Gödel tétele – más oldalról

2024. december 13.

A természetes számok és Gödel tétele

A természetes számok aritmetikája: az alapműveletek elmélete.

A természetes számok és Gödel tétele

A természetes számok aritmetikája: az alapműveletek elmélete.

Axiomatizálás: Giuseppe Peano, 1890. (Peano-aritmetika, PA)

A természetes számok és Gödel tétele

A természetes számok aritmetikája: az alapműveletek elmélete.

Axiomatizálás: Giuseppe Peano, 1890. (Peano-aritmetika, PA)

Nem negációteljes és nem is bővíthető új axiómák felvételével azzá (

). (Gödel első nem-teljességi tétele, 1931.)

A természetes számok és Gödel tétele

A természetes számok aritmetikája: az alapműveletek elmélete.

Axiomatizálás: Giuseppe Peano, 1890. (Peano-aritmetika, PA)

Nem negációteljes és nem is bővíthető új axiómák felvételével azzá (hacsak megmarad az, hogy az elmélet bármely mondatáról automatikusan eldönthető, hogy axióma-e, és az elmélet konzisztens). (Gödel első nem-teljességi tétele, 1931.)

A természetes számok és Gödel tétele

A természetes számok aritmetikája: az alapműveletek elmélete.

Axiomatizálás: Giuseppe Peano, 1890. (Peano-aritmetika, PA)

Nem negációteljes és nem is bővíthető új axiómák felvételével azzá (hacsak megmarad az, hogy az elmélet bármely mondatáról automatikusan eldönthető, hogy axióma-e, és az elmélet konzisztens). (Gödel első nem-teljességi tétele, 1931.)
Múlt órán bizonyítottuk a következőt: Ha adott

- egy axiomatikus aritmetikai elmélet, amely megmondja, hogy mely kijelentések bizonyíthatóak,
- az aritmetika nyelvén megfogalmazható összes kijelentésnek egy felsorolása,
- az aritmetika nyelvén definiálható összes halmaznak egy felsorolása, amely kielégíti az E_1, E_2, C, H feltételeket,

akkor lesz egy olyan kijelentés, amely akkor és csak akkor igaz, ha nem bizonyítható.
Ha az elméletünk csak igaz kijelentéseket bizonyít, akkor ez a kijelentés igaz és nem bizonyítható.

Kalmár bizonyítása

Kalmár bizonyítása

A következő gondolatmenet másképp mutatja meg lényegében ugyanezt: megadunk olyan aritmetikai kijelentést, amely vagy igaz és nem bizonyítható, vagy hamis és bizonyítható.

Kalmár bizonyítása

A következő gondolatmenet másképp mutatja meg lényegében ugyanezt: megadunk olyan aritmetikai kijelentést, amely vagy igaz és nem bizonyítható, vagy hamis és bizonyítható.

Tehát ez a mondat akkor és csak akkor igaz, ha nem bizonyítható.

Kalmár bizonyítása

A következő gondolatmenet másképp mutatja meg lényegében ugyanezt: megadunk olyan aritmetikai kijelentést, amely vagy igaz és nem bizonyítható, vagy hamis és bizonyítható.

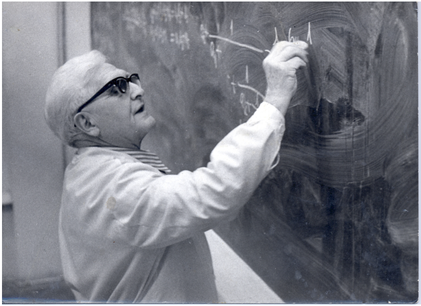
Tehát ez a mondat akkor és csak akkor igaz, ha nem bizonyítható. Azaz azt jelenti, hogy ő maga nem bizonyítható.

Kalmár bizonyítása

A következő gondolatmenet másképp mutatja meg lényegében ugyanezt: megadunk olyan aritmetikai kijelentést, amely vagy igaz és nem bizonyítható, vagy hamis és bizonyítható.

