolút maximum, akkor korlátos hálónak nevezzük. A korlátosság kategóriaelméleti megfelelője – mint az könnyen ellenőrizhető – *a* terminális és *az* iniciális objektum létezése.

4.4.2. Magyarázzuk meg, miért használhattuk a határozott névelőket!

A megszámlálható köznevek kategóriájában már láttuk, hogy két objektum szorzata nem feltétlenül létezik. Ugyanez az összegről is elmondható. A KUTYA és a MACSKA CN-ek összege olyan XXX kellene hogy legyen, amelyre teljesülnek az alábbiak: minden, ami KUTYA, az XXX, és minden, ami MACSKA, az XXX, továbbá tetszőleges YYY CN esetén, ha minden, ami KUTYA, az YYY, és minden, ami MACSKA, az YYY, akkor minden, ami XXX, az YYY. Furcsa egy szó lenne – ha létezne...

Az összeg – miként a szorzat – az algebrai és a topologikus kategóriákban is ismert konstrukcióknak felel meg, ezeknek bemutatása azonban túlmutat könyvünk keretein, az érdeklődő Olvasónak a szakirodalom tanulmányozását ajánljuk.

Összegnyilak, véges összegek

Ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában az A és B, valamint a C és D objektumoknak is létezik összege, akkor a szorzatnyilak mintájára értelmezhetjük az $f : A \longrightarrow B$ és a $g : C \longrightarrow D$ nyilak $f + g$ összegét. Az $f + g$ összeg egyértelműségéhez természetesen rögzítenünk kell egy $A + C$ és egy $B + D$ összeget; ha ezt megtettük, akkor $f + g : B + D \longrightarrow A + C$ az az egyetlen nyíl, amelyet a pontozott nyíl helyére írva a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_A"'] & B \arrow[d, "i_B"] \\
A+C & B+D \arrow[l, dotted] \\
C \arrow[u, "i_C"] \arrow[r, "g"'] & D \arrow[u, "i_D"']
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

4.4.3. Mik az $[f, g]$ és az $f + g$ nyilakra vonatkozó duálisai a 4.3.3–6. feladatokban szereplő állításoknak?

A véges összegek értelmezése sem jelenthet különösebb nehézséget. Jegyezzük meg: ha nincs objektum, akkor a véges összeg – amennyiben létezik – iniciális objektum. Ennek belátását és az összeg tetszőleges indexhalmazra vonatkozó általánosítását az Olvasóra bízzuk.

4.5. Kiegyenlítő

A kiegyenlítők az absztrakt „megoldáshalmazok". Egy $fx = gx$ formában felírt egyenlet megoldáshalmaza az $\{x : fx = gx\}$ halmaz.

4.5.1 Definíció. *A $\mathcal{C}$ kategória két párhuzamos $f, g : A \longrightarrow B$ nyilának az $e : E \longrightarrow A$ nyíl egy kiegyenlítője, ha (i) $f \circ e = g \circ e$, és (ii) tetszőleges E' objektum és h nyíl esetén, amennyiben $f \circ h = g \circ h$, úgy létezik pontosan egy $u : F \longrightarrow E$ nyíl, amellyel $h = e \circ u$, azaz amellyel a*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, dotted, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

A (ii) tulajdonságot a kiegyenlítők univerzális tulajdonságának nevezzük. Az univerzális tulajdonság egyszerű következménye, hogy ha e kiegyenlítő, akkor 1_E az egyetlen olyan nyíl, amellyel e-t jobbról komponálva e-t kapjuk.

4.5.1. Mi a helyzet, ha a fenti definícióban $f = g$?

A kiegyenlítők – miként a szorzatok – egyértelmű izomorfizmus erejéig meghatározottak.

4.5.2. Állítás. *Ha az* $e : E \longrightarrow A$ *nyíl az* $f, g : A \longrightarrow B$ *nyilak egy kiegyenlítője, az* $i : E' \longrightarrow E$ *nyíl pedig izo, akkor az* $e \circ i : E' \longrightarrow A$ *nyíl szintén* f *és* g *egy kiegyenlítője.*

Bizonyítás: Mivel $f \circ e = g \circ e$, azért $f \circ e \circ i = g \circ e \circ i$ is teljesül. Az univerzális tulajdonság igazolásához tegyük fel, hogy egy F objektum és egy $h : F \longrightarrow A$ nyíl esetén $f \circ h = g \circ h$. Azt kell igazolni, hogy ekkor pontosan egy $u : F \longrightarrow E'$ nyíl létezik, amellyel $e \circ i \circ u = h$. Az e kiegyenlítő univerzális tulajdonsága szerint létezik pontosan egy $v : F \longrightarrow E$ nyíl, amellyel $e \circ v = h$.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d, shift left, "i"] & F \arrow[l, "u"'] \arrow[dl, "v"] \arrow[d, "h"] & \\
E \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Az u nyíl szerepére ekkor $i^{-1} \circ v$ megfelelő választás: $e \circ i \circ u = e \circ i \circ i^{-1} \circ v = e \circ v = h$. Annak igazolásához, hogy legfeljebb egy ilyen u létezhet, tegyük fel, hogy az $u' : F \longrightarrow E'$ nyíllal is fennáll $e \circ i \circ u' = h$. Ekkor persze $e \circ (i \circ u') = h$ is fennáll, a v nyíl egyértelműsége miatt így $i \circ u' = v$, amiből $i^{-1} \circ i \circ u' = i^{-1} \circ v$, azaz $u' = i^{-1} \circ v = u$. ♡

4.5.3. Állítás. *Ha egy* $\mathcal{C}$ *kategória* $f, g : A \longrightarrow B$ *nyilainak* $e : E \longrightarrow A$ *és* $e' : E' \longrightarrow A$ *egyaránt kiegyenlítője, akkor* E *és* E' *a* $\mathcal{C}$ *kategória izomorf objektumai.*

Bizonyítás: Mivel $e : E \longrightarrow A$ kiegyenlítő, az univerzális tulajdonsága miatt létezik egyetlen olyan $k : E \longrightarrow E'$ nyíl, amellyel $e' \circ k = e$; hasonlóan: mivel $e' : E' \longrightarrow A$ kiegyenlítő, létezik egyetlen $l : E' \longrightarrow E$ nyíl, amellyel $e \circ l = e'$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dd, shift right, "k"'] \arrow[dr, "e"] & & \\
& A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
E' \arrow[uu, shift right, "l"'] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Természetes gondolat, hogy k és l izo nyilak – és valóban ez a helyzet. Azt kell tehát belátnunk, hogy $l \circ k = 1_E$ és hogy $k \circ l = 1_{E'}$. Az $l \circ k : E \longrightarrow E$ nyílra: $e \circ l \circ k = e' \circ k = e$. A kiegyenlítő univerzális tulajdonsága miatt azonban 1_E

az egyetlen olyan nyíl, amellyel $e \circ 1_E = e$, így $l \circ k$ csak 1_E lehet. Hasonlóan igazolható, hogy $k \circ l = 1_{E'}$. ♡

A Set kategóriában az $f, g : A \longrightarrow B$ nyilak kiegyenlítője az az $e : E \longrightarrow A$ nyíl, amelyben $E = \{x \in A : fx = gx\}$ halmaz és $e = 1_A|_E$ nyíl (az 1_A függvény E-re való leszűkítése). Ha ugyanis $h : C \longrightarrow A$ olyan függvény, amellyel $f \circ h = g \circ h$, akkor valóban pontosan egy $k : C \longrightarrow E$ függvény létezik, amellyel a

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dotted, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

4.5.2. Bizonyítsuk be, hogy az egyetlen jó választás: $k = h$.

4.5.3. Igazoljuk, hogy egy $\langle E, \leq \rangle$ részbenrendezésből származtatott kategóriában pontosan az 1-nyilak a kiegyenlítők!

