Érveléstechnika és logika

Kijelentéslogika

Formalizálás, centrális logikai fogalmak igazságtáblázatokon és analitikus fákon keresztül

Molnár Attila, Zvolenszky Zsófia

Kőbányai Szent László Gimnázium
Eötvös Loránd Tudományegyetem

2017. március 11.

Formalizálás I.

Példák

Ha esik, ha fú, elmegyek és megnézem!

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha esik, ha fú, elmegyek és megnézem!

p : Esik.
q : Fú.
r : Elmegyek.
s : Megnézem.

$$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$$

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Példák

Tetszik, nem tetszik, megcsinálod és kész.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Tetszik, nem tetszik, megcsinálod és kész.

p : Tetszik.
q : Megcsinálod (és kész)*.

$$(p \vee \neg p) \rightarrow q$$

Az „...és kész” itt nem külön mondatra utal, hanem arra, hogy az illető lezártnak tekinti a vitát. Ez az aktus a klasszikus logika keretei között nem igazán formalizálható.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha idejében elkészülök a munkámmal, akkor felhívlak, és ha lesz kedved, elmehetünk a moziba és megnézhetjük a filmet.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha idejében elkészülök a munkámmal, akkor felhívlak, és ha lesz kedved, elmehetünk a moziba és megnézhetjük a filmet.

p : Idejében elkészülök a munkámmal.
q : Felhívlak.
r : Lesz kedved.
s : Elmehetünk moziba.
t : Megnézhetjük a filmet.

$$p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow (s \wedge t))$$

Vigyázzunk, a $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow (s \wedge t))$ nem helyes formalizálás: a második feltételes állításnak a kedv a feltétele, nem pedig a kedv és a felhívás; az állítás ha igaz, akkor ha elkészülök a munkámmal, akkor az illető felhívása is meg kell történjen, tehát ez nem egy feltétel része. Erre a másik kijelentéslogikai szerkezetre a következő lenne példa:

Ha idejében elkészülök a munkámmal, akkor ha felhívlak és lesz kedved, elmehetünk a moziba és megnézhetjük a filmet.*A példamondat Mekis Péter gyűjtése*

Példák

Ha bajban vagy, segítek, feltéve, hogy idejében szólsz.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha bajban vagy, segítek, feltéve, hogy idejében szólsz.

p : Bajban vagy.
q : Segítek.
r : Idejében szólsz.

$$r \longrightarrow (p \longrightarrow q)$$

Ez egyébként ekvivalens (lásd később) a következővel:

Ha bajban vagy és idejében szólsz, segítek.

$$(p \wedge r) \longrightarrow q$$

$$(r \wedge p) \longrightarrow q$$

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha sietek és sehol egy taxi, vagy ha szorongok és senki nem nyugtat meg, menthetetlenül leizzadok.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha sietek és sehol egy taxi, vagy ha szorongok és senki nem nyugtat meg, menthetetlenül leizzadok.

p : Sietek.
q : Sehol egz taxi.
r : Szorongok.
s : Senki nem nyugtat meg.
t : Menthetetlenül leizzadok.

$$\big((p \wedge q) \vee (r \wedge s)\big) \rightarrow t$$

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Néha a ‘pedig’ ‘és’-t jelent, meg a de’ is, meg a ‘meg’ is.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Néha a ‘pedig’ ‘és’-t jelent, meg a de’ is, meg a ‘meg’ is.

p : Néha a ‘pedig’ ‘és’-t jelent.
q : Néha a de’ ‘és’-t jelent.
r : Néha a ‘meg’ ‘és’-t jelent.

$$p \wedge q \wedge r$$

Vigyázzunk, a „Néha φ” nem extenzionális kapcsoló! Mindössze az alapján, hogy φ igaz vagy hamis, még semmit nem tudunk mondani arról, hogy ez csak „néha” van-e így vagy sem!