Tehát ez a mondat akkor és csak akkor igaz, ha nem bizonyítható. Azaz azt jelenti, hogy ő maga nem bizonyítható.

A bizonyítás ötlete Kalmár Lászlótól (1905-1976) származik.



Mi az igazság?

Ha Peano axiómái igazak (és a logikánk jó, azaz nem enged igazból hamisra következtetni), akkor az előző dián emlegetett kijelentés igaz és nem bizonyítható, a negációja meg azért nem bizonyítható, mert hamis.

Mi az igazság?

Ha Peano axiómái igazak (és a logikánk jó, azaz nem enged igazból hamisra következtetni), akkor az előző dián emlegetett kijelentés igaz és nem bizonyítható, a negációja meg azért nem bizonyítható, mert hamis.

Mindehhez nem kell általánosságban megadnunk, mikor igaz egy kijelentés, elég csak bizonyos (egyszerűbb fajta) aritmetikai kijelentésekről megmondani, melyik igaz, melyik hamis.

Mi az igazság?

Ha Peano axiómái igazak (és a logikánk jó, azaz nem enged igazból hamisra következtetni), akkor az előző dián emlegetett kijelentés igaz és nem bizonyítható, a negációja meg azért nem bizonyítható, mert hamis.

Mindehhez nem kell általánosságban megadnunk, mikor igaz egy kijelentés, elég csak bizonyos (egyszerűbb fajta) aritmetikai kijelentésekről megmondani, melyik igaz, melyik hamis.

Egy aritmetikai egyenlőség (amiben számnevek meg a négy alapművelet szerepel) igaz, ha papíron ceruzával számolva kijön. Ha nem így van, akkor a megfelelő egyenlőtlenség ($\neq$) igaz.

Mi az igazság?

Ha Peano axiómái igazak (és a logikánk jó, azaz nem enged igazból hamisra következtetni), akkor az előző dián emlegetett kijelentés igaz és nem bizonyítható, a negációja meg azért nem bizonyítható, mert hamis.

Mindehhez nem kell általánosságban megadnunk, mikor igaz egy kijelentés, elég csak bizonyos (egyszerűbb fajta) aritmetikai kijelentésekről megmondani, melyik igaz, melyik hamis.

Egy aritmetikai egyenlőség (amiben számnevek meg a négy alapművelet szerepel) igaz, ha papíron ceruzával számolva kijön. Ha nem így van, akkor a megfelelő egyenlőtlenség ($\neq$) igaz.

Eddig minden, amit csináltunk, belül volt a véges, effektíve eldönthető kérdések körén.

Egy kicsit kilépünk a végesből

Egy kicsit kilépünk a végesből

Egy egyismeretlenes aritmetikai egyenlet, illetve egyenlőtlenség igaz egy n számra, ha n nevét helyettesítve az ismeretlen helyére igaz egyenlőséget (egyenlőtlenséget) kapunk.

Egy kicsit kilépünk a végesből

Egy egyismeretlenes aritmetikai egyenlet, illetve egyenlőtlenség igaz egy n számra, ha n nevét helyettesítve az ismeretlen helyére igaz egyenlőséget (egyenlőtlenséget) kapunk.

Egy $f(x) = k$ egyismeretlenes egyenlet, illetve $f(x) \neq k$ egyenlőtlenség igaz az x minden értékére, ha x helyébe bármely természetes számot helyettesítve igaz egyenlőséget (egyenlőtlenséget) kapunk.

Egy kicsit kilépünk a végesből

Egy egyismeretlenes aritmetikai egyenlet, illetve egyenlőtlenség igaz egy n számra, ha n nevét helyettesítve az ismeretlen helyére igaz egyenlőséget (egyenlőtlenséget) kapunk.

Egy $f(x) = k$ egyismeretlenes egyenlet, illetve $f(x) \neq k$ egyenlőtlenség igaz az x minden értékére, ha x helyébe bármely természetes számot helyettesítve igaz egyenlőséget (egyenlőtlenséget) kapunk.

Az ilyen kijelentéseket így rövidítjük: $\forall x(f(x) = k)$, ill. $\forall x(f(x) \neq k)$.

Egy kicsit kilépünk a végesből

Egy egyismeretlenes aritmetikai egyenlet, illetve egyenlőtlenség igaz egy n számra, ha n nevét helyettesítve az ismeretlen helyére igaz egyenlőséget (egyenlőtlenséget) kapunk.

Egy $f(x) = k$ egyismeretlenes egyenlet, illetve $f(x) \neq k$ egyenlőtlenség igaz az x minden értékére, ha x helyébe bármely természetes számot helyettesítve igaz egyenlőséget (egyenlőtlenséget) kapunk.

Az ilyen kijelentéseket így rövidítjük: $\forall x(f(x) = k)$, ill. $\forall x(f(x) \neq k)$.

Egy ilyen kijelentés igazságát általában nem tudjuk véges számítással eldönteni. Ha hamis, az kiderül véges sok lépésben, de ha igaz, az nem. Ettől még elfogadhatjuk, hogy az ilyen kijelentések értelmesek, és van egyértelmű definíciónk arra, hogy mikor igazak.

Az egyenlőtlenségek táblázata: így csináljuk

Az egyenlőtlenségek táblázata: így csináljuk

Az aritmetika nyelve, amelyben dolgozunk:

- Tartalmazza a számneveket, a négy alapművelet jelét és a rákövetkezés jelét. Az n szám rákövetkezője: n'.
- Van jele az egyenlőségnek $(=)$ és az egyenlőtlenségnek $(\neq)$.
- Van egy változónk (x) és használhatjuk az általánosság jelét $(\forall)$.

Az egyenlőtlenségek táblázata: így csináljuk

Az aritmetika nyelve, amelyben dolgozunk:

- Tartalmazza a számneveket, a négy alapművelet jelét és a rákövetkezés jelét. Az n szám rákövetkezője: n'.
- Van jele az egyenlőségnek ($=$) és az egyenlőtlenségnek ($\neq$).
- Van egy változónk (x) és használhatjuk az általánosság jelét ($\forall$).

Rendezzük el az aritmetika nyelvének összes, legfeljebb egyváltozós numerikus kifejezését ($x * 0,\ 0' + 3,\ 3 + (x * 2),\ 2x + 15$, stb.) egy (végtelen) sorozatba.

Az egyenlőtlenségek táblázata: így csináljuk

Az aritmetika nyelve, amelyben dolgozunk:

- Tartalmazza a számneveket, a négy alapművelet jelét és a rákövetkezés jelét. Az n szám rákövetkezője: n'.
- Van jele az egyenlőségnek $(=)$ és az egyenlőtlenségnek $(\neq)$.
- Van egy változónk (x) és használhatjuk az általánosság jelét $(\forall)$.

Rendezzük el az aritmetika nyelvének összes, legfeljebb egyváltozós numerikus kifejezését
$(x * 0,\ 0' + 3,\ 3 + (x * 2),\ 2x + 15$, stb.) egy (végtelen) sorozatba.

Ezt meg lehet tenni úgy, ahogy a Hilbert-szállóban el lehetett helyezni végtelen sok, egyenként is végtelen sok utast hozó turistabusz utasait.

Az egyenlőtlenségek táblázata: így csináljuk

Az aritmetika nyelve, amelyben dolgozunk:

- Tartalmazza a számneveket, a négy alapművelet jelét és a rákövetkezés jelét. Az n szám rákövetkezője: n'.
- Van jele az egyenlőségnek ($=$) és az egyenlőtlenségnek ($\neq$).
- Van egy változónk (x) és használhatjuk az általánosság jelét ($\forall$).

Rendezzük el az aritmetika nyelvének összes, legfeljebb egyváltozós numerikus kifejezését
($x * 0,\ 0' + 3,\ 3 + (x * 2),\ 2x + 15$, stb.) egy (végtelen) sorozatba.

Ezt meg lehet tenni úgy, ahogy a Hilbert-szállóban el lehetett helyezni végtelen sok, egyenként is végtelen sok utast hozó turistabusz utasait.

Legyen $k_n(x)$ ennek a sorozatnak az n-edik eleme.

Az egyenlőtlenségek táblázata: így csináljuk

Az aritmetika nyelve, amelyben dolgozunk:

- Tartalmazza a számneveket, a négy alapművelet jelét és a rákövetkezés jelét. Az n szám rákövetkezője: n'.
- Van jele az egyenlőségnek $(=)$ és az egyenlőtlenségnek $(\neq)$.
- Van egy változónk (x) és használhatjuk az általánosság jelét $(\forall)$.

Rendezzük el az aritmetika nyelvének összes, legfeljebb egyváltozós numerikus kifejezését
$(x * 0,\ 0' + 3,\ 3 + (x * 2),\ 2x + 15,$ stb.) egy (végtelen) sorozatba.

Ezt meg lehet tenni úgy, ahogy a Hilbert-szállóban el lehetett helyezni végtelen sok, egyenként is végtelen sok utast hozó turistabusz utasait.

Legyen $k_n(x)$ ennek a sorozatnak az n-edik eleme.

Rendezzük táblázatba azokat a kijelentéseket, hogy k_i soha nem veszi fel a j értéket, az összes i, j természetes számra (a következő dián).

Az egyenlőtenségek táblázata: így néz ki

$\forall x(k_0(x) \neq 0)$	$\forall x(k_0(x) \neq 1)$	$\forall x(k_0(x) \neq 2)$	$\dots$	$\forall x(k_0(x) \neq j)$
$\forall x(k_1(x) \neq 0)$	$\forall x(k_1(x) \neq 1)$	$\forall x(k_1(x) \neq 2)$		
$\forall x(k_2(x) \neq 0)$	$\forall x(k_2(x) \neq 1)$	$\forall x(k_2(x) \neq 2)$		
$\vdots$				
$\forall x(k_i(x) \neq 0$	$\dots$	$\dots$	$\forall x(k_i(x) \neq i)$	$\forall x(k_i(x) \neq j$
				$\forall x(k_j(x) \neq j$

Az egyenlőtenségek táblázata: így néz ki

$\forall x(k_0(x) \neq 0)$	$\forall x(k_0(x) \neq 1)$	$\forall x(k_0(x) \neq 2)$	$\dots$	$\forall x(k_0(x) \neq j)$
$\forall x(k_1(x) \neq 0)$	$\forall x(k_1(x) \neq 1)$	$\forall x(k_1(x) \neq 2)$		
$\forall x(k_2(x) \neq 0)$	$\forall x(k_2(x) \neq 1)$	$\forall x(k_2(x) \neq 2)$		
$\vdots$				
$\forall x(k_i(x) \neq 0$	$\dots$	$\dots$	$\forall x(k_i(x) \neq i)$	$\forall x(k_i(x) \neq j$
				$\forall x(k_j(x) \neq j$

A pirossal jelöltek az átlós kijelentések.

Az egyenlőtenségek táblázata: így néz ki

$\forall x(k_0(x) \neq 0)$	$\forall x(k_0(x) \neq 1)$	$\forall x(k_0(x) \neq 2)$	$\dots$	$\forall x(k_0(x) \neq j)$
$\forall x(k_1(x) \neq 0)$	$\forall x(k_1(x) \neq 1)$	$\forall x(k_1(x) \neq 2)$		
$\forall x(k_2(x) \neq 0)$	$\forall x(k_2(x) \neq 1)$	$\forall x(k_2(x) \neq 2)$		
$\vdots$				
$\forall x(k_i(x) \neq 0$	$\dots$	$\dots$	$\forall x(k_i(x) \neq i)$	$\forall x(k_i(x) \neq j$
				$\forall x(k_j(x) \neq j$

A pirossal jelöltek az átlós kijelentések.

Mindegyik azt mondja egy kifejezésről, hogy nem veszi fel értékként a saját sorszámát.

Az egyenlőtenségek táblázata: így néz ki

$\forall x(k_0(x) \neq 0)$	$\forall x(k_0(x) \neq 1)$	$\forall x(k_0(x) \neq 2)$	$\dots$	$\forall x(k_0(x) \neq j)$
$\forall x(k_1(x) \neq 0)$	$\forall x(k_1(x) \neq 1)$	$\forall x(k_1(x) \neq 2)$		
$\forall x(k_2(x) \neq 0)$	$\forall x(k_2(x) \neq 1)$	$\forall x(k_2(x) \neq 2)$		
$\vdots$				
$\forall x(k_i(x) \neq 0$	$\dots$	$\dots$	$\forall x(k_i(x) \neq i)$	$\forall x(k_i(x) \neq j$
				$\forall x(k_j(x) \neq j$

A pirossal jelöltek az átlós kijelentések.

Mindegyik azt mondja egy kifejezésről, hogy nem veszi fel értékként a saját sorszámát.

Egyes átlós kijelentések igazak, mások hamisak.

Az egyenlőtenségek táblázata: így néz ki

$\forall x(k_0(x) \neq 0)$	$\forall x(k_0(x) \neq 1)$	$\forall x(k_0(x) \neq 2)$	$\dots$	$\forall x(k_0(x) \neq j)$
$\forall x(k_1(x) \neq 0)$	$\forall x(k_1(x) \neq 1)$	$\forall x(k_1(x) \neq 2)$		
$\forall x(k_2(x) \neq 0)$	$\forall x(k_2(x) \neq 1)$	$\forall x(k_2(x) \neq 2)$		
$\vdots$				
$\forall x(k_i(x) \neq 0$	$\dots$	$\dots$	$\forall x(k_i(x) \neq i)$	$\forall x(k_i(x) \neq j$
				$\forall x(k_j(x) \neq j$

A pirossal jelöltek az átlós kijelentések.

Mindegyik azt mondja egy kifejezésről, hogy nem veszi fel értékként a saját sorszámát.

Egyes átlós kijelentések igazak, mások hamisak.

Egyes átlós kijelentések alighanem bizonyíthatóak. Ezek remélhetően igazak is.

Az egyenlőtenségek táblázata: így néz ki

$\forall x(k_0(x) \neq 0)$	$\forall x(k_0(x) \neq 1)$	$\forall x(k_0(x) \neq 2)$	$\dots$	$\forall x(k_0(x) \neq j)$
$\forall x(k_1(x) \neq 0)$	$\forall x(k_1(x) \neq 1)$	$\forall x(k_1(x) \neq 2)$		
$\forall x(k_2(x) \neq 0)$	$\forall x(k_2(x) \neq 1)$	$\forall x(k_2(x) \neq 2)$		
$\vdots$				
$\forall x(k_i(x) \neq 0$	$\dots$	$\dots$	$\forall x(k_i(x) \neq i)$	$\forall x(k_i(x) \neq j$
				$\forall x(k_j(x) \neq j$

A pirossal jelöltek az átlós kijelentések.

Mindegyik azt mondja egy kifejezésről, hogy nem veszi fel értékként a saját sorszámát.

Egyes átlós kijelentések igazak, mások hamisak.

Egyes átlós kijelentések alighanem bizonyíthatóak. Ezek remélhetően igazak is.

Vannak-e olyanok, amelyek igazak, de nem bizonyíthatóak?

Az egyenlőtenségek táblázata: így néz ki

$\forall x(k_0(x) \neq 0)$	$\forall x(k_0(x) \neq 1)$	$\forall x(k_0(x) \neq 2)$	$\ldots$	$\forall x(k_0(x) \neq j)$
$\forall x(k_1(x) \neq 0)$	$\forall x(k_1(x) \neq 1)$	$\forall x(k_1(x) \neq 2)$		
$\forall x(k_2(x) \neq 0)$	$\forall x(k_2(x) \neq 1)$	$\forall x(k_2(x) \neq 2)$		
$\vdots$				
$\forall x(k_i(x) \neq 0$	$\ldots$	$\ldots$	$\forall x(k_i(x) \neq i)$	$\forall x(k_i(x) \neq j$
				$\forall x(k_j(x) \neq j$

A pirossal jelöltek az átlós kijelentések.

Mindegyik azt mondja egy kifejezésről, hogy nem veszi fel értékként a saját sorszámát.

Egyes átlós kijelentések igazak, mások hamisak.

Egyes átlós kijelentések alighanem bizonyíthatóak. Ezek remélhetően igazak is.

Vannak-e olyanok, amelyek igazak, de nem bizonyíthatóak?

Azt fogjuk megmutatni, hogy ha jó az elméletünk (tehát nem bizonyíthatók benne hamis állítások), akkor igen.

Átlós bizonyítások

Átlós bizonyítások

A Peano-aritmetikában (vagy bármilyen axiomatikus aritmetikai elméletben) végrehajtható bizonyítások közül gyűjtsük össze és rendezzük sorozatba azokat, amelyek átlós kijelentéseket bizonyítanak:

$B_1,\ B_2,\ \ldots B_n,\ \ldots$

Átlós bizonyítások

A Peano-aritmetikában (vagy bármilyen axiomatikus aritmetikai elméletben) végrehajtható bizonyítások közül gyűjtsük össze és rendezzük sorozatba azokat, amelyek átlós kijelentéseket bizonyítanak:

$B_1, \ B_2, \ \ldots B_n, \ \ldots$

Definiáljunk egy f függvényt a következőképpen:

$f(n)$ legyen annak az átlós kijelentésnek a sorszáma, amelyet B_n bizonyít.

Átlós bizonyítások

A Peano-aritmetikában (vagy bármilyen axiomatikus aritmetikai elméletben) végrehajtható bizonyítások közül gyűjtsük össze és rendezzük sorozatba azokat, amelyek átlós kijelentéseket bizonyítanak:

$B_1,\ B_2,\ \dots B_n,\ \dots$

Definiáljunk egy f függvényt a következőképpen:

$f(n)$ legyen annak az átlós kijelentésnek a sorszáma, amelyet B_n bizonyít.

Azaz B_n bizonyítása a $\forall x(k_{f(n)}(x) \neq f(n))$ átlós kijelentésnek.

Átlós bizonyítások

A Peano-aritmetikában (vagy bármilyen axiomatikus aritmetikai elméletben) végrehajtható bizonyítások közül gyűjtsük össze és rendezzük sorozatba azokat, amelyek átlós kijelentéseket bizonyítanak:

$B_1,\ B_2,\ \dots B_n,\ \dots$

Definiáljunk egy f függvényt a következőképpen:
$f(n)$ legyen annak az átlós kijelentésnek a sorszáma, amelyet B_n bizonyít.

Azaz B_n bizonyítása a $\forall x(k_{f(n)}(x) \neq f(n))$ átlós kijelentésnek.

Nem bizonyítjuk: $f(x)$ is kifejezhető egyváltozós aritmetikai kifejezéssel.

Átlós bizonyítások

A Peano-aritmetikában (vagy bármilyen axiomatikus aritmetikai elméletben) végrehajtható bizonyítások közül gyűjtsük össze és rendezzük sorozatba azokat, amelyek átlós kijelentéseket bizonyítanak:

$B_1,\ B_2,\ \ldots B_n,\ \ldots$

Definiáljunk egy f függvényt a következőképpen:
$f(n)$ legyen annak az átlós kijelentésnek a sorszáma, amelyet B_n bizonyít.

Azaz B_n bizonyítása a $\forall x(k_{f(n)}(x) \neq f(n))$ átlós kijelentésnek.

Nem bizonyítjuk: $f(x)$ is kifejezhető egyváltozós aritmetikai kifejezéssel.

Tehát a $k_n(x)$ kifejezések között van (legalább) egy, amelyik bármely természetes számra ugyanazt az értéket adja, mint f. Legyen egy ilyen kifejezés sorszáma g.

Átlós bizonyítások

A Peano-aritmetikában (vagy bármilyen axiomatikus aritmetikai elméletben) végrehajtható bizonyítások közül gyűjtsük össze és rendezzük sorozatba azokat, amelyek átlós kijelentéseket bizonyítanak:
$B_1,\ B_2,\ \ldots B_n,\ \ldots$

Definiáljunk egy f függvényt a következőképpen:
$f(n)$ legyen annak az átlós kijelentésnek a sorszáma, amelyet B_n bizonyít.

Azaz B_n bizonyítása a $\forall x(k_{f(n)}(x) \neq f(n))$ átlós kijelentésnek.

Nem bizonyítjuk: $f(x)$ is kifejezhető egyváltozós aritmetikai kifejezéssel.

Tehát a $k_n(x)$ kifejezések között van (legalább) egy, amelyik bármely természetes számra ugyanazt az értéket adja, mint f.
Legyen egy ilyen kifejezés sorszáma g.

Azaz $k_g(x) = f(x)$, bármely x-re.

A Gödel-mondat

A Gödel-mondat

Tekintsük a g-edik átlós formulát:

(G) $\forall x(k_g(x) \neq g)$

A Gödel-mondat

Tekintsük a g-edik átlós formulát:

(G) $\forall x(k_g(x) \neq g)$

Állítás: a G mondat akkor és csak akkor bizonyítható, ha hamis.

A Gödel-mondat

Tekintsük a g-edik átlós formulát:

(G) $\forall x(k_g(x) \neq g)$

Állítás: a G mondat akkor és csak akkor bizonyítható, ha hamis.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy G bizonyítható. Akkor legalább egy bizonyítása szerepel a $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sorozatban.

A Gödel-mondat

Tekintsük a g-edik átlós formulát:

(G) $\qquad \forall x(k_g(x) \neq g)$

Állítás: a G mondat akkor és csak akkor bizonyítható, ha hamis.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy G bizonyítható. Akkor legalább egy bizonyítása szerepel a $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sorozatban.

Legyen G egy bizonyítása B_r. Akkor f értelmezése szerint $f(r) = g$, tehát $k_g(r) = g$. De akkor G hamis!

A Gödel-mondat

Tekintsük a g-edik átlós formulát:

(G) $\quad \forall x(k_g(x) \neq g)$

Állítás: a G mondat akkor és csak akkor bizonyítható, ha hamis.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy G bizonyítható. Akkor legalább egy bizonyítása szerepel a $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sorozatban.

Legyen G egy bizonyítása B_r. Akkor f értelmezése szerint $f(r) = g$, tehát $k_g(r) = g$. De akkor G hamis!

Tegyük most fel, hogy G hamis. Akkor van olyan m, hogy $k_g(m) = g$, tehát $f(m) = g$. Ezek szerint B_m bebizonyítja a g-edik átlós formulát, azaz G-t. Tehát G bizonyítható.

A Gödel-mondat

Tekintsük a g-edik átlós formulát:

(G) $\quad \forall x(k_g(x) \neq g)$

Állítás: a G mondat akkor és csak akkor bizonyítható, ha hamis.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy G bizonyítható. Akkor legalább egy bizonyítása szerepel a $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ sorozatban.

Legyen G egy bizonyítása B_r. Akkor f értelmezése szerint $f(r) = g$, tehát $k_g(r) = g$. De akkor G hamis!

Tegyük most fel, hogy G hamis. Akkor van olyan m, hogy $k_g(m) = g$, tehát $f(m) = g$. Ezek szerint B_m bebizonyítja a g-edik átlós formulát, azaz G-t. Tehát G bizonyítható.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. Ha az aritmetikánkban nem lehet hamis mondatokat bizonyítani, akkor az a lehetőség, hogy G hamis és bizonyítható, kiesik, tehát akkor G igaz és nem bizonyítható.

Ugyanaz másképp

Ugyanaz másképp

Fogalmazzuk át G-t: nincs olyan x, hogy $f(x) = g$.

Ugyanaz másképp

Fogalmazzuk át G-t: nincs olyan x, hogy $f(x) = g$.

Azaz nincs olyan x szám, hogy B_x a g-edik átlós formula bizonyítása lenne.

Ugyanaz másképp

Fogalmazzuk át G-t: nincs olyan x, hogy $f(x) = g$.

Azaz nincs olyan x szám, hogy B_x a g-edik átlós formula bizonyítása lenne.

Tehát G mondat azt mondja, hogy a g-edik átlós formulának nincs bizonyítása.

Ugyanaz másképp

Fogalmazzuk át G-t: nincs olyan x, hogy $f(x) = g$.

Azaz nincs olyan x szám, hogy B_x a g-edik átlós formula bizonyítása lenne.

Tehát G mondat azt mondja, hogy a g-edik átlós formulának nincs bizonyítása.

Azaz azt mondja saját magáról, hogy nem bizonyítható.

Ugyanaz másképp

Fogalmazzuk át G-t: nincs olyan x, hogy $f(x) = g$.

Azaz nincs olyan x szám, hogy B_x a g-edik átlós formula bizonyítása lenne.

Tehát G mondat azt mondja, hogy a g-edik átlós formulának nincs bizonyítása.

Azaz azt mondja saját magáról, hogy nem bizonyítható.

Ez vagy igaz, vagy nem. Ha nem igaz, akkor G bizonyítható, tehát van egy hamis mondat, ami bizonyítható.

Ugyanaz másképp

Fogalmazzuk át G-t: nincs olyan x, hogy $f(x) = g$.

Azaz nincs olyan x szám, hogy B_x a g-edik átlós formula bizonyítása lenne.

Tehát G mondat azt mondja, hogy a g-edik átlós formulának nincs bizonyítása.

Azaz azt mondja saját magáról, hogy nem bizonyítható.

Ez vagy igaz, vagy nem. Ha nem igaz, akkor G bizonyítható, tehát van egy hamis mondat, ami bizonyítható.

Ha pedig igaz, akkor az pont azt jelenti, hogy nem bizonyítható.

Ugyanaz másképp

Fogalmazzuk át G-t: nincs olyan x, hogy $f(x) = g$.

Azaz nincs olyan x szám, hogy B_x a g-edik átlós formula bizonyítása lenne.

Tehát G mondat azt mondja, hogy a g-edik átlós formulának nincs bizonyítása.

Azaz azt mondja saját magáról, hogy nem bizonyítható.

Ez vagy igaz, vagy nem. Ha nem igaz, akkor G bizonyítható, tehát van egy hamis mondat, ami bizonyítható.

Ha pedig igaz, akkor az pont azt jelenti, hogy nem bizonyítható.

Ha kibővítjük újabb axiómákkal a Peano-aritmetikát, (mondjuk G-t felvesszük az axiómák közé), ettől megváltozik a B_n sorozat. Ha újabb nem-logikai konstansokat (függvényjeleket) veszünk be a nyelvbe, változhat a k_j sorozat. De ugyanígy eljárva, a megváltoztatott rendszerhez is tudunk találni egy Gödel-mondatot.