A Set kategóriában a tehát az $f, g : A \longrightarrow B$ nyilak kiegyenlítője olyan injektív függvény, amely az A halmaz egy részhalmazán van értelmezve. Ennek a megfigyelésnek az általánosítása a következő,

4.5.4. Állítás. *Legyen az $e : E \longrightarrow A$ az $f, g : A \longrightarrow B$ nyilak egy kiegyenlítője. Akkor (i) e mono; (ii) az f és g bármelyik $e' : E' \longrightarrow B$ kiegyenlítője esetén $e \sim e'$, e és e' tehát A ugyanazon részobjektumának elemei.*

BIZONYÍTÁS: (i) Annak igazolásához, hogy e mono, tegyük fel, hogy egy C objektum és a $k, l : C \longrightarrow E$ nyilak esetén $e \circ k = e \circ l$. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $k = l$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, dotted, bend left, "m"] \arrow[u, shift left, "k"'] \arrow[u, shift right, "l"] \arrow[ur, "e \circ l = k \circ e"'] & &
\end{tikzcd}$$

Az $e \circ l : C \longrightarrow A$ nyílra teljesül, hogy $f \circ (e \circ l) = g \circ (e \circ l)$, így – mivel e kiegyenlítő – pontosan egy $m : C \longrightarrow E$ nyíl létezik, amellyel $e \circ m = e \circ l$. Mivel ez az egyenlőség m helyében k-val és l-lel is fennáll, azt kapjuk, hogy $k = l$. (ii) Azt kell bizonyítani, hogy léteznek olyan $m : E \longrightarrow E'$ és $n : E' \longrightarrow E$ nyilak, amelyekkel $e \circ m = e'$ és $n \circ e' = e$. Ehhez elég ha felidézzük: amennyiben $e : E \longrightarrow A$ és $e' : E' \longrightarrow A$ egyaránt f és g kiegyenlítői, akkor E és E' izomorf objektumok. Az izo nyílpár e-t és e'-t „átfaktoráltatja" egymáson. ♡

Ha egy nyíl mono és epi, akkor nem feltétlenül izo. Az epi kiegyenlítők azonban azok:

4.5.5. Állítás. *Legyen az* $e : E \longrightarrow A$ *nyíl a* $g, f : A \longrightarrow B$ *nyilak egy kiegyenlítője. Ha* e *epi, akkor izo.*

BIZONYÍTÁS: Mivel e kiegyenlítő, $f \circ e = g \circ e$, ha e epi, akkor ebből $f = g$ következik. Ezek szerint $f \circ 1_A = g \circ 1_A$, létezik tehát pontosan egy $k : A \longrightarrow E$ nyíl, amellyel $e \circ k = 1_A$. Már csak azt kell belátnunk, hogy ezzel a k-val $k \circ e = 1_E$ is teljesül. Ehhez elég észrevenni, hogy $e \circ (k \circ e) = e = e \circ 1_A$, így ha e epi, akkor $k \circ e = 1_A$ is teljesül. ♡

Az $f : A \longrightarrow B$ nyilat *regulárisnak* nevezzük, ha létezik olyan $g, h : B \longrightarrow C$ nyílpár, amelynek f kiegyenlítője. Egy mono nyíl nem feltétlenül reguláris, a Set kategóriában azonban ez a helyzet.

4.5.4. Legyen $f : A \longrightarrow B$ injektív függvény (azaz mono Set-beli nyíl). Értelmezzünk egy $g, h : B \longrightarrow \{0, 1\}$ függvénypárt a következőképpen: $gx = 1$ minden $x \in B$ esetén; h hozzárendelési szabálya pedig a következő:

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \operatorname{Im} f \\ 0, & \text{ha } x \notin \operatorname{Im} f \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy az f függvény a g, h függvénypár kiegyenlítője!

Egy osztott mono nyíl ugyanakkor mindig reguláris.

4.5.5. Legyen $f : A \longrightarrow B$ osztott mono; legyen $g : B \longrightarrow A$ az f egy balinverze. Igazoljuk, hogy ekkor f a $g, 1_B$ nyílpár egy kiegyenlítője! [Ezzel van egy újabb bizonyításunk arra, hogy ha egy osztott mono nyíl epi, akkor izo.]

4.6. Ko-kiegyenlítő

A ko-kiegyenlítők a kiegyenlítők „duálisai": egy $\mathcal{C}$ kategória ko-kiegyenlítői a $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ duális kategória kiegyenlítői.

4.6.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $q : B \longrightarrow Q$ *nyíl az* $f, g : A \longrightarrow B$ *nyilak egy ko-kiegyenlítője, ha (i)* $q \circ f = \circ g$*, továbbá (ii) tetszőleges* C *objektum és* $h : B \longrightarrow C$ *nyíl esetén, amennyiben* $h \circ g = h \circ f$*, úgy létezik pontosan egy* $k : Q \longrightarrow C$ *nyíl, amellyel az*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & Q \arrow[d, dotted, "k"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $h = k \circ q$.

A (ii) tulajdonság a ko-kiegyenlítők univerzális tulajdonsága. A dualitás elve alapján minden további cécó nélkül kijelenthetjük: a ko-kiegyenlítők (egy egyértelmű) izomorfizmus erejéig meghatározottak, minden ko-kiegyenlítő epi, és minden mono ko-kiegyenlítő izo.

A reguláris mono nyilak mintájára egy $\mathcal{C}$ kategóriában az f nyilat *reguláris epinek* nevezzük, ha van olyan g, g nyílpár, amelynek f a ko-kiegyenlítője. A Set kategóriában – ahol minden mono reguláris mono – az is igaz, hogy minden epi reguláris epi.

Ko-kiegyenlítők és ekvivalenciarelációk

Ako-kiegyenlítők az ekvivalenciarelációkkal állnak intim kapcsolatban. Mint emlékszünk, egy E halmazon értelmezett R reláció (azaz $E \times E$ egy részhalmaza) ekvivalenciareláci, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz tetszőleges $x, y, z \in E$ esetén (i) $\langle x, x \rangle \in R$, (ii) ha $\langle x, y \rangle \in R$, akkor $\langle y, x \rangle \in R$ és (iii) ha $\langle x, y \rangle \in R$ és $\langle y, z \rangle \in R$, akkor $\langle x, z \rangle \in R$. Azt, hogy $\langle x, y \rangle \in R$, néha így jelöljük: xRy.

Ha az E halmazon értelmezett R reláció ekvivalenciareláció, akkor R az E halmazt diszjunkt részhalmazokra – ekvivalenciaosztályokra – osztja, amelyeknek elemei E egymással R relációban álló elemei. Az 1. alfejezetben már láttuk, hogy ilyenkor E minden eleme pontosan egy ekvivalenciaosztálynak eleme, azt az ekvivalenciaosztályt, amelynek x eleme, $[x]$, az ekvivalenciaosztályok halmazát pedig E/R jelöli. Világos, hogy tetszőleges $x, y \in E$ esetén (i) $x \in [x]$, (ii) $[x] = [y]$ pontosan akkor, ha xRy, és (iii) ha $[x] \neq [y]$, akkor $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Lássunk egy példát. Legyen $k \in \mathbb{Z}$; a $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezhetünk egy R_k relációt a következőképpen: mR_kn pontosan akkor, ha $k|m-n$. Ez ekvivalenciareláció; a $\mathbb{Z}/R_k$ ekvivalenciaosztályok elemei olyan egész számok, amelyek k-val osztva ugyanazt a maradékot adják. (Azt, hogy mR_kn, a számelméletben így jelölik: $m \equiv n\ (k)$, az ekvivalenciosztályokat pedig (modulo k) maradékosztályoknak nevezik.)

4.6.1. Hány eleme van a $\mathbb{Z}/R_k$ halmaznak?

Ha R az E halmazon értelmezett ekvivalenciareláció, akkor azt az $f_R : E \longrightarrow E/R$ függvényt, amely E minden eleméhez az őt (elemként) tartalmazó ekvivalenciaosztályt rendeli, az R reláció *természetes leképezésének* nevezzük. Az $R \subseteq E \times E$ halmazon – ugyancsak „természetes" módon – értelmezzünk két függvényt: p_1 minden rendezett párhoz annak első, p_2 pedig a második tagját rendeli. Mindezen – az Olvasó türelmét próbára tevő – előkészületek után kimondhatjuk első fontos megfigyelésünket: *ha* $R \subseteq E \times E$ *ekvivalenciareláció, akkor az* f_R *természetes leképezés a* p_1 *és* p_2 *pro-*

jekciók ko-kiegyenlítője. Mivel tetszőleges $\langle x, y\rangle \in R$ esetén $f_R(x) = f_R(y)$, azt kapjuk, hogy $f_R \circ p_1 = f_R \circ p_2$. Az univerzális tulajdonság igazolásához meg kell mutatnunk, hogy a

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & E \arrow[r, "f_R"] \arrow[dr, "h"'] & E/R \arrow[d, dotted, "k"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

diagramban pontosan egy függvény játszhatja el k szerepét. Világos, hogy k csak olyan függvény lehet, amelyre teljesül, hogy $k([x]) = h(x)$ tetszőleges $x \in E$ esetén. Definiáljuk tehát a k függvényt így: $k([x]) = h(x)$ valamely $x \in [x]$ esetén. A definíció értelmes, azaz nem függ attól hogy az $[x]$ ekvivalenciaosztály melyik $x \in [x]$ „reprezentánsát" választjuk: ha ugyanis $x, x' \in [x]$, akkor $\langle x, x'\rangle \in R$, $p_1(\langle x, x'\rangle) = x$, $p_2(\langle x, x'\rangle) = x'$, és így $h \circ p_1 = h \circ p_2$ miatt $h(x) = h(x')$.

Ko-kiegyenlítők a halmazok kategóriájában

Lássuk most, mi két tetszőleges Set-beli nyíl ko-kiegyenlítője. Legyen $f, g : A \longrightarrow B$ két függvény; f és g meghatároznak egy $R \subseteq B \times B$ relációt:

$$R = \{\langle x, y\rangle \in B \times B : \text{ van olyan } z \in A, \text{ amelyre } fz = x \text{ és } gz = y\}$$

Az R reláció általában nem ekvivalenciareláció – megadható azonban az a legszűkebb ekvivalenciareláció, amely R-t tartalmazza (vagyis az az R^* reláció, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $R' \subseteq B \times B$ ekvivalenciareláció esetén, amennyiben $R \subseteq R'$, úgy $R' \subseteq R^*$). Lássuk, miként „konstruálható" meg az R^* reláció. Első lépésben definiáljuk az R^1 relációt így:

$$R^1 = R \cup \Delta_B \cup R^{op},$$

ahol $\Delta_B = \{\langle x, x\rangle : x \in B\}$ (erre az 1. fejezetből nyilván emlékszik az Olvasó), R^{op} pedig az a reláció, amelynek elemei az R-beli rendezett párok „megfordítottjai": $\langle x, y\rangle \in R^{op}$ pontosan akkor, ha $\langle y, x\rangle \in R$. Az így definiált R^1 relációt R *reflexív és szimmetrikus lezártjának* nevezzük: ez a legszűkebb R-t tartalmazó reflexív és szimmetrikus reláció.

4.6.2. Bizonyítsuk be, hogy valóban ez a helyzet! [Egy $S \subseteq F \times F$ reláció pontosan akkor reflexív, ha $\Delta_F \subseteq S$, és pontosan akkor szimmetrikus, ha $S = S^{op}$.]

Már csak a tranzitivitást kell kikényszerítenünk. Első lépésben definiáljunk egy R^2 relációt így:

$$R^2 = \{\langle x, y\rangle \in B \times B : \text{ létezik } z \in B, \text{ hogy } \langle x, z\rangle \in R^1 \text{ és } \langle z, y\rangle \in R^1\},$$

xR^2y tehát pontosan akkor, ha x-ből két R^1-lépésben eljuthatunk y-ba. [Azaz: $R^2 = R^1 \circ R^1$ – az R^1 reláció önmagával vett kompozíciója.] Az eljárást folytatva, ha az R^k relációt (ahol $k > 0$) már definiáltuk, akkor legyen

$$R^{k+1} = \{\langle x, y\rangle \in B \times B : \text{ létezik } z \in B, \text{ hogy } \langle x, z\rangle \in R^k \text{ és } \langle z, y\rangle \in R^k\}.$$

Végül legyen R^* az így definiált R^i relációk uniója:

$$R^* = \bigcup_{i>0} R^i,$$

xR^*y tehát pontosan akkor, ha x-ből véges számú R^1-lépésben y-ba érkezhetünk. Nyilvánvaló, hogy R^* tranzitív (két véges R^1-út egymásutánja is véges R^1-út), R^1 definícióját is figyelembe véve a reflexivitás és a tranzitivitás is teljesül – R^* tehát ekvivalenciareláció.

4.6.3. Bizonyítsuk be, hogy R^* valóban a legszűkebb R-t tartalmazó ekvivalenciareláció!

Legyen most $q : B \longrightarrow B/R^*$ természetes leképezés; belátjuk, hogy q *az f és g függvény ko-kiegyenlítője.* Ha $x, y \in B$ esetén $\langle x, y\rangle \in R^*$, akkor $qx = qy$, ugyanez nyilván akkor is teljesül, ha $\langle x, y\rangle \in R \subseteq R^*$. Ez utóbbi viszont – R definíciója szerint – pontosan azt jelenti, hogy minden $x \in B$ esetén $q(fx) = q(gx)$, azaz $q \circ f = q \circ g$.

A kiegyenlítő univerzális tulajdonságának bizonyításához tegyük fel, hogy a $h : B \longrightarrow C$ függvényre teljesül $h \circ f = h \circ g$. Azt kell igazolnunk, hogy ekkor pontosan egy $k : B/R^* \longrightarrow C$ nyíl létezik, amellyel a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & B/R^* \arrow[d, dotted, "k"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Ha $x \in B$, akkor a k függvénynek az $[x]$ ekvivalenciaosztályhoz a hx függvényértéket kell rendelnie. Ahhoz, hogy így valóban megadhassunk egy függvényt, „mindössze” azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $x, x' \in B$ esetén abból, hogy xR^*x', következik, hogy $h(x) = h(x')$. [Ahhoz, hogy ténylegesen függvényt adjunk meg, annak is teljesülnie kell, hogy E/R^* egyetlen eleme sem üres – ez viszont csak úgy fordulhat elő, ha maga E is üres, ebben az esetben pedig a kép meglehetősen egyszerűvé válik. Pontosan mi a helyzet, ha $E = \varnothing$?] A legegyszerűbb eset az, amikor xRx', akkor ugyanis per definitionem létezik $z \in A$, amellyel $fz = x$ és $gz = x'$, így $h(x) = h(fz) = h(gz) = h(x')$ – itt kihasználtuk, hogy $h \circ f = h \circ g$. Ha

x és x' olyan, hogy $x'Rx$, akkor ugyanez a helyzet, ha pedig $x = x'$, akkor nyilván $h(x) = h(x')$ – ezzel beláttuk, hogy $xR^1x' \Rightarrow h(x) = h(x')$. Ha pedig valamely k esetén abból, hogy xR^kx', következik, hogy $h(x) = h(x')$, akkor ugyanez a következtetés $k+1$ esetén is levonható: ha ugyanis $xR^{k+1}x'$, akkor van olyan $x'' \in B$, hogy xR^kx'' és $x''R^kx'$, így fennáll $h(x) = h(x'')$ és $h(x'' = h(x')$, és így természetesen $h(x) = h(x')$ is. Ezzel (teljes indukcióval) beláttuk, hogy minden k-ra $xR^kx' \Rightarrow h(x) = h(x')$, így ugyanez a konklúzió az R^k relációk uniójára, azaz R^*-ra is áll.

4.7. Pullback

A pullback a speciális objektumok és nyilak tárgyalásában a természetes következő lépés: a szorzatok és a kiegyenlítők egyaránt „előállnak” speciális pullbackként.

4.7.1 Definíció. *Legyen* $f : A \longrightarrow C$ *és* $g : B \longrightarrow C$ *a* $\mathcal{C}$ *kategória két, azonos végpontú nyila. Azt mondjuk, hogy a* P *objektum a* $p_1 : P \longrightarrow A$ *és* $p_2 : P \longrightarrow C$ *nyilakkal az*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

„sarok” egy pullbackje, ha (i) a

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $f \circ p_1 = g \circ p_2$*, továbbá (ii) tetszőleges* D *objektum és* $k : D \longrightarrow A$, $l : D \longrightarrow B$ *nyilak esetén, amennyiben* $f \circ k = g \circ l$*, úgy létezik egyetlen* $u : D \longrightarrow P$ *nyíl, amellyel a*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
 & P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
 & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, azaz $p_1 \circ u = k$ *és* $p_2 \circ u = l$.

Az Olvasó meg fog lepődni: a (ii) tulajdonság a pullback *univerzális tulajdonsága.* Azt, hogy a P objektum a p_1 és p_2 nyilakkal – esetenként ezeket is *projekcióknak* nevezik – az f és a g nyíl pullbackje, így jelöljük:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Az ilyen négyzeteket „pullback-négyzetnek” nevezzük.

4.7.1. Tekintsük egy $\mathcal{C}$ kategória tetszőleges $f : A \longrightarrow B$ nyilát. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

diagram pullback-négyzet!

A pullbackre is igaz, hogy – amennyiben létezik – egyértelmű izomorfizmus erejéig meghatározott; ennek bizonyítását azonban most az Olvasóra hagyjuk.

4.7.2. Legyen a $\mathcal{C}$ kategóriában

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

egy pullback-négyzet. Ekkor (i) ha $i : P' \longrightarrow P$ izomorfizmus, akkor

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "p_2 \circ i"] \arrow[d, "p_1 \circ i"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

szintén pullback négyzet; és (ii) ha

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

ugyanazon sarok pullbackje, akkor P és Q izomorf objektumok.[Az izomorfizmust természetesen a pullback univerzális tulajdonsága által „kikényszerített" nyílpárnak köszönhető.]

A következő állítás szerint minden pullback megkonstruálható egy szorzat kiegyenlítőjeként – feltéve persze, hogy a megfelelő szorzat, illetve kiegyenlítő létezik.

4.7.2. Állítás. *Ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában bármely két objektum szorzata és tetszőleges párhuzamos nyílpár kiegyenlítője létezik, akkor $\mathcal{C}$-ben minden saroknak van pullbackje.*

Bizonyítás: Tekintsük tehát $f : A \longrightarrow C$ és $g : B \longrightarrow C$ nyilakat. A feltétel szerint létezik (legalább egy) $A \times B$ szorzat a $p_A : A \times B \longrightarrow A$ és $p_B : A \times B \longrightarrow B$ projekciókkal. Legyen $e : E \longrightarrow A \times B$ az $f \circ p_A$ és a $g \circ p_B$ nyilak kiegyenlítője. Belátjuk, hogy ekkor

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p_B \circ e"] \arrow[d, "p_A \circ e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

pullback-négyzet. Az, hogy a négyzet kommutatív, azaz teljesül a pullback (i) tulajdonsága, automatikusan teljesül: mivel e kiegyenlítő, azért $f \circ p_A \circ e = g \circ p_B \circ e$. A pullback univerzális tulajdonságának ellenőrzéséhez legyenek $k : D \longrightarrow A$ és $l : D \longrightarrow B$ olyan nyilak, amelyekkel $f \circ k = g \circ l$. Azt kell belátni, hogy pontosan egy $u : D \longrightarrow E$ nyíl létezik, amellyel $p_A \circ e \circ u = k$ és $p_B \circ e \circ u = l$.

A k és az l nyilak, valamint az $A \times B$ szorzat egyértelműen meghatározzák a $\langle k, l\rangle : D \longrightarrow A \times B$ nyilat, amelyre – mint emlékszünk – egyaránt teljesül $p_A \circ \langle k, l\rangle = k$ és $p_B \circ \langle k, l\rangle = l$. Ekkor $f \circ p_A \circ \langle k, l\rangle = f \circ k = g \circ l = g \circ p_B \circ \langle k, l\rangle$, a $\langle k, l\rangle$ nyíl tehát kielégíti az e kiegyenlítő univerzális tulajdonságának feltételét. Létezik tehát egyetlen $m : D \longrightarrow E$ nyíl, amellyel $e \circ m = \langle k, l\rangle$. Az Olvasó ezen a ponton szükségét érezheti, hogy vázolja magának, mi is az ábra... Valami ilyesmi:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\langle k, m\rangle"'] \arrow[rrrd, bend left, "m"] \arrow[rrd, "u"] \arrow[rrdd, "k"'] & A \times B \arrow[rrd, "p_B"] \arrow[rdd, "p_A"] & & \\
& & E \arrow[ul, "e"] \arrow[r, "p_B \circ e"'] \arrow[d, "p_A \circ e"] & B \arrow[d, "g"] \\
& & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Ekkor fennáll $p_A \circ e \circ m = p_A \circ \langle k, l\rangle = k$ és $p_B \circ e \circ m = p_B \circ \langle k, l\rangle = l$ is, az m nyíl tehát megfelelő választás lehet u szerepére.

