Irány a gödeli szigetek világa

2024. december 06.

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Cantor tétele: nem.
Ezt már be is bizonyítottuk (263. feladat, *Halmazok könyve*).

Cantor és a Hazug

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Cantor tétele: nem.
Ezt már be is bizonyítottuk (263. feladat, *Halmazok könyve*).

Szerepelt korábban a Hazug paradoxona:
(*) A csillaggal jelölt mondat hamis.
Hazug-mondat: az olyan mondat, amely akkor és csak akkor igaz, ha hamis.

Meg lehet számozni természetes számokkal ω összes részhalmazát?

Cantor tétele: nem.
Ezt már be is bizonyítottuk (263. feladat, *Halmazok könyve*).

Szerepelt korábban a Hazug paradoxona:
(*) A csillaggal jelölt mondat hamis.
Hazug-mondat: az olyan mondat, amely akkor és csak akkor igaz, ha hamis.

Ha *a Halmazok könyvében minden számhalmaz szerepel*, akkor a barátságtalan számok halmazának is van egy b oldalszáma.
A 'b egy barátságos szám' mondat *ilyen feltevés mellett* hazug-mondat lesz.
A paradoxon átalakult indirekt bizonyítássá: azt mutatja meg, hogy a dőltbetűs feltevés hamis.

Minden halmaznál van „nagyobb”

Minden halmaznál van „nagyobb”

Cantor tétele általánosabban: egyetlen halmaz összes eleme és összes részhalmaza között sincs kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés

Minden halmaznál van „nagyobb”

Cantor tétele általánosabban: egyetlen halmaz összes eleme és összes részhalmaza között sincs kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés

Ez is szerepelt már, 262. feladat néven. A barátságtalan lakosok klubja nem lehet senkiről sem elnevezve. A gondolatmenet ugyanaz.

Vissza a feledékenység erdejébe

Vissza a feledékenység erdejébe

238. Annak bizonyítása, hogy Subidu vagy Subidam létezik

Ebből a bizonyításból nem az derül ki, hogy Subidu és Subidam *mindketten* léteznek, csupán az, hogy legalább egyikük létezik. Azt sem fogjuk megtudni a bizonyításból, hogy melyikük az, aki tényleg létezik.

Egy papíron a következő három mondat olvasható:

1. SUBIDAM NEM LÉTEZIK.

2. SUBIDU NEM LÉTEZIK

3. EZEN A PAPÍRON
LEGALÁBB EGY HAMIS MONDAT VAN.

238. Annak bizonyítása, hogy Subidu vagy Subidam létezik

Ebből a bizonyításból nem az derül ki, hogy Subidu és Subidam *mindketten* léteznek, csupán az, hogy legalább egyikük létezik. Azt sem fogjuk megtudni a bizonyításból, hogy melyikük az, aki tényleg létezik.

Egy papíron a következő három mondat olvasható:

1. SUBIDAM NEM LÉTEZIK.
2. SUBIDU NEM LÉTEZIK
3. EZEN A PAPÍRON LEGALÁBB EGY HAMIS MONDAT VAN.

239. Annak bizonyítása, hogy Subidi létezik:

1. SUBIDI LÉTEZIK.
2. EZEN A PAPÍRON MINDKÉT MONDAT HAMIS.

238. Annak bizonyítása, hogy Subidu vagy Subidam létezik

Ebből a bizonyításból nem az derül ki, hogy Subidu és Subidam *mindketten* léteznek, csupán az, hogy legalább egyikük létezik. Azt sem fogjuk megtudni a bizonyításból, hogy melyikük az, aki tényleg létezik.

Egy papíron a következő három mondat olvasható:

1. SUBIDAM NEM LÉTEZIK.

2. SUBIDU NEM LÉTEZIK

3. EZEN A PAPÍRON
LEGALÁBB EGY HAMIS MONDAT VAN.

239. Annak bizonyítása, hogy Subidi létezik:

1. SUBIDI LÉTEZIK.

2. EZEN A PAPÍRON
MINDKÉT MONDAT HAMIS.

240. Ha ez a mondat igaz, akkor a Mikulás létezik.

Az első gödeli sziget

Az első gödeli sziget

264. A G sziget. Egy bizonyos G sziget lakói kizárólag lovagok, akik mindig igazat mondanak és lókötők, akik mindig hazudnak. A lovagok egy részét „megalapozott lovagoknak" nevezik (ezek azok a lovagok, akik bizonyos értelemben „bizonyítják önmagukat"), és bizonyos lókötőket „megalapozott lókötőknek" hívnak. A sziget lakói különböző klubokat alakítottak. Egy lakos több klubhoz is tartozhat. Ha adott egy tetszőleges *X* lakos és egy tetszőleges C klub, akkor *X* vagy azt állítja, hogy ő tagja a C klubnak, vagy azt, hogy nem tagja C-nek.

Tudjuk, hogy a következő négy feltétel, E_1, E_2, C és G teljesül:

E_1: A megalapozott lovagok halmaza éppen egy klub.

E_2: A megalapozott lókötők halmaza éppen egy klub.

C: (*Komplementer feltétel*): Bármelyik adott C klub esetén a sziget azon lakóinak halmaza, akik nem tagjai C-nek, szintén egy klub. (Ezt a klubot C *komplementerének* nevezzük, és $\overline{C}$-sal jelöljük.)

G: (*Gödeli feltétel*): Bármelyik adott C klub esetén van legalább egy lakója a szigetnek, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek. (Természetesen lehet, hogy állítása hamis: lehet, hogy az illető lókötő.)

Az első gödeli sziget

264. A G sziget. Egy bizonyos G sziget lakói kizárólag lovagok, akik mindig igazat mondanak és lókötők, akik mindig hazudnak. A lovagok egy részét „megalapozott lovagoknak" nevezik (ezek azok a lovagok, akik bizonyos értelemben „bizonyítják önmagukat"), és bizonyos lókötőket „megalapozott lókötőknek" hívnak. A sziget lakói különböző klubokat alakítottak. Egy lakos több klubhoz is tartozhat. Ha adott egy tetszőleges *X* lakos és egy tetszőleges C klub, akkor *X* vagy azt állítja, hogy ő tagja a C klubnak, vagy azt, hogy nem tagja C-nek.

Tudjuk, hogy a következő négy feltétel, E_1, E_2, C és G teljesül:

E_1: A megalapozott lovagok halmaza éppen egy klub.

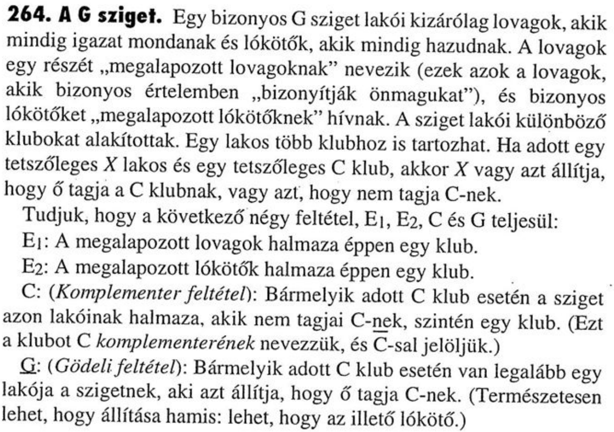
E_2: A megalapozott lókötők halmaza éppen egy klub.

C: (*Komplementer feltétel*): Bármelyik adott C klub esetén a sziget azon lakóinak halmaza, akik nem tagjai C-nek, szintén egy klub. (Ezt a klubot C *komplementerének* nevezzük, és $\overline{C}$-sal jelöljük.)

G: (*Gödeli feltétel*): Bármelyik adott C klub esetén van legalább egy lakója a szigetnek, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek. (Természetesen lehet, hogy állítása hamis: lehet, hogy az illető lókötő.)

1. Gödel szerint nem minden lovag megalapozott. Miért?
2. Nem minden lókötő megalapozott. Miért?

Az első gödeli sziget



264. A G sziget. Egy bizonyos G sziget lakói kizárólag lovagok, akik mindig igazat mondanak és lókötők, akik mindig hazudnak. A lovagok egy részét „megalapozott lovagoknak" nevezik (ezek azok a lovagok, akik bizonyos értelemben „bizonyítják önmagukat"), és bizonyos lókötőket „megalapozott lókötőknek" hívnak. A sziget lakói különböző klubokat alakítottak. Egy lakos több klubhoz is tartozhat. Ha adott egy tetszőleges *X* lakos és egy tetszőleges C klub, akkor *X* vagy azt állítja, hogy ő tagja a C klubnak, vagy azt, hogy nem tagja C-nek.

Tudjuk, hogy a következő négy feltétel, E_1, E_2, C és G teljesül:

E_1: A megalapozott lovagok halmaza éppen egy klub.

E_2: A megalapozott lókötők halmaza éppen egy klub.

C: (*Komplementer feltétel*): Bármelyik adott C klub esetén a sziget azon lakóinak halmaza, akik nem tagjai C-nek, szintén egy klub. (Ezt a klubot C *komplementerének* nevezzük, és $\overline{C}$-sal jelöljük.)

G: (*Gödeli feltétel*): Bármelyik adott C klub esetén van legalább egy lakója a szigetnek, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek. (Természetesen lehet, hogy állítása hamis: lehet, hogy az illető lókötő.)

1. Gödel szerint nem minden lovag megalapozott. Miért?
2. Nem minden lókötő megalapozott. Miért?

1. Tarski szerint a sziget lókötőinek halmaza nem klub. Miért?
2. Klub-e a sziget lovagjainak halmaza?

Gödeli szigetek általában

Gödeli sziget az olyan sziget, lovagokkal, lókötőkkel és klubokkal, ahol teljesül a G feltétel.

Gödeli szigetek általában

Gödeli sziget az olyan sziget, lovagokkal, lókötőkkel és klubokkal, ahol teljesül a G feltétel.

265. Craig felügyelő épp azt szeretné tudni, hogy a sziget, ahol nyomoz, ilyen-e. A következő tudjuk a szigetről:

Minden klubot egy lakosról neveztek el, és mindenkiről elneveztek egy klubot. Egy lakos nem szükségszerűen tagja a róla elnevezett klubnak, ha az, akkor *barátságosnak* nevezik, ha nem, akkor *barátságtalannak*. Az X lakost az Y lakos barátjának mondják, ha X igazolja, hogy Y barátságos.

Craig még mindig nem tudta, hogy gödeli szigeten van-e, amíg rá nem jött, hogy a sziget kielégíti a következő feltételt, amit *H feltételnek* fogunk nevezni:

H: Bármilyen C klubhoz létezik egy olyan D klub, hogy D minden tagjának van legalább egy barátja C-ben, és mindenkinek, aki nem tagja D-nek, van legalább egy barátja, aki nem tagja C-nek.

Ebből a H feltételből Craig ki tudta deríteni, hogy a sziget gödeli-e. Az?

Megoldás a 265. feladatra

Igen, teljesül a G feltétel.
Adott egy C klub. Keresnünk kell olyan személyt, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek.

Megoldás a 265. feladatra

Igen, teljesül a G feltétel.
Adott egy C klub. Keresnünk kell olyan személyt, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek.
Legyen a C klub H feltétel szerinti „párja” D, legyen d az, akiről D el van nevezve, c pedig d-nek a H feltétel szerinti barátja. Azt állítjuk, hogy c azt állítja magáról, hogy tagja a C klubnak.
Két eset van:

Megoldás a 265. feladatra

Igen, teljesül a G feltétel.

Adott egy C klub. Keresnünk kell olyan személyt, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek.

Legyen a C klub H feltétel szerinti „párja” D, legyen d az, akiről D el van nevezve, c pedig d-nek a H feltétel szerinti barátja. Azt állítjuk, hogy c azt állítja magáról, hogy tagja a C klubnak.

Két eset van:

1. $d \in$D. Ebben az esetben H szerint $c \in$C, és mivel barátja d-nak, azt állítja, hogy d barátságos, tehát tagja C-nek.

Megoldás a 265. feladatra

Igen, teljesül a G feltétel.
Adott egy C klub. Keresnünk kell olyan személyt, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek.
Legyen a C klub H feltétel szerinti „párja” D, legyen d az, akiről D el van nevezve, c pedig d-nek a H feltétel szerinti barátja. Azt állítjuk, hogy c azt állítja magáról, hogy tagja a C klubnak.
Két eset van:
1. $d \in$D. Ebben az esetben H szerint $c \in$C, és mivel barátja d-nak, azt állítja, hogy d barátságos, tehát tagja C-nek.
De ez az 1. feltevés szerint valóban így van, tehát c lovag, így azt kell állítania magáról, hogy tagja C-nek.

Igen, teljesül a G feltétel.
Adott egy C klub. Keresnünk kell olyan személyt, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek.
Legyen a C klub H feltétel szerinti „párja” D, legyen d az, akiről D el van nevezve, c pedig d-nek a H feltétel szerinti barátja. Azt állítjuk, hogy c azt állítja magáról, hogy tagja a C klubnak.
Két eset van:
1. $d \in$D. Ebben az esetben H szerint $c \in$C, és mivel barátja d-nak, azt állítja, hogy d barátságos, tehát tagja C-nek.
De ez az 1. feltevés szerint valóban így van, tehát c lovag, így azt kell állítania magáról, hogy tagja C-nek.
2. $d \notin D$. Akkor H szerint $c \notin C$, és c azt állítja, hogy d barátságos, azaz tagja D-nek.

Megoldás a 265. feladatra

Igen, teljesül a G feltétel.
Adott egy C klub. Keresnünk kell olyan személyt, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek.
Legyen a C klub H feltétel szerinti „párja" D, legyen d az, akiről D el van nevezve, c pedig d-nek a H feltétel szerinti barátja. Azt állítjuk, hogy c azt állítja magáról, hogy tagja a C klubnak.
Két eset van:
1. $d \in$D. Ebben az esetben H szerint $c \in$C, és mivel barátja d-nak, azt állítja, hogy d barátságos, tehát tagja C-nek.
De ez az 1. feltevés szerint valóban így van, tehát c lovag, így azt kell állítania magáról, hogy tagja C-nek.
2. $d \notin D$. Akkor H szerint $c \notin C$, és c azt állítja, hogy d barátságos, azaz tagja D-nek.
De ez a 2. feltevés szerint nem így van, tehát most c lókötő, és ezért azt állítja magáról, hogy tagja C-nek.

A kijelentések könyve és a halmazok könyve

A kijelentések könyve és a halmazok könyve

Kijelentések könyve: mindegyik oldalon van egy kijelentés (egyesek igazak, mások hamisak).

Kijelentések könyve: mindegyik oldalon van egy kijelentés (egyesek igazak, mások hamisak).

Egyes igaz kijelentések axiómák. Az axiómákból bizonyítható kijelentések mind igazak, és a cáfolható mondatok mind hamisak.

A kijelentések könyve és a halmazok könyve

Kijelentések könyve: mindegyik oldalon van egy kijelentés (egyesek igazak, mások hamisak).

Egyes igaz kijelentések axiómák. Az axiómákból bizonyítható kijelentések mind igazak, és a cáfolható mondatok mind hamisak.

Halmazok könyve: minden oldalon egy pozitív egész számokból álló halmaz leírása szerepel. A könyvben szereplő halmazok a felsorolt halmazok.

A kijelentések könyve és a halmazok könyve

Kijelentések könyve: mindegyik oldalon van egy kijelentés (egyesek igazak, mások hamisak).

Egyes igaz kijelentések axiómák. Az axiómákból bizonyítható kijelentések mind igazak, és a cáfolható mondatok mind hamisak.

Halmazok könyve: minden oldalon egy pozitív egész számokból álló halmaz leírása szerepel. A könyvben szereplő halmazok a _felsorolt_ halmazok.

Az n _rendkívüli szám_, ha eleme az n-edik oldalon levő halmaznak.

Kijelentések könyve: mindegyik oldalon van egy kijelentés (egyesek igazak, mások hamisak).

Egyes igaz kijelentések axiómák. Az axiómákból bizonyítható kijelentések mind igazak, és a cáfolható mondatok mind hamisak.

Halmazok könyve: minden oldalon egy pozitív egész számokból álló halmaz leírása szerepel. A könyvben szereplő halmazok a felsorolt halmazok.

Az n rendkívüli szám, ha eleme az n-edik oldalon levő halmaznak.

h asszociáltja n-nek, ha a (Kijelentések könyvében) h-adik kijelentés azt állítja, hogy n rendkívüli.

A négy feltétel, újrafogalmazva

E_1: A bizonyítható mondatok oldalszámának halmaza felsorolt halmaz.

A négy feltétel, újrafogalmazva

E_1: A bizonyítható mondatok oldalszámának halmaza felsorolt halmaz.

E_2: A cáfolható mondatok oldalszámának halmaza felsorolt halmaz.

A négy feltétel, újrafogalmazva

E_1: A bizonyítható mondatok oldalszámának halmaza felsorolt halmaz.

E_2: A cáfolható mondatok oldalszámának halmaza felsorolt halmaz.

C: Bármely A felsorolt halmaz komplementere (az az $\bar{A}$ halmaz, amelyben pont az A-ban nem szereplő számok vannak) felsorolt halmaz.

A négy feltétel, újrafogalmazva

E_1: A bizonyítható mondatok oldalszámának halmaza felsorolt halmaz.

E_2: A cáfolható mondatok oldalszámának halmaza felsorolt halmaz.

C: Bármely A felsorolt halmaz komplementere (az az $\bar{A}$ halmaz, amelyben pont az A-ban nem szereplő számok vannak) felsorolt halmaz.

H: Tetszőleges felsorolt A halmazhoz van olyan felsorolt B halmaz, hogy B minden n elemének van egy h asszociáltja A-ban, ha pedig n nem eleme B-nek, akkor van neki olyan h asszociáltja, amelyik nem eleme A-nak.

H-ból következik G

H-ból következik G

A H feltétel teljesüléséből következik, hogy a következő G feltétel is teljesül:
G: Tetszőleges A felsorolt halmazhoz létezik egy P kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha P oldalszáma eleme A-nak.

H-ból következik G

A H feltétel teljesüléséből következik, hogy a következő G feltétel is teljesül:
G: Tetszőleges A felsorolt halmazhoz létezik egy P kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha P oldalszáma eleme A-nak.

Vegyük az A-hoz H szerint tartozó B halmazt. Legyen B oldalszáma n, n egy H szerint létező asszociáltja h.

H-ból következik G

A H feltétel teljesüléséből következik, hogy a következő G feltétel is teljesül:
G: Tetszőleges A felsorolt halmazhoz létezik egy P kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha P oldalszáma eleme A-nak.

Vegyük az A-hoz H szerint tartozó B halmazt. Legyen B oldalszáma n, n egy H szerint létező asszociáltja h.

Ezek szerint $h \in A$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $n \in B$.

H-ból következik G

A H feltétel teljesüléséből következik, hogy a következő G feltétel is teljesül:
G: Tetszőleges A felsorolt halmazhoz létezik egy P kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha P oldalszáma eleme A-nak.

Vegyük az A-hoz H szerint tartozó B halmazt. Legyen B oldalszáma n, n egy H szerint létező asszociáltja h.

Ezek szerint $h \in A$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $n \in B$.

Mivel h asszociáltja n-nek, a h-adik oldalon levő P kijelentés azt állítja, hogy n rendkívüli, azaz hogy n eleme az n-edik halmaznak, azaz B-nek.

H-ból következik G

A H feltétel teljesüléséből következik, hogy a következő G feltétel is teljesül:
G: Tetszőleges A felsorolt halmazhoz létezik egy P kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha P oldalszáma eleme A-nak.

Vegyük az A-hoz H szerint tartozó B halmazt. Legyen B oldalszáma n, n egy H szerint létező asszociáltja h.

Ezek szerint $h \in A$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $n \in B$.

Mivel h asszociáltja n-nek, a h-adik oldalon levő P kijelentés azt állítja, hogy n rendkívüli, azaz hogy n eleme az n-edik halmaznak, azaz B-nek.

Ha ez a P kijelentés igaz, akkor n tényleg eleme B-nek,

H-ból következik G

A H feltétel teljesüléséből következik, hogy a következő G feltétel is teljesül:
G: Tetszőleges A felsorolt halmazhoz létezik egy P kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha P oldalszáma eleme A-nak.

Vegyük az A-hoz H szerint tartozó B halmazt. Legyen B oldalszáma n, n egy H szerint létező asszociáltja h.

Ezek szerint $h \in A$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $n \in B$.

Mivel h asszociáltja n-nek, a h-adik oldalon levő P kijelentés azt állítja, hogy n rendkívüli, azaz hogy n eleme az n-edik halmaznak, azaz B-nek.

Ha ez a P kijelentés igaz, akkor n tényleg eleme B-nek, és P oldalszáma, azaz h eleme A-nak.

Ha P nem igaz, ez azt jelenti, hogy n nem eleme B-nek, és így P oldalszáma, h nem eleme A-nak.

H-ból következik G

A H feltétel teljesüléséből következik, hogy a következő G feltétel is teljesül:
G: Tetszőleges A felsorolt halmazhoz létezik egy P kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha P oldalszáma eleme A-nak.

Vegyük az A-hoz H szerint tartozó B halmazt. Legyen B oldalszáma n, n egy H szerint létező asszociáltja h.

Ezek szerint $h \in A$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $n \in B$.

Mivel h asszociáltja n-nek, a h-adik oldalon levő P kijelentés azt állítja, hogy n rendkívüli, azaz hogy n eleme az n-edik halmaznak, azaz B-nek.

Ha ez a P kijelentés igaz, akkor n tényleg eleme B-nek, és P oldalszáma, azaz h eleme A-nak.

Ha P nem igaz, ez azt jelenti, hogy n nem eleme B-nek, és így P oldalszáma, h nem eleme A-nak.

Tehát P akkor és csak akkor igaz, ha az oldalszáma, h eleme A-nak.

A Gödel-Tarski tétel

A Gödel-Tarski tétel

Most már be tudjuk bizonyítani a következő tételt:
Ha az E_1, E_2, C, H feltételek teljesülnek (tehát akkor a G is), akkor van olyan igaz mondat, amely nem bizonyítható és van olyan hamis mondat, amely nem cáfolható.

Most már be tudjuk bizonyítani a következő tételt:
Ha az E_1, E_2, C, H feltételek teljesülnek (tehát akkor a G is), akkor van olyan igaz mondat, amely nem bizonyítható és van olyan hamis mondat, amely nem cáfolható.

Legyen a bizonyítható kijelentések oldalszámának halmaza T. Ez E_1 szerint felsorolt halmaz.

Most már be tudjuk bizonyítani a következő tételt:
Ha az E_1, E_2, C, H feltételek teljesülnek (tehát akkor a G is), akkor van olyan igaz mondat, amely nem bizonyítható és van olyan hamis mondat, amely nem cáfolható.

Legyen a bizonyítható kijelentések oldalszámának halmaza T. Ez E_1 szerint felsorolt halmaz.

De akkor $\bar{T}$ is felsorolt halmaz. Azt tudjuk, hogy a G feltétel is teljesül, tehát van egy $G_{\bar{T}}$ kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha az oldalszáma $\bar{T}$-ban van.

A Gödel-Tarski tétel

Most már be tudjuk bizonyítani a következő tételt:
Ha az E_1, E_2, C, H feltételek teljesülnek (tehát akkor a G is), akkor van olyan igaz mondat, amely nem bizonyítható és van olyan hamis mondat, amely nem cáfolható.

Legyen a bizonyítható kijelentések oldalszámának halmaza T. Ez E_1 szerint felsorolt halmaz.

De akkor $\bar{T}$ is felsorolt halmaz. Azt tudjuk, hogy a G feltétel is teljesül, tehát van egy $G_{\bar{T}}$ kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha az oldalszáma $\bar{T}$-ban van.

Két eset van:
1. $G_{\bar{T}}$ igaz. Akkor az ő oldalszáma nem T-ben van (hanem a komplementumában), tehát nem bizonyítható.

A Gödel-Tarski tétel

Most már be tudjuk bizonyítani a következő tételt:
Ha az E_1, E_2, C, H feltételek teljesülnek (tehát akkor a G is), akkor van olyan igaz mondat, amely nem bizonyítható és van olyan hamis mondat, amely nem cáfolható.

Legyen a bizonyítható kijelentések oldalszámának halmaza T. Ez E_1 szerint felsorolt halmaz.

De akkor $\bar{T}$ is felsorolt halmaz. Azt tudjuk, hogy a G feltétel is teljesül, tehát van egy $G_{\bar{T}}$ kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha az oldalszáma $\bar{T}$-ban van.

Két eset van:
1. $G_{\bar{T}}$ igaz. Akkor az ő oldalszáma nem T-ben van (hanem a komplementumában), tehát nem bizonyítható.

2. $G_{\bar{T}}$ hamis. Akkor az ő oldalszáma nem $\bar{T}$-ben van, így csak T-ben lehet, azaz $G_{\bar{T}}$ bizonyítható,
De ez lehetetlen, mert hamis kijelentések nem lehetnek bizonyíthatóak.

A tétel másik fele

A tétel másik fele

Legyen a cáfolható kijelentések oldalszámának halmaza F. E_2 szerint ez is felsorolt halmaz.

A tétel másik fele

Legyen a cáfolható kijelentések oldalszámának halmaza F. E_2 szerint ez is felsorolt halmaz.

G szerint van egy G_F kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha az oldalszáma eleme F-nek – azaz ha cáfolható.

A tétel másik fele

Legyen a cáfolható kijelentések oldalszámának halmaza F. E_2 szerint ez is felsorolt halmaz.

G szerint van egy G_F kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha az oldalszáma eleme F-nek – azaz ha cáfolható.

Ez csak úgy lehetséges, ha G_F hamis és nem cáfolható.

Mi is az a teljesség és miért fontos?

Mi is az a teljesség és miért fontos?

Egy elmélet általában arra jó, hogy egy adott területtel kapcsolatban kérdéseket tudjunk megválaszolni az alapján.

Mi is az a teljesség és miért fontos?

Egy elmélet általában arra jó, hogy egy adott területtel kapcsolatban kérdéseket tudjunk megválaszolni az alapján.

Ha valamilyen kérdésre az elméleten belül nincs válasz, akkor más módon keressük a választ: megfigyeléseket teszünk, kísérleteket végzünk. Az eredménnyel aztán kibővíthetjük az elméletet.

Mi is az a teljesség és miért fontos?

Egy elmélet általában arra jó, hogy egy adott területtel kapcsolatban kérdéseket tudjunk megválaszolni az alapján.

Ha valamilyen kérdésre az elméleten belül nincs válasz, akkor más módon keressük a választ: megfigyeléseket teszünk, kísérleteket végzünk. Az eredménnyel aztán kibővíthetjük az elméletet.

Mindentudónak azt az elméletet tekinthetjük, amely minden, az elmélet nyelvén feltehető eldöntendő kérdésre tudja a választ.

Mi is az a teljesség és miért fontos?

Egy elmélet általában arra jó, hogy egy adott területtel kapcsolatban kérdéseket tudjunk megválaszolni az alapján.

Ha valamilyen kérdésre az elméleten belül nincs válasz, akkor más módon keressük a választ: megfigyeléseket teszünk, kísérleteket végzünk. Az eredménnyel aztán kibővíthetjük az elméletet.

Mindentudónak azt az elméletet tekinthetjük, amely minden, az elmélet nyelvén feltehető eldöntendő kérdésre tudja a választ.

Formálisan: ha A az elmélet nyelvének egy mondata, akkor vagy A, vagy $\neg A$ tétele az elméletnek. Az ilyen elméleteket nevezzük negációteljesnek.

Mi is az a teljesség és miért fontos?

Egy elmélet általában arra jó, hogy egy adott területtel kapcsolatban kérdéseket tudjunk megválaszolni az alapján.

Ha valamilyen kérdésre az elméleten belül nincs válasz, akkor más módon keressük a választ: megfigyeléseket teszünk, kísérleteket végzünk. Az eredménnyel aztán kibővíthetjük az elméletet.

Mindentudónak azt az elméletet tekinthetjük, amely minden, az elmélet nyelvén feltehető eldöntendő kérdésre tudja a választ.

Formálisan: ha A az elmélet nyelvének egy mondata, akkor vagy A, vagy $\neg A$ tétele az elméletnek. Az ilyen elméleteket nevezzük negációteljesnek.

Azt lehetne gondolni, hogy egy elmélet akkor nem negációteljes, ha túl gyenge. Ha kiegészítjük további ismeretekkel, akkor majd teljes lesz.

Mit fedezett fel Kurt Gödel?

Azt lehet gondolni, hogy a természetes számoknak lehetséges mindentudó elmélete. Volt is erre egy jelölt: Peano axiomatikus elmélete. Valóban bizonyítható benne minden Gödelt megelőzően ismert aritmetikai igazság.

Mit fedezett fel Kurt Gödel?

Azt lehet gondolni, hogy a természetes számoknak lehetséges mindentudó elmélete. Volt is erre egy jelölt: Peano axiomatikus elmélete. Valóban bizonyítható benne minden Gödelt megelőzően ismert aritmetikai igazság.

Gödel azt mutatta meg, hogy a Peano-aritmetika nem azért nem negációteljes, mert túl gyenge, hanem azért, mert túl erős.

Mit fedezett fel Kurt Gödel?

Azt lehet gondolni, hogy a természetes számoknak lehetséges mindentudó elmélete. Volt is erre egy jelölt: Peano axiomatikus elmélete. Valóban bizonyítható benne minden Gödelt megelőzően ismert aritmetikai igazság.

Gödel azt mutatta meg, hogy a Peano-aritmetika nem azért nem negációteljes, mert túl gyenge, hanem azért, mert túl erős.

Ez annyit jelent, hogy kifejezhetők benne magának az elméletnek a mondataira vonatkozó tulajdonságok: például az a hogy egy mondat axióma, bizonyítható, stb.

Mit fedezett fel Kurt Gödel?

Azt lehet gondolni, hogy a természetes számoknak lehetséges mindentudó elmélete. Volt is erre egy jelölt: Peano axiomatikus elmélete. Valóban bizonyítható benne minden Gödelt megelőzően ismert aritmetikai igazság.

Gödel azt mutatta meg, hogy a Peano-aritmetika nem azért nem negációteljes, mert túl gyenge, hanem azért, mert túl erős.

Ez annyit jelent, hogy kifejezhetők benne magának az elméletnek a mondataira vonatkozó tulajdonságok: például az a hogy egy mondat axióma, bizonyítható, stb.

A bizonyítás eszköze a Gödel-számozás: számkódokat rendelünk az elmélet nyelvének betűihez, aztán az elméletben kifejezhető tulajdonságokhoz, aztán a mondatokhoz, aztán a bizonyításokhoz. Ezt meg lehet úgy csinálni, hogy teljesüljön, hogy pl. mondatoknak egy sorozata akkor és csak akkor bizonyítás, ha a kódszáma ilyen és ilyen.

Gödel felfedezése (folytatás)

Gödel felfedezése (folytatás)

Azt a (mondatokra vonatkozó) tulajdonságot, hogy „nincs bizonyítása”, szintén ki lehet fejezni a kódszámok nyelvén.

Gödel felfedezése (folytatás)

Azt a (mondatokra vonatkozó) tulajdonságot, hogy „nincs bizonyítása”, szintén ki lehet fejezni a kódszámok nyelvén.

Némi ügyeskedéssel lehet olyan G mondatot is találni, amely azt mondja, hogy „A g kódszámú mondatnak nincs bizonyítása”, de a g kódszámú mondat éppen maga G, a Gödel-mondat. (Ez volt a mi bizonyításunkban a $G_{\bar{T}}$ mondat.)

Gödel felfedezése (folytatás)

Azt a (mondatokra vonatkozó) tulajdonságot, hogy „nincs bizonyítása”, szintén ki lehet fejezni a kódszámok nyelvén.

Némi ügyeskedéssel lehet olyan G mondatot is találni, amely azt mondja, hogy „A g kódszámú mondatnak nincs bizonyítása”, de a g kódszámú mondat éppen maga G, a Gödel-mondat. (Ez volt a mi bizonyításunkban a $G_{\bar{T}}$ mondat.)

Persze tudjuk (máshonnan, metanyelvi érvelésből), hogy a Gödel-mondat igaz. Miért nem csapjuk hozzá egyszerűen a Peano-axiómákhoz, hátha akkor már teljes elméletet kapunk?

Gödel felfedezése (folytatás)

Azt a (mondatokra vonatkozó) tulajdonságot, hogy „nincs bizonyítása”, szintén ki lehet fejezni a kódszámok nyelvén.

Némi ügyeskedéssel lehet olyan G mondatot is találni, amely azt mondja, hogy „A g kódszámú mondatnak nincs bizonyítása”, de a g kódszámú mondat éppen maga G, a Gödel-mondat. (Ez volt a mi bizonyításunkban a $G_{\bar{T}}$ mondat.)

Persze tudjuk (máshonnan, metanyelvi érvelésből), hogy a Gödel-mondat igaz. Miért nem csapjuk hozzá egyszerűen a Peano-axiómákhoz, hátha akkor már teljes elméletet kapunk?

Ez azért nem megoldás, mert az eljárás, amellyel a Gödel-mondatot előállítottuk, minden elméletre alkalmazható, csak legyenek benne számok. A G mondattal kibővített Peano-aritmetika már egy másik elmélet, és annak ugyanezzel a módszerrel megtalálható egy Gödel-mondata. És így tovább, a végtelenségig.