Még mindig Drakula, aztán mehetünk tovább

2024. november 29.

Házi feladat volt

185. Tegyük fel, hogy egy erdélyi a következőket állítja:

1. Egészséges vagyok.
2. Hiszek abban, hogy Drakula gróf halott.

Megtudhatnánk-e ebből, hogy él-e Drakula?

Házi feladat volt

185. Tegyük fel, hogy egy erdélyi a következôket állítja:

1. Egészséges vagyok.
2. Hiszek abban, hogy Drakula gróf halott.

Megtudhatnánk-e ebből, hogy él-e Drakula?

186. Tegyük fel, hogy egy erdélyi a következőket állítja:

1. Ember vagyok.
2. Ha ember vagyok, akkor Drakula gróf még él.

Megtudhatnánk-e ebből, hogy él-e Drakula?

Van, amit már tudunk

Ne felejtsük el, hogy a következőket már meg tudjuk oldani:

Van, amit már tudunk

Ne felejtsük el, hogy a következőket már meg tudjuk oldani:

187. Ki tudná-e találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy vámpír vagy nem?

Van, amit már tudunk

Ne felejtsük el, hogy a következőket már meg tudjuk oldani:

187. Ki tudná-e találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy vámpír vagy nem?

188. Ki tudná-e találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy egészséges vagy nem?

Ne felejtsük el, hogy a következőket már meg tudjuk oldani:

187. Ki tudná-e találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy vámpír vagy nem?

188. Ki tudná-e találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy egészséges vagy nem?

189. Tudna-e olyat kérdezni egy erdélyitől, amire az illető „Igen”-t válaszol, függetlenül attól, hogy a négy típus melyikébe tartozik?

Ne felejtsük el, hogy a következőket már meg tudjuk oldani:

187. Ki tudná-e találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy vámpír vagy nem?

188. Ki tudná-e találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy egészséges vagy nem?

189. Tudna-e olyat kérdezni egy erdélyitől, amire az illető „Igen”-t válaszol, függetlenül attól, hogy a négy típus melyikébe tartozik?

Igazából ez is volt már:

190. Megtudhatja-e egyetlen kérdéssel egy erdélyitől, hogy él-e még Drakula gróf?

Drakula kastélyában

Drakula kastélyában

Ha már ennyit tudunk, eljuthattunk Drakula gróf kastélyába.
Itt előkelő erdélyiek vannak, akik nem használják az ‘igen’ és ‘nem’ szavakat.
Helyette ‘Bű’ van és ‘Bá’ – persze nem tudjuk, melyik melyik.
Smullyan előttünk jár – próbáljuk meg követni.

Drakula kastélyában

Ha már ennyit tudunk, eljuthattunk Drakula gróf kastélyába.
Itt előkelő erdélyiek vannak, akik nem használják az ‘igen’ és ‘nem’ szavakat.
Helyette ‘Bű’ van és ‘Bá’ – persze nem tudjuk, melyik melyik.
Smullyan előttünk jár – próbáljuk meg követni.

191. Egyetlen kérdéssel (amire „Bű” vagy „Bá” a válasz) ki tudom találni bárkiről a kastélyban, hogy vámpír-e.

Drakula kastélyában

Ha már ennyit tudunk, eljuthattunk Drakula gróf kastélyába.
Itt előkelő erdélyiek vannak, akik nem használják az ‘igen’ és ‘nem’ szavakat.
Helyette ‘Bű’ van és ‘Bá’ – persze nem tudjuk, melyik melyik.
Smullyan előttünk jár – próbáljuk meg követni.

191. Egyetlen kérdéssel (amire „Bű” vagy „Bá” a válasz) ki tudom találni bárkiről a kastélyban, hogy vámpír-e.

192. Egyetlen kérdéssel ki tudom találni, hogy egészséges-e.

Drakula kastélyában

Ha már ennyit tudunk, eljuthattunk Drakula gróf kastélyába. Itt előkelő erdélyiek vannak, akik nem használják az 'igen' és 'nem' szavakat.
Helyette 'Bű' van és 'Bá' – persze nem tudjuk, melyik melyik.
Smullyan előttünk jár – próbáljuk meg követni.