Hogy a lehetőség bizonyossággá váljon, már csak azt kell igazolnunk, hogy egyetlen ilyen nyíl létezhet. Legyen tehát $m' : D \longrightarrow E$ olyan nyíl, amellyel

$p_A \circ e \circ m' = k$ és $p_A \circ e \circ m' = l$. A szorzat univerzális tulajdonsága miatt ekkor $e \circ m' = \langle k, l\rangle$, amiből – mivel $e \circ m = \langle k, l\rangle$ – azt kapjuk $e \circ m' = e \circ m$. Már csak arra kell hivatkoznunk, hogy e – mint minden kiegyenlítő – mono, és levonhatjuk a következtetést: $m = m'$. ♡

A bizonyítás alapján nyilvánvaló, hogy egy sarok pullbackje valóban egyértelmű izomorfizmus erejéig meghatározott – ez a kiegyenlítő és a szorzat hasonló tulajdonságainak következménye.

Absztrakt inverz képek és absztrakt metszetek

Az állítás ugyanakkor azt is megmutatja, hogyan gondoljunk egy pullbackre a Set kategóriában: ha a

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Set-beli sarok pullbackje a

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

diagram, akkor $D = \{\langle x, y\rangle \in A \times B : f(x) = g(y)\}$, p_1 és p_2 pedig rendre a p_A és p_B projekciók D-re való leszűkítései. Ha $q : D' \longrightarrow A$ és $r : D' \longrightarrow B$ nyilakra $f \circ q = g \circ r$, akkor az $s(z) = \langle q(z), r(z)\rangle$ hozzárendelési szabály éppen az univerzális tulajdonság által megkövetelt $D' \longrightarrow D$ függvényt adja meg.

Legyen most $f : A \longrightarrow B$ egy függvény, C pedig B egy részhalmaza. Mint emlékszünk, a C halmaz f szerinti $\overset{-1}{f}(C)$ inverz képe az A halmaz azon x elemeinek halmaza, amelyekre $fx \in C$, azaz

- tetszőleges x-re $x \in \overset{-1}{f}(C)$ pontosan akkor, ha $fx \in C$.

Ha most $1_B|_C : C \longrightarrow B$ az 1_B identitás C-re való leszűkítése, akkor a

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \arrow[d, "1_B|_C"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

pullbackben $P = \{\langle x, y\rangle \in A \times C : f(x) = 1_B|_C(y)\} = \{\langle x, y\rangle \in A \times C : f(x) = y\}$, a P halmaz tehát olyan rendezett párokból áll, amelyeknek első tagjai éppen az $\overset{-1}{f}(C)$ halmazt alkotják. Az első tagokat éppen a pullback bal oldali nyila képezi, így ezt a nyilat C – félig – absztrakt inverz képének is nevezhetjük. Világos, hogy az f' függvény csak $f|_{\overset{-1}{f}(C)} : \overset{-1}{f}(C) \longrightarrow B$ lehet.

A szituáció tetszőleges kategóriára általánosítható. Mint emlékszünk, a részobjektumok mono nyilak ekvivalenciaosztályai; a mono tulajdonságot pedig a pullbackek megőrzik:

4.7.3. Állítás. *Ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában a $g : B \longrightarrow C$ nyíl mono, akkor tetszőleges*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

pullbackben a g' nyíl is mono.

Úgy is mondhatjuk: „egy mono nyilat bármely nyíl mentén visszahúzva mono nyilat kapunk". [Ez lenne a pullback elnevezés magyarázata.]

Bizonyítás: Legyenek $h_1, h_2 : D \longrightarrow P$ olyan nyilak, amelyekkel $g' \circ h_1 = g' \circ h_2$. Ekkor $g \circ f' \circ h_1 = f \circ g' \circ h_1 = f \circ g' \circ h_2 = g \circ f' \circ h_2$, amiből – kihasználva, hogy g mono – arra következtethetünk, hogy $f' \circ h_1 = f' \circ h_2$ is teljesül. Az $f' \circ h_1$ és a $g' \circ h_1$ nyilakra tehát teljesül $g \circ f' \circ h_1$ és $f \circ g' \circ h_2$; a pullback univerzális tulajdonsága szerint pontosan egy olyan h nyíl létezik, amellyel $f' \circ h = f' \circ h_1$ és $g' \circ h = g' \circ h_1$. Mivel e két egyenlőség nem csak h_1-gyel, de h_2-vel is teljesül, az egyértelműség diktátuma: $h_1 = h_2$. ♡

A fenti pullbackben a g' nyilat a g nyíl f menti (absztrakt) inverzének nevezzük, és $f^{-1}(g)$-vel jelöljük; a P objektum a C objektum f szerinti (absztrakt) inverz képe, jelölése $f^{-1}C$. (Hasonló a terminológia minden olyan pullback esetében, amelyben a függőleges nyilak mono nyilak.)

A fenti, • jellel kiemelt állítás absztrakt analogonja a következő,

4.7.4. Állítás. *Legyen egy $\mathcal{C}$ kategóriában $f : A \longrightarrow B$ tetszőleges, $g : C \longrightarrow B$ pedig mono nyíl. Akkor tetszőleges D objektum és $k : D \longrightarrow A$ nyíl esetén $k \subseteq f^{-1}(g)$ pontosan akkor, ha $f \circ k \subseteq g$.*

Bizonyítás: Tekintsük az alábbi diagramot (amelyben a négyzet a feltétel szerint pullback). Ha $k \subseteq f^{-1}(g)$, akkor van olyan $l : D \longrightarrow f^{-1}(g)$, amellyel $l = f^{-1}(g) \circ k$.

Akkor viszont az $m = f' \circ l$ nyíllal a

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "l"] \arrow[drr, bend left, "m=f'\circ l"] \arrow[ddr, "k"'] & & \\
& f^{-1}(C) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f^{-1}(g)"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

diagramban a „külső négyszög" kommutatív, így $g \circ m = f \circ k$, azaz valóban $f \circ k \subseteq g$. Megfordítva, ha van olyan m nyíl, amellyel a külső négyszög kommutatív (azaz amely biztosítja, hogy $f \circ x \subseteq g$), akkor – mivel a „belső" négyzet pullback – létezik egyetlen l, amely az egész diagramot kommutatívvá teszi, így speciálisan fennáll $f^{-1}(g) \circ l = k$ is. ♡

4.7.3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában az $f : A \longrightarrow C$ nyíl mono, akkor egy

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

pullbackben az f' nyíl csak mono lehet.

Ha most $f : A \longrightarrow B$ és $g : C \longrightarrow B$ egyaránt mono nyilak, és létezik legalább egy

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

pullbackjük (amelyben mind a négy nyíl mono), akkor annak bal felső csúcsát A és C *absztrakt metszetének,* a belőle induló „átlós" nyilat pedig f és g absztrakt metszetének – jelölése: $f \cap g$ – tekinthetjük. Az elnevezést indokolja a következő egyszerű megfigyelés: tetszőleges D objektum és $k : D \longrightarrow A$ nyíl esetén $k \subseteq f$ és $k \subseteq g$ pontosan akkor, ha $k \subseteq f \cap g$.

4.7.4. Mutassuk meg, hogy valóban ez a helyzet!

Szorzat és kiegyenlítő mint pullback

A pullback általánosságát mutatja, hogy a pullbackek létezéséből a szorzatok és a kiegyenlítők létezése is következik – csupán annyit kell feltennünk, hogy a vizsgált $\mathcal{C}$ kategóriában terminátor is van.

4.7.5. Állítás. *Ha a $\mathcal{C}$ kategóriában van terminátor, akkor amennyiben minden saroknak létezik pullbackje, úgy tetszőleges A és B objektumoknak létezik szorzata.*

Bizonyítás: Legyen T a $\mathcal{C}$ kategória egy terminátora, legyenek továbbá A és B tetszőleges objektumok. Tekintsük most a

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "!_B"] \\ A \arrow[r, "!_A"'] & T \end{tikzcd}$$

sarkot. [$!_A$ és $!_B$ – mint emlékszünk – az egyetlen $A \longrightarrow T$, illetve $B \longrightarrow T$ nyilat jelöli.] Bebizonyítjuk, hogy e sarok

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "!_B"] \\ A \arrow[r, "!_A"'] & T \end{tikzcd}$$

pullbackje egyúttal szorzatdiagram is. Legyenek tehát $k : C \longrightarrow A$ és $l : C \longrightarrow B$ tetszőleges $\mathcal{C}$-beli nyilak. Ekkor $!_A \circ k = !_B \circ l$ automatikusan teljesül, így a pullback univerzális tulajdonsága miatt létezik pontosan egy $m : c \longrightarrow P$ nyíl, amellyel $p_1 \circ m = k$ és $p_2 \circ m = l$. A P objektum tehát – a p_1 és p_2 nyilakkal – megfelel mindannak, amit egy $A \times B$ szorzattól megkövetelünk. ♡

4.7.6. Állítás. *Ha a $\mathcal{C}$ kategóriában minden saroknak létezik pullbackje, akkor bármely párhuzamos nyílpárnak van kiegyenlítője.*

Bizonyítás: Legyenek $f, g : A \longrightarrow B$ nyilak; az előző állítás szerint létezik egy $B \times B$ szorzat is. Tekintsük az

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\langle 1_B, 1_B \rangle"] \\ A \arrow[r, "\langle f, g \rangle"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

sarkot, belátjuk, hogy e sarok tetszőleges

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "\langle 1_B, 1_B \rangle"] \\ A \arrow[r, "\langle f, g \rangle"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

pullbackjében a bal oldali (nem véletlenül e-vel jelölt) nyíl f és g kiegyenlítője. [A pullback-négyzet felső, k-val jelölt nyila „csupán” statisztaszerepet játszik, mindazonáltal – mint látni fogjuk – nélkülözhetetlen mellékszereplő.]

Az e nyíl a kiegyenlítő definíciójának (i) feltételét kielégíti: $f \circ e = p_B \circ \langle f, g \rangle \circ e = g \circ e$. Az univerzális tulajdonság teljesülésének igazolásához tegyük fel, hogy egy $h : C \longrightarrow A$ nyílra fennáll $f \circ h = g \circ h$. Ekkor a h, $f \circ h$ nyílpárhoz a pullback univerzális tulajdonsága alapján létezik egyetlen $m : C \longrightarrow E$ nyíl, amellyel $e \circ m = h$ és $k \circ m = f \circ h$. [Itt az ideje rajzolni...] Az első egyenlőség szerint az m nyíl tudja, amit a kiegyenlítő univerzális tulajdonsága által megkövetelt nyílnak mindenképpen tudnia kell, már csak az egyértelműség bizonyítása van hátra. Legyen tehát $m' : C \longrightarrow E$ olyan, hogy $e \circ m' = h$. Egy ilyen m'-vel

$$\begin{aligned} k \circ m' &= 1_B \circ k \circ m' = p_B \circ \langle 1_B, 1_B \rangle \circ k \circ m' = p_B \circ \langle f, g \rangle \circ e \circ m' = \\ &= p_B \circ \langle 1_B, 1_B \rangle \circ e \circ m = p_B \circ \langle 1_B, 1_B \rangle \circ k \circ m = 1_B \circ k \circ m = k \circ m, \end{aligned}$$

Az m' nyíllal tehát egyrészt $e \circ m' = h$, másrészt $k \circ m' = f \circ h$ – mivel azonban a m az egyetlen nyíl, amelyre ezek teljesülnek, azt kapjuk, hogy $m = m'$. ♡

4.7.5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

pullback, akkor az e nyíl az f és g nyilak kiegyenlítője!

Az utóbbi három állítást így foglalhatjuk össze: ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában van terminátor, akkor a következők ekvivalensek:
– $\mathcal{C}$-ben létezik bármely két objektum szorzata (és így minden véges szorzat) és bármely két nyíl kiegyenlítője;
– minden $\mathcal{C}$-beli saroknak létezik pullbackje.

A pullback lemma

A pullbackek egy gyakran használt tulajdonságát mondja ki a következő, nevezetes állítás. Azt, hogy valóban nevezetes, az jelzi, hogy neve is van: *pullback lemma.*

4.7.7. Állítás. (Pullback lemma) *Tegyük fel, hogy a*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "l"] \\ D \arrow[r, "h"'] & E \arrow[r, "i"'] & F \end{tikzcd}$$

diagramban a jobb oldali négyzet pullback-négyzet. Ekkor a bal oldali négyzet pontosan akkor pullback, ha a teljes téglalap is az (az $i \circ h$ *és az* l *nyíl alkotta saroké).*

Bizonyítás: (i) Tegyük fel először, hogy a bal oldali négyzet pullback; legyenek $m : G \longrightarrow C$ és $n : G \longrightarrow D$ olyan nyilak, amelyekkel $l \circ m = i \circ h \circ n$; azt kell igazolnunk, hogy pontosan egy olyan $G \longrightarrow A$ nyíl, amelynek a $g \circ f$ nyíllal vett kompozíciója éppen m, a j nyíllal vett kompozíciója pedig n. Mivel a jobb oldali négyzet pullback, azért – az m és a $h \circ n$ nyilakhoz – létezik egyetlen $u : G \longrightarrow B$ nyíl, amellyel $g \circ u = m$ és $k \circ u = h \circ n$. Mivel a bal oldali négyzet pullback, azért – az u és az n nyilakhoz – pontosan egy $v : G \longrightarrow A$ létezik, amellyel $j \circ v = n$ és $f \circ v = u$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dashed, "v"] \arrow[drr, dotted, "u"] \arrow[drrr, "m"] \arrow[ddr, "n"'] & & & \\
& A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "j"] & B \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "k"] & C \arrow[d, "l"] \\
& D \arrow[r, "h"'] & E \arrow[r, "i"'] & F
\end{tikzcd}$$

Az utóbbi egyenlőségből $g \circ f \circ v = g \circ u = m$, így $m = (g \circ f) \circ v$ és $n = j \circ v$ egyaránt teljesül. Azt kell már csak belátni, hogy v az egyetlen olyan nyíl, amely ezt a két egyenlőséget kielégíti. Tegyük fel tehát, hogy a $v' : D \longrightarrow A$ nyíllal is fennáll $m = (g \circ f) \circ v'$ és $n = j \circ v'$. Az $f \circ v'$ nyílra ekkor az u nyíl mindkét tulajdonsága teljesül – $g \circ (f \circ v') = m$ és $k \circ (f \circ v') = h \circ n$ – így u egyértelműsége miatt $f \circ v' = u$. Eszerint tehát a v' nyíllal a v nyilat kitűntető mindkét karakterisztikus egyenlőség teljesül, v egyértelműsége miatt így $v = v'$.

(ii) Tegyük fel most, hogy a külső téglalap pullback, belátjuk, hogy a bal oldali négyzet is az. Legyenek tehát $m : G \longrightarrow B$ és $n : G \longrightarrow D$ olyan nyilak, amelyekkel $k \circ m = h \circ n$. Ekkor $i \circ h \circ n = i \circ k \circ m = l \circ g \circ m$ is teljesül. Mivel a külső téglalap pullback, a $g \circ m$ és az n nyilakhoz létezik pontosan egy $u : G \longrightarrow A$, amellyel $n = j \circ u$ és $g \circ m = g \circ f \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, "m"] \arrow[drrr, bend left, "g \circ m"] \arrow[ddr, "n"'] & & & \\
& A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "j"] & B \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "k"] & C \arrow[d, "l"] \\
& D \arrow[r, "h"'] & E \arrow[r, "i"'] & F
\end{tikzcd}$$

Az u nyíl ekkor éppen a pullback univerzális tulajdonsága által megkövetelt egyetlen nyíl. Ha ugyanis egy $u' : G \longrightarrow A$ nyíllal teljesül $j \circ u' = n$ és $f \circ u' = m$ is, akkor az utóbbi egyenlőségből azt kapjuk, hogy $g \circ f \circ u' = g \circ m$ is fennáll – az u' nyíl tehát kielégíti az u-t kitűntető mindkét egyenlőséget. Mivel ilyen nyíl csak egy van, $u = u'$. ♡

4.7.6. Bizonyítsuk be, hogy ha a

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

diagramban a téglalap és az alsó négyzet pullback, akkor a felső négyzet is az!

Pushout

A pushout a pullback duális párja. A Q objektumot a $q_1 : B \longrightarrow Q$ és a $q_2 : C \longrightarrow Q$ nyilakkal a közös kezdőpontból induló $f : A \longrightarrow B$, $f : A \longrightarrow C$ nyilak *pushoutjának* nevezzük, ha a

$$\begin{tikzcd}
Q & C \arrow[l, "q_2"'] \\
B \arrow[u, "q_1"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, továbbá tetszőleges $s : A \longrightarrow Q'$ és $t : C \longrightarrow Q'$ nyilak esetén pontosan egy $k : Q \longrightarrow Q'$ nyíl létezik, amellyel fennáll $k \circ q_1 = s$ és $k \circ q_2 = t$, azaz amellyel a

$$\begin{tikzcd}
Q' & & \\
& Q \arrow[ul, dotted, "k"] & C \arrow[l, "q_2"] \arrow[ull, "t"'] \\
& B \arrow[u, "q_1"'] \arrow[uul, "s"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

A pushoutok ebben a könyvben nem játszanak különösebben fontos szerepet, az érdeklődő Olvasó elbíbeblődhet azzal, hogy „dualizálja” a pullbackekkel kapcsolatos fogalomalkotások, illetve a rájuk vonatkozó állítások egyikét-másikát.

4.8. Exponenciális

Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, A és B pedig $\mathcal{C}$ (nem feltétlenül különböző) objektumai. Mint emlékszünk, az A-ból induló, B-be érkező $\mathcal{C}$-beli nyilak halmazát

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ jelöli (az indexet – amennyiben nem okoz félreértést – általában elhagyjuk).

Gyakran előfordul, hogy a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ összesség – esetleg a megfelelő, rajta értelmezet struktúrával – szintén eleme a C kategóriának. Nyilvánvalóan ez a helyzet a halmazok és a függvények Set kategóriájában: ha A és B halmazok, akkor halmaz az A-n értelmezett B-be érkező függvények összessége is. Ezt a halmazt általában B^A jelöli; a jelölés magyarázata, hogy ha az A halmaznak n, a B halmaznak pedig m eleme van, akkor B^A elemeinek száma éppen m^n.

Legyen most $\langle A, \leq_A\rangle$ és $\langle B, \leq_B\rangle$ az előrendezett halmazok kategóriájának két objektuma. Akkor a $\mathrm{Hom}(A, B)$ halmaz elemei az A-n értelmezett, B-be érkező monoton függvények. Ezen a halmazon – amely nyilván a B^A halmaz részhalmaza – értelmezhető egy $\leq_*$ részbenrendezés: $f \leq_* g$ pontosan akkor, ha minden $x \in A$ esetén $fx \leq_B gx$.

Hasonlóan, ha $\langle F_1, \diamond_1\rangle$ és $\langle F_2, \diamond_2\rangle$ a félcsoportok kategóriájának objektumai, akkor a $\mathrm{Hom}(F_1, F_2)$ halmazon (az $F_1 \longrightarrow F_2$ homomorfizmusok halmazán) értelmezhetünk egy asszociatív $\diamond_*$ műveletet így: ha $f, g : F_1 \longrightarrow F_2$ félcsoport-homomorfizmusok, akkor a $h = f \diamond_* g$ hozzárendelési szabálya: $x \mapsto fx \diamond_2 gx$.

4.8.1. Igazoljuk, hogy az utóbbi két példában valóban a megfelelő kategória egy objektumát kaptuk!

A példákban „nyíl-objektumokat" bizonyos halmazok elemeire hivatkozva értelmeztük – a kategóriaelméleti általánosításban ezt valahogyan meg kell kerülnünk. Az általánosítás motivációját a halmazok kategóriája adja. A B^A halmazzal ugyanis egyúttal adott egy $ev_{A,B} : B^A \times A \longrightarrow B$ függvény is, amelynek hozzárendelési szabálya: $\langle f, x\rangle \mapsto fx$. A döntő megfigyelés a következő: az így értelmezett $ev_{A,B}$ függvény a $C \times A \longrightarrow B$ függvények között rendelkezik egy „univerzális" tulajdonsággal: tetszőleges $g : C \times A \longrightarrow B$ függvény esetén pontosan egy olyan $\hat{g} : C \longrightarrow B^A$ függvény létezik, amellyel a

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[dr, "ev_{A,B}"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, "\hat{g} \times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. A $\hat{g} \times 1_A$ függvény – a szorzat tárgyalásakor kifejtett általános definíciónak megfelelően – egy $\langle c, a\rangle \in C \times A$ párhoz a $\langle \hat{g}(c), a\rangle \in B^A \times A$ párt rendeli. A $\hat{g} : C \longrightarrow B^A$ függvény értelmezésének alapja, hogy egy szorzathalmazon értelmezett függvény „egyik argumentumát rögzítve" a szorzat másik „tényezőjén" értelmezett függvényt kapunk. Ez esetünkben a következőt jelenti: tetszőleges $c \in C$ egyértelműen meghatározza azt a $g_c : A \longrightarrow B$ függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya: $x \mapsto g(\langle c, x \rangle)$. Ha most a $\hat{g} : C \times A \longrightarrow B^A$ függvényt így adjuk meg: $\hat{g}(x) = g_x$, akkor tetszőleges $\langle c, a \rangle \in C \times A$ esetén $ev_{A,B}(\langle \hat{g} \times 1_A(\langle x, y \rangle), y \rangle) = ev_{A,B}(\langle g_c, a \rangle) = g(\langle c, a \rangle)$, azaz $g = ev_{A,B} \circ (\hat{g} \times 1_A)$, az iménti diagram tehát valóban kommutatív. Könnyen ellenőrizhető végül, hogy az így definiált $\hat{g}$ az egyetlen olyan függvény, amellyel diagramunk kommutatív.

Készen állunk immár az általános definíció megfogalmazására.

4.8.1 Definíció. *Legyenek $\mathcal{C}$ olyan kategória, amelyben tetszőleges két objektumnak létezik szorzata; legyenek A és B $\mathcal{C}$-beli objektumok. Azt mondjuk, hogy egy X objektum az $ev_{A,B} X \times A \longrightarrow B$ nyíllal az A és B objektumok exponenciálisa, ha tetszőleges C objektum és $g : C \times A \longrightarrow B$ nyíl esetén pontosan egy olyan $\hat{g} : C \longrightarrow X$ nyíl létezik, amelyre teljesül, hogy $g = ev_{A,B} \circ (\hat{g} \times 1_A)$, azaz amellyel a*

$$\begin{tikzcd}
X \times A \arrow[dr, "ev_{A,B}"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, "\hat{g} \times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

A $\hat{g}$ nyilat a g nyíl *exponenciális adjungáltjának* nevezzük. Az elnevezés magyarázatára a 6. fejezetben térünk vissza, ahol azt is belátjuk majd, hogy az exponenciálisok – miként a terminátorok, a szorzatok, az egyenlítők, a pullbackek és duálisaik – egyértelmű izomorfizmus erejéig meghatározottak. Ha a definíciót kielégítő X objektumok közül kiválasztunk egyet, akkor azt általában B^A jelöli.

4.8.2. Fejtsük ki részletesen, mit jelent az „egyértelmű izomorfizmus erejéig egyértelmű" kitétel az exponenciálisok esetében!

4.8.2. Állítás. *Ha egy $\mathcal{C}$ kategóriában bármely két objektumnak létezik exponenciálisa, akkor a $g \mapsto \hat{g}$ hozzárendelési szabály tetszőleges A, B, és C objektumok, és bármely $C \times A$ szorzat, illetve B^A exponenciális esetén egy $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B^A)$ bijektív függvényt ad meg.*

BIZONYÍTÁS: A hozzárendelés nyilván szürjektív: ha $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B^A)$, azaz $h : C \longrightarrow B^A$ nyíl, akkor – mint az könnyen ellenőrizhető – a h az $ev_{A,B} \circ (h \times 1_A)$ nyíl exponenciális adjungáltja. Ha pedig a $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C \times A, B)$ nyilak $\hat{g}$ és $\hat{h}$ exponenciális adjungáltjai megegyeznek, akkor $g = ev_{A,B} \circ (\hat{g} \times 1_A) = ev_{A,B} \circ (\hat{h} \times 1_A) = h$, a hozzárendelés tehát injektív. ♡

A halmazos analógiát mélyíti el a következő megjegyzés. Ha a $\mathcal{C}$ kategóriában létezik T terminális objektum, akkor minden A objektum esetén $1 \times A$ és A izomorf. Jelölje az (egyetlen) $T \times A \longrightarrow A$ izo nyilat i. Ha most rögzítjük az A és B objektumok egy B^A exponenciálisát, akkor bármely $f : A \longrightarrow B$ nyíl egyértelműen meghatározza az $\widehat{f \circ i}$ nyíl exponenciális adjungáltját, azaz $\widehat{f \circ i} : 1 \longrightarrow B^A$ nyilat. Ezt a nyilat – az A^B exponenciális egy absztrakt „elemét" – f *neveként* emlegetik, jelölése általában ‘f‘; ‘f‘ tehát az az egyetlen nyíl, amellyel a

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[dr, "ev_{A,B}"] & \\
& B \\
T \times A \arrow[uu, "`f` \times 1_A"] \arrow[ur, "f \circ i"'] &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

4.8.3. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az A objektum tetszőleges $k : T \longrightarrow A$ absztrakt eleme esetén $ev_{A,B} \circ \langle `f`, k \rangle = f \circ k$!

A kondicionális mint exponenciális

A propozicionális logikai konstansok kategóriaelméleti jellemzése már majdnem teljes: már láttuk, hogy a falsum a megfelelő kategóriában iniciális, a verum terminális objektumként, a konjunkció szorzatként, az alternáció pedig összegként értelmezhető. Könnyen kitalálható, mi lesz a kondicionális kategóriaelméleti megfelelője.

Vizsgáljuk meg tehát, mi lehet az intuicionista propozicionális logikából származtatott $\mathcal{L}_I^*$ kategóriában az A és B objektumok (mondatok) exponenciálisa! Ebben a kategóriában, mint emlékszünk, az, hogy létezik $X \longrightarrow Y$ nyíl azt jelenti, hogy az Y mondat az X-ből következik, azaz az Y mondat levezethető az egyelemű $\{X\}$ premisszahalmazból. A szóban forgó exponenciálisra (jelöljük K-val) (i) egyrészt teljesül, hogy létezik $K \times A \longrightarrow B$ nyíl, azaz – emlékezve, hogy a szorzat a konjunkciónak felel meg – a $K \,\&\, A$ mondatból A következik, másrészt (ii) tetszőleges C mondat esetén fennáll, hogy ha $C \,\&\, A$ mondatból következik a B mondat, akkor C-ből következik K; (i) a definícióban szereplő ev, (ii) pedig a $\hat{g}$ nyíl létezésének következménye; az egyértelműség az $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{*}$ kategóriában automatikusan teljesül, hiszen – mint emlékszünk – bármely két objektum között legfeljebb egy nyíl halad. A K mondat tehát pontosan azt tudja, amit az $A \supset B$ kondicionálistól elvárunk: (i) A és $A \Rightarrow B$ alapján B levezethető (a levezetés egyetlen lépése a modus ponens alkalmazása); ha pedig C-ből és A-ból levezethető B, akkor C-ből levezethető $A \supset B$ is. Az utóbbi a dedukciótétel speciális esete, hiszen a premisszahalmaz egyelemű – ez azonban alig csorbítja az általánosságot, elvégre bármely *véges* premisszahalmaz helyettesíthető az elemek konjunkciójával.