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Példák

Vasárnap este buli lesz; ha eső lesz, nem lesz, ha eső nem lesz, lesz.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Vasárnap este buli lesz; ha eső lesz, nem lesz, ha eső nem lesz, lesz.

p : Vasárnap este buli lesz.
q : Eső lesz.

$$p \wedge ((q \to \neg p) \wedge (\neg q \to p))$$

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Példák

Igaz, hogy ha az eredeti feltételes állítás igaz, akkor a megfelelő logikai formula is igaz, de nem igaz, hogy ha a megfelelő formula igaz, akkor az eredeti feltételes állítás is igaz.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Példák

Igaz, hogy ha az eredeti feltételes állítás igaz, akkor a megfelelő logikai formula is igaz, de nem igaz, hogy ha a megfelelő formula igaz, akkor az eredeti feltételes állítás is igaz.

p : Az eredeti feltételes állítás igaz.
q : A megfelelő logikai formula igaz.

$$(p \to q) \land \neg(q \to p)$$

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Logikai igazság

Példák

Ha Gáber eszik, akkor Gáber eszik.

PÉLDÁK

Ha Gáber eszik, akkor Gáber eszik.

p : Gáber eszik

Példák

Ha Gáber eszik, akkor Gáber eszik.

p : Gáber eszik

$$p \rightarrow p$$

Logikai igazság

Definíció (Logikai igazság)

Logikai igazságnak vagy tautológiának nevezünk egy állítást, ami attól függetlenül igaz, hogy az összetevők igazak vagy hamisak.

Egy igazságtáblázatban a logikai igazságok oszlopában mindenhol I van.

p	$p \to p$
I	I
H	I

Ellentmondás

Definíció ((Ön)ellentmondás)

Önellentmondásnak vagy **kielégíthetetlennek** nevezünk egy állítást, ami attól függetlenül hamis, hogy az összetevők igazak vagy hamisak.

Egy igazságtáblázatban a logikai igazságok oszlopában mindenhol H van.

Megjegyzés ((Ön)ellentmondás)

Logikai igazságok tagadása önellentmondás, önellentmondások tagadása logikai igazság.

p	$p \wedge \neg p$
I	H
H	H

Kielégíthetőség

Definíció (Kielégíthető állítás)

Kielégíthetőnek nevezünk egy állítást, ha nem önellentmondó. Állítások egy halmazát kielégíthetőnek mondjuk, hogy ha lehetnek egyszerre igazak.

Ekvivalencia

Példák

Ha Maminti a liftet választja, akkor ha Médeia is így tesz, kínos csend lesz a fülkében.

Példák

Ha Maminti a liftet választja, akkor ha Médeia is így tesz, kínos csend lesz a fülkében.

Ha Maminti és Médeia is a liftet választja, akkor kínos csend lesz a fülkében.

Példák

Ha Maminti a liftet választja, akkor ha Médeia is így tesz, kínos csend lesz a fülkében.

Ha Maminti és Médeia is a liftet választja, akkor kínos csend lesz a fülkében.

p : Maminti a liftet választja
q : Médeia a liftet választja
r : Kínos csend lesz a liftben

Példák

Ha Maminti a liftet választja, akkor ha Médeia is így tesz, kínos csend lesz a fülkében.

Ha Maminti és Médeia is a liftet választja, akkor kínos csend lesz a fülkében.

p : Maminti a liftet választja
q : Médeia a liftet választja
r : Kínos csend lesz a liftben

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ vagy $(p \land q) \rightarrow r$

Ugyanazt jelentik?

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \Longleftrightarrow q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
I	I	I				
I	I	H				
I	H	I				
I	H	H				
H	I	I				
H	I	H				
H	H	I				
H	H	H				

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \Longleftrightarrow q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
I	I	I	I			
I	I	H	I			
I	H	I	H			
I	H	H	H			
H	I	I	H			
H	I	H	H			
H	H	I	H			
H	H	H	H			

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \Longleftrightarrow q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
I	I	I	I	I		
I	I	H	I	H		
I	H	I	H	I		
I	H	H	H	I		
H	I	I	H	I		
H	I	H	H	I		
H	H	I	H	I		
H	H	H	H	I		

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \Longleftrightarrow q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
I	I	I	I	I	I	
I	I	H	I	H	H	
I	H	I	H	I	I	
I	H	H	H	I	I	
H	I	I	H	I	I	
H	I	H	H	I	H	
H	H	I	H	I	I	
H	H	H	H	I	I	