191. Egyetlen kérdéssel (amire „Bű" vagy „Bá" a válasz) ki tudom találni bárkiről a kastélyban, hogy vámpír-e.

192. Egyetlen kérdéssel ki tudom találni, hogy egészséges-e.

193. Egyetlen kérdéssel ki tudom találni, hogy a „Bű" mit jelent.

Drakula kastélyában

Ha már ennyit tudunk, eljuthattunk Drakula gróf kastélyába.
Itt előkelő erdélyiek vannak, akik nem használják az ‘igen’ és ‘nem’ szavakat.
Helyette ‘Bű’ van és ‘Bá’ – persze nem tudjuk, melyik melyik.
Smullyan előttünk jár – próbáljuk meg követni.

191. Egyetlen kérdéssel (amire „Bű” vagy „Bá” a válasz) ki tudom találni bárkiről a kastélyban, hogy vámpír-e.

192. Egyetlen kérdéssel ki tudom találni, hogy egészséges-e.

193. Egyetlen kérdéssel ki tudom találni, hogy a „Bű” mit jelent.

195. Egyetlen kérdéssel ki tudom találni, hogy él-e még Drakula! Ön is?

Drakula életveszélyes rejtvénye

Kutatásaink eredménye: Drakula él, mégpedig őrült vámpír. A következő rejtvényt adja föl:
Mondjon olyan S mondatot, amelynek megvan a következő tulajdonsága:
Tetszőleges X mondat és tetszőleges erdélyi válaszoló esetén, ha az „Igaz-e $S \leftrightarrow X$?" kérdésre 'Bű' választ kapunk, akkor X igaz, ha pedig 'Bá' választ kapunk, X hamis.

Drakula életveszélyes rejtvénye

Kutatásaink eredménye: Drakula él, mégpedig őrült vámpír. A következő rejtvényt adja föl:
Mondjon olyan S mondatot, amelynek megvan a következő tulajdonsága:
Tetszőleges X mondat és tetszőleges erdélyi válaszoló esetén, ha az „Igaz-e $S \leftrightarrow X$?” kérdésre ‘Bű’ választ kapunk, akkor X igaz, ha pedig ‘Bá’ választ kapunk, X hamis.

S: „Ön megbízható $\leftrightarrow$ ‘Bű’ igent jelent”

Drakula életveszélyes rejtvénye

Kutatásaink eredménye: Drakula él, mégpedig őrült vámpír. A következő rejtvényt adja föl:
Mondjon olyan S mondatot, amelynek megvan a következő tulajdonsága:
Tetszőleges X mondat és tetszőleges erdélyi válaszoló esetén, ha az „Igaz-e $S \leftrightarrow X$?" kérdésre 'Bű' választ kapunk, akkor X igaz, ha pedig 'Bá' választ kapunk, X hamis.

S: „Ön megbízható $\leftrightarrow$ 'Bű' igent jelent"

Smullyan megoldása: Egy erdélyi 1-es típusú, ha az 'Igaz-e, hogy $2 * 2 = 4$?' kérdésre a 'Bű' választ adja, 2-es, ha nem.
S: 'Ön 1-es típusú'. Azaz: az 'Igaz, e, hogy (Ön 1-es típusú $\leftrightarrow X$)? kérdés jó lesz.
Bizonyítás: igazságtáblázattal.

Klubok és kémek

260. Mi a hiba ebben a történetben?

„A település lakói különböző klubokat alakítottak. Egy lakos több klubnak is tagja lehet. Mindegyik klubot valamelyik lakosról nevezték el, és nincs két olyan klub, ami ugyanarról a lakosról lenne elnevezve. Minden lakosról neveztek el klubot. Nem szükségszerű, hogy valaki tagja legyen a róla elnevezett klubnak; ha tagja, akkor azt mondják rá, hogy *barátságos*; ha nem, akkor azt, hogy *barátságtalan*. A település érdekessége, hogy a barátságtalan emberek halmaza éppen egy klub."

260. Mi a hiba ebben a történetben?

„A település lakói különböző klubokat alakítottak. Egy lakos több klubnak is tagja lehet. Mindegyik klubot valamelyik lakosról nevezték el, és nincs két olyan klub, ami ugyanarról a lakosról lenne elnevezve. Minden lakosról neveztek el klubot. Nem szükségszerű, hogy valaki tagja legyen a róla elnevezett klubnak; ha tagja, akkor azt mondják rá, hogy *barátságos*; ha nem, akkor azt, hogy *barátságtalan*. A település érdekessége, hogy a barátságtalan emberek halmaza éppen egy klub."

261.

„Ugyanúgy, mint a másik településen, nekünk is vannak klubjaink. Minden lakosról pontosan egy klubot neveztek el és minden klubot elneveztek valakiről. Nálunk ha valaki tagja egy klubnak, akkor ezt teheti nyíltan vagy titokban. Aki nem nyílt tag a róla elnevezett klubban, azt *gyanúsnak* mondják. Ha valaki titkos tagja a róla elnevezett klubnak, akkor azt *kémnek* nevezik. Különös sajátsága településünknek, hogy a gyanús egyének halmaza éppen egy klub".

Az, hogy valaki gyanús, úgy értendő, hogy vagy egyáltalán nem tagja a róla elnevezett klubnak, vagy pedig kém.

Van-e kém a településen?

A halmazok veszedelmes világa

A halmazok veszedelmes világa

262. A világegyetem problémája. Egy bizonyos világegyetem – amelyben a lakosok *bármelyik* részhalmazának egy klub felel meg – irattárosa szeretne minden klubot egy lakosról elnevezni oly módon, hogy ne legyen két klub ugyanarról a lakosról elnevezve, és minden lakoshoz legyen egy róla elnevezett klub.

Miért nem fog neki sikerülni?

262. A világegyetem problémája. Egy bizonyos világegyetem – amelyben a lakosok *bármelyik* részhalmazának egy klub felel meg – irattárosa szeretne minden klubot egy lakosról elnevezni oly módon, hogy ne legyen két klub ugyanarról a lakosról elnevezve, és minden lakoshoz legyen egy róla elnevezett klub.

Miért nem fog neki sikerülni?

263.

Egy bizonyos matematikusnak van egy könyve, az ún. *Halmazok könyve*. Minden oldalán egy számhalmaz leírása szerepel. A „szám" szón most a pozitív egész számokat értjük:

1,2,3...n, ...

Egy olyan halmazt, amelyik szerepel valamelyik oldalon, *felsorolt* halmaznak nevezünk. Az oldalak számozása folyamatos.

A feladat egy olyan halmaz megadása, ami nem szerepel a könyv egyik oldalán sem!

Hogyan számolunk meg véges halmazokat?

Hogyan számolunk meg véges halmazokat?

Ha egy halmaz elemeit meg tudjuk címkézni az $\{1,\ 2,\ 3\}$ halmaz elemeivel, akkor hány eleme van?

Hogyan számolunk meg véges halmazokat?

Ha egy halmaz elemeit meg tudjuk címkézni az $\{1, 2, 3\}$ halmaz elemeivel, akkor hány eleme van?

Címkézés: minden számot felhasználunk, de mindegyiket csak egyszer, és minden elem kap címkét.

Hogyan számolunk meg véges halmazokat?

Ha egy halmaz elemeit meg tudjuk címkézni az $\{1, 2, 3\}$ halmaz elemeivel, akkor hány eleme van?

Címkézés: minden számot felhasználunk, de mindegyiket csak egyszer, és minden elem kap címkét.

Matematikai nyelven: kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk a két halmaz között.

Hogyan számolunk meg véges halmazokat?

Ha egy halmaz elemeit meg tudjuk címkézni az $\{1,\ 2,\ 3\}$ halmaz elemeivel, akkor hány eleme van?

Címkézés: minden számot felhasználunk, de mindegyiket csak egyszer, és minden elem kap címkét.

Matematikai nyelven: <u>kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést</u> létesítünk a két halmaz között.

Használhatjuk a $\{1,\ 2,\ 3\}$ helyett a $\{0,\ 1,\ 2\}$ halmazt, és kinevezhetjük ezt a halmazt a 3 szám(reprezentánsá)nak.

Hogyan számolunk meg véges halmazokat?

Ha egy halmaz elemeit meg tudjuk címkézni az $\{1,\ 2,\ 3\}$ halmaz elemeivel, akkor hány eleme van?

Címkézés: minden számot felhasználunk, de mindegyiket csak egyszer, és minden elem kap címkét.

Matematikai nyelven: kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk a két halmaz között.

Használhatjuk a $\{1,\ 2,\ 3\}$ helyett a $\{0,\ 1,\ 2\}$ halmazt, és kinevezhetjük ezt a halmazt a 3 szám(reprezentánsá)nak.

Általában: tekinthetjük úgy, hogy minden természetes szám a nála kisebb természetes számok halmaza.

Hogyan számolunk meg véges halmazokat?

Ha egy halmaz elemeit meg tudjuk címkézni az $\{1,\ 2,\ 3\}$ halmaz elemeivel, akkor hány eleme van?

Címkézés: minden számot felhasználunk, de mindegyiket csak egyszer, és minden elem kap címkét.

Matematikai nyelven: kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk a két halmaz között.

Használhatjuk a $\{1,\ 2,\ 3\}$ helyett a $\{0,\ 1,\ 2\}$ halmazt, és kinevezhetjük ezt a halmazt a 3 szám(reprezentánsá)nak.

Általában: tekinthetjük úgy, hogy minden természetes szám a nála kisebb természetes számok halmaza.

Egy halmaz akkor n elemű, ha az n számmal hozható kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe.

Számoljuk meg a végtelent!

Számoljuk meg a végtelent!

Hány eleme van egy olyan halmaznak, amelynek az elemeit az összes természetes szám felhasználásával tudjuk megcímkézni?

Számoljuk meg a végtelent!

Hány eleme van egy olyan halmaznak, amelynek az elemeit az összes természetes szám felhasználásával tudjuk megcímkézni?

Nevezzük ezt a végtelen számot ω-nak és azokat a halmazokat, amelyeknek ω számú eleme van, megszámlálhatóan végtelennek.

Számoljuk meg a végtelent!

Hány eleme van egy olyan halmaznak, amelynek az elemeit az összes természetes szám felhasználásával tudjuk megcímkézni?

Nevezzük ezt a végtelen számot ω-nak és azokat a halmazokat, amelyeknek ω számú eleme van, megszámlálhatóan végtelennek.

Hány egész szám van (a negatívakat is beleértve)?

Számoljuk meg a végtelent!

Hány eleme van egy olyan halmaznak, amelynek az elemeit az összes természetes szám felhasználásával tudjuk megcímkézni?

Nevezzük ezt a végtelen számot ω-nak és azokat a halmazokat, amelyeknek ω számú eleme van, megszámlálhatóan végtelennek.

Hány egész szám van (a negatívakat is beleértve)?

A szultán minden nap berak két aranyat a kincstárába. Minden éjjel jön egy tolvaj, és elvisz egy aranyat. n nap után hány arany lesz a kincstárban?

Számoljuk meg a végtelent!

Hány eleme van egy olyan halmaznak, amelynek az elemeit az összes természetes szám felhasználásával tudjuk megcímkézni?

Nevezzük ezt a végtelen számot ω-nak és azokat a halmazokat, amelyeknek ω számú eleme van, megszámlálhatóan végtelennek.

Hány egész szám van (a negatívakat is beleértve)?

A szultán minden nap berak két aranyat a kincstárába. Minden éjjel jön egy tolvaj, és elvisz egy aranyat. n nap után hány arany lesz a kincstárban?

És ω nap után?

Számoljuk meg a végtelent!

Hány eleme van egy olyan halmaznak, amelynek az elemeit az összes természetes szám felhasználásával tudjuk megcímkézni?

Nevezzük ezt a végtelen számot ω-nak és azokat a halmazokat, amelyeknek ω számú eleme van, megszámlálhatóan végtelennek.

Hány egész szám van (a negatívakat is beleértve)?

A szultán minden nap berak két aranyat a kincstárába. Minden éjjel jön egy tolvaj, és elvisz egy aranyat. n nap után hány arany lesz a kincstárban?

És ω nap után?

Mi van akkor, ha a tolvaj nem az aznap betett aranyak közül visz el egyet, hanem a legrégebben ottlevőt (vagy a legrégebben ottlevők közül egyet)?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik egy turistabusz végtelen sok utassal. Mit csináljon a portás?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik egy turistabusz végtelen sok utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik végtelen sok turistabusz, mindegyik végtelen sok utassal. Őket is el tudja helyezni a portás?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik egy turistabusz végtelen sok utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik végtelen sok turistabusz, mindegyik végtelen sok utassal. Őket is el tudja helyezni a portás?

Hány természetes számokból álló számpár van?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik egy turistabusz végtelen sok utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik végtelen sok turistabusz, mindegyik végtelen sok utassal. Őket is el tudja helyezni a portás?

Hány természetes számokból álló számpár van?
Még mindig csak $\omega(= \omega * \omega)$, mert egy kétdimenziós táblázatot be tudunk járnni cikkcakkban.

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik egy turistabusz végtelen sok utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik végtelen sok turistabusz, mindegyik végtelen sok utassal. Őket is el tudja helyezni a portás?

Hány természetes számokból álló számpár van?
Még mindig csak $\omega (= \omega * \omega)$, mert egy kétdimenziós táblázatot be tudunk járnni cikkcakkban.

Egy kétbetűs ábécéből hány n hosszúságú szót tudunk kirakni?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik egy turistabusz végtelen sok utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik végtelen sok turistabusz, mindegyik végtelen sok utassal. Őket is el tudja helyezni a portás?

Hány természetes számokból álló számpár van?
Még mindig csak $\omega (= \omega * \omega)$, mert egy kétdimenziós táblázatot be tudunk járnni cikkcakkban.

Egy kétbetűs ábécéből hány n hosszúságú szót tudunk kirakni?
2^n-t.

És hány végtelen hosszút (ω hosszúságút)?

Van-e nagyobb szám, mint ω?

A Hilbert-szállóban végtelen sok szoba van, de már mindegyikben van vendég. Érkezik egy turistabusz negyven utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik egy turistabusz végtelen sok utassal. Mit csináljon a portás?

Érkezik végtelen sok turistabusz, mindegyik végtelen sok utassal. Őket is el tudja helyezni a portás?

Hány természetes számokból álló számpár van?
Még mindig csak $\omega (= \omega * \omega)$, mert egy kétdimenziós táblázatot be tudunk járnni cikkcakkban.

Egy kétbetűs ábécéből hány n hosszúságú szót tudunk kirakni?
2^n-t.

És hány végtelen hosszút (ω hosszúságút)?
2^ω-t. Ez ugyanannyi, ahány részhalmaza van ω-nak.

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Cantor és a Hazug

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Cantor tétele: nem.
Ezt már be is bizonyítottuk (263. feladat, *Halmazok könyve*).

Cantor és a Hazug

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Cantor tétele: nem.
Ezt már be is bizonyítottuk (263. feladat, *Halmazok könyve*).

Szerepelt korábban a Hazug paradoxona:
(*) A csillaggal jelölt mondat hamis.
Hazug-mondat: az olyan mondat, amely akkor és csak akkor igaz, ha hamis.

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Cantor tétele: nem.
Ezt már be is bizonyítottuk (263. feladat, *Halmazok könyve*).

Szerepelt korábban a Hazug paradoxona:
(*) A csillaggal jelölt mondat hamis.
Hazug-mondat: az olyan mondat, amely akkor és csak akkor igaz, ha hamis.

Ha *a Halmazok könyvében minden számhalmaz szerepel*, akkor a barátságtalan számok halmazának is van egy b oldalszáma.
A 'b egy barátságos szám' mondat ilyen feltevés mellett hazug-mondat lesz.
A paradoxon átalakult indirekt bizonyítássá: azt mutatja meg, hogy a dőltbetűs feltevés hamis.

Minden halmaznál van „nagyobb”

Minden halmaznál van „nagyobb”

Cantor tétele általánosabban: egyetlen halmaz összes eleme és összes részhalmaza között sincs kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés

Minden halmaznál van „nagyobb”

Cantor tétele általánosabban: egyetlen halmaz összes eleme és összes részhalmaza között sincs kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés

Ez is szerepelt már, 262. feladat néven. A barátságtalan lakosok klubja nem lehet senkiről sem elnevezve. A gondolatmenet ugyanaz.