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \Longleftrightarrow q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	H	H	H
I	H	I	H	I	I	I
I	H	H	H	I	I	I
H	I	I	H	I	I	I
H	I	H	H	I	H	I
H	H	I	H	I	I	I
H	H	H	H	I	I	I

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \Longleftrightarrow q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	H	H	H
I	H	I	H	I	I	I
I	H	H	H	I	I	I
H	I	I	H	I	I	I
H	I	H	H	I	H	I
H	H	I	H	I	I	I
H	H	H	H	I	I	I
				↑		↑

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \iff q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

$\varphi \iff \psi$ pontosan akkor áll fenn, ha $\varphi \leftrightarrow \psi$ logikai igazság.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	H	H	H
I	H	I	H	I	I	I
I	H	H	H	I	I	I
H	I	I	H	I	I	I
H	I	H	H	I	H	I
H	H	I	H	I	I	I
H	H	H	H	I	I	I
				↑		↑

Ekvivalencia

Definíció (Ekvivalencia)

Ekvivalensnek nevezünk két állítást, ha pontosan ugyanakkor igazak. Jelölése:

$$p \iff q$$

Egy igazságtáblázatban az ekvivalens állítások oszlopa megegyezik.

$\varphi \iff \psi$ pontosan akkor áll fenn, ha $\varphi \leftrightarrow \psi$ logikai igazság.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$
I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	H	H	H	I
I	H	I	H	I	I	I	I
I	H	H	H	I	I	I	I
H	I	I	H	I	I	I	I
H	I	H	H	I	H	I	I
H	H	I	H	I	I	I	I
H	H	H	H	I	I	I	I

Példák

Ánfissza ír egy SMS-t Jáelnek és Lencsinek vagy Lottának az akcióról.

Példák

Ánfissza ír egy SMS-t Jáelnek és Lencsinek vagy Lottának az akcióról.

p : Ánfissza ír egy SMS-t Jáelnek
q : Ánfissza ír egy SMS-t Lencsinek
r : Ánfissza ír egy SMS-t Lottának

Példák

Ánfissza ír egy SMS-t Jáelnek és Lencsinek vagy Lottának az akcióról.

p : Ánfissza ír egy SMS-t Jáelnek
q : Ánfissza ír egy SMS-t Lencsinek
r : Ánfissza ír egy SMS-t Lottának

$(p \wedge q) \vee r$ vagy $p \wedge (q \vee r)$

?

A kettő nem ugyanazt jelenti!
Ezért súlyos hiba elhagyni a zárójelet.
Zárójel nélkül nem világos, mi folyik itt!

Ekvivalencia

A $(p \wedge q) \vee r$ és $p \wedge (q \vee r)$ kifejezések a más zárójelezés miatt mást jelentenek:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Leftrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
I	I	I				
I	I	H				
I	H	I				
I	H	H				
H	I	I				
H	I	H				
H	H	I				
H	H	H				

Ekvivalencia

A $(p \wedge q) \vee r$ és $p \wedge (q \vee r)$ kifejezések a más zárójelezés miatt mást jelentenek:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Leftrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
I	I	I	I			
I	I	H	I			
I	H	I	H			
I	H	H	H			
H	I	I	H			
H	I	H	H			
H	H	I	H			
H	H	H	H			

Ekvivalencia

A $(p \wedge q) \vee r$ és $p \wedge (q \vee r)$ kifejezések a más zárójelezés miatt mást jelentenek:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Leftrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
I	I	I	I	I		
I	I	H	I	I		
I	H	I	H	I		
I	H	H	H	H		
H	I	I	H	I		
H	I	H	H	H		
H	H	I	H	I		
H	H	H	H	H		

Ekvivalencia

A $(p \wedge q) \vee r$ és $p \wedge (q \vee r)$ kifejezések a más zárójelezés miatt mást jelentenek:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Leftrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
I	I	I	I	I	I	
I	I	H	I	I	I	
I	H	I	H	I	I	
I	H	H	H	H	H	
H	I	I	H	I	I	
H	I	H	H	H	I	
H	H	I	H	I	I	
H	H	H	H	H	H	

Ekvivalencia

A $(p \wedge q) \vee r$ és $p \wedge (q \vee r)$ kifejezések a más zárójelezés miatt mást jelentenek:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Leftrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	I	I	I
I	H	I	H	I	I	I
I	H	H	H	H	H	H
H	I	I	H	I	I	H
H	I	H	H	H	I	H
H	H	I	H	I	I	H
H	H	H	H	H	H	H

Ekvivalencia

A $(p \wedge q) \vee r$ és $p \wedge (q \vee r)$ kifejezések a más zárójelezés miatt mást jelentenek:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Leftrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$

	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
	I	I	I	I	I	I	I
	I	I	H	I	I	I	I
	I	H	I	H	I	I	I
	I	H	H	H	H	H	H
→	H	I	I	H	I	I	H
	H	I	H	H	H	I	H
→	H	H	I	H	I	I	H
	H	H	H	H	H	H	H

Ekvivalencia

A $(p \wedge q) \vee r$ és $p \wedge (q \vee r)$ kifejezések a más zárójelezés miatt mást jelentenek:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Leftrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$

	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
	I	I	I	I	I	I	I
	I	I	H	I	I	I	I
	I	H	I	H	I	I	I
	I	H	H	H	H	H	H
→	H	I	I	H	I	I	H
	H	I	H	H	H	I	H
→	H	H	I	H	I	I	H
	H	H	H	H	H	H	H

Kitérő: feltételek

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Minden feltételes állítás $\varphi \rightarrow \psi$ vagy $\varphi \leftrightarrow \psi$ szerkezetű, de nem minden esetben φ a feltétel. Feltételből ugyanis kétféle van, a szükséges és az elégséges feltétel.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Elégséges feltétel

Az elégséges feltétel igazsága maga után vonja a másik részállítás igazságát, ezt az egyszerűbb felismerni:

„Ha $\underbrace{\text{elvesztem a kulcsom}}_{\text{elégséges feltétel}}$, nem tudok hazamenni.”

„Beszélek németül, feltéve, hogy $\underbrace{\text{van ’netem}}_{\text{elégséges feltétel}}$.”

„Adok kölcsönt, már amennyiben $\underbrace{\text{nekem is van annyi pénzem}}_{\text{elégséges feltétel}}$.”

Ilyenkor az állítás logikai szerkezete $p \rightarrow q$ alakú, ahol p az elégséges feltétel.

Azért könnyű formalizálni az elégséges feltételes mondatokat, mert a kiemelt szavak mindig a feltételnél vannak.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Szükséges feltétel

A szükséges feltétel ‘hamissága’ maga után vonja a másik részállítás ‘hamisságát’, ezt nehezebb felismerni. Célszerű magunkban átfogalmazni ezeket elégséges feltételes mondatra:

„Csak akkor hallgatok lakodalmast, ha $\underbrace{\text{ittas vagyok}}_{\text{szükséges feltétel}}$.”

azaz

„Ha nem $\underbrace{\text{vagyok ittas}}_{\text{elégséges feltétel}}$, akkor nem hallgatok lakodalmast.”

Ilyenkor az állítás $q \rightarrow p$ alakú, ahol p a szükséges feltétel.

Azért nehéz formalizálni az szükséges feltételes mondatokat, mert a kiemelt szavak nem mindig világos, hogy milyen feltételnél állnak, sőt, több is van belőlük és néha más szerepet töltenek be.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Szükséges feltétel

A szükséges feltétel ‘hamissága’ maga után vonja a másik részállítás ‘hamisságát’, ezt nehezebb felismerni. Célszerű magunkban átfogalmazni ezeket elégséges feltételes mondatra:

„Nem hallgatok lakodalmast, csak ha $\underbrace{\text{ittas vagyok}}_{\text{szükséges feltétel}}$.”

azaz

„ha $\underbrace{\text{lakodalmast hallgatok}}_{\text{elégséges feltétel}}$, akkor ittas vagyok.”

Ilyenkor az állítás $q \to p$ alakú, ahol p a szükséges feltétel.

Azért nehéz formalizálni az szükséges feltételes mondatokat, mert a kiemelt szavak nem mindig világos, hogy milyen feltételnél állnak, sőt, több is van belőlük és néha más szerepet töltenek be.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Szükséges feltétel

A szükséges feltétel ‘hamissága’ maga után vonja a másik részállítás ‘hamisságát’, ezt nehezebb felismerni. Célszerű magunkban átfogalmazni ezeket elégséges feltételes mondatra:

„Laci jön hétre, hacsak $\underbrace{\text{Móni nem ér rá négykor}}_{\text{szükséges feltétel}}$.”

azaz
„ha $\underbrace{\text{Móni ráér hétkor}}_{\text{elégséges feltétel}}$, akkor Laci nem megy hétre.”

„ha $\underbrace{\text{Laci jön hétre}}_{\text{elégséges feltétel}}$, akkor Móni nem ér rá négykor.”

> Ilyenkor az állítás $q \rightarrow p$ alakú, ahol p a szükséges feltétel.

Azért nehéz formalizálni az szükséges feltételes mondatokat, mert a kiemelt szavak nem mindig világos, hogy milyen feltételnél állnak, sőt, több is van belőlük és néha más szerepet töltenek be.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Szükséges és elégséges feltétel

A szükséges és elégséges feltétel igazságértéke megegyezik a másik részállítás igazságértékével. Ezt könnyű felismerni:

„Pontosan akkor veszek sorsjegyet, ha $\underbrace{\text{a nyeremény tíz számjegyű.}}_{\text{szükséges és elégséges feltétel}}$”

„Akkor és csak akkor veszek sorsjegyet, ha $\underbrace{\text{a nyeremény tíz számjegyű.}}_{\text{szükséges és elégséges feltétel}}$”

> Ilyenkor az állítás $q \longleftrightarrow p$ alakú, ahol p a szükséges és elégséges feltétel.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Szükséges és elégséges feltételek kapcsolata

A szükséges és elégséges feltétel igazságértéke megegyezik a másik részállítás igazságértékével. Ezt könnyű felismerni:
Minden feltételes állítás szerkezete valamilyen (esetleg mindkét) irányú $A \rightarrow B$ alakú formula. Ilyenkor A-ra mindig tekinthetünk úgy, mint elégséges feltétel, B-re pedig mint szükséges feltétel.
Az $A \longleftrightarrow B$ alakú mondatoknál mind az A-ra, mind pedig a B-re tekinthetünk úgy, mint szükséges és elégséges feltételek.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Csapdák: ígéretek

Sok esetben bár szükséges feltételt jelez a mondat, a sejtett vagy valós szövegkörnyezet ismeretében szükséges és elégséges feltételre kell gondolni. Ugyanez áll néha az elégséges feltételek esetén is.

Kiváló példák erre az ígéretek, például:

„Kipukkasztom a labdád, ha(csak) $\underbrace{\text{nem adod ide a kis piros vödrödet.}}_{\text{szükséges és elégséges feltétel}}$"

mivel
„ha $\underbrace{\text{nem adod ide a kis piros vödrödet,}}_{\text{elégséges feltétel}}$ akkor kipukkasztom a labdád."

„ha $\underbrace{\text{ideadod a kis piros vödrödet,}}_{\text{elégséges feltétel}}$ akkor nem pukkasztom ki a labdád."

Nagyon fontos, hogy a logikai szerkezet feltárásában tevékeny szerep jutott annak, hogy példáról feltettük, hogy egy fenyegető ígéret, és az ilyen társalgásokról *előzetesen tudjuk, hogy valójában hogyan is működnek*. Ha a két átfogalmazás bármelyike hamis lehetne, úgy érezzük, hogy az illető abban az esetben megszegné a szavát.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Csapdák: ígéretek

Veszélyes terep ez, mert ilyenkor a mondatok formalizálásába beleveszünk egy olyan faktort, ami nem az írott nyelv része, tehát nem szerepel ott sehol a mondatban. Pl. a grammatikai szerkezet most megegyezik az ígéret tekintetében nagyon is semleges és más logikai szerkezetű „Nem tudok hazamenni, ha elvesztem a kulcsom." esetében, ahol azonban a kulcs elvesztése nem szükséges feltétele annak, hogy nem tudok hazamenni. Pl. ha összedől a ház, akkor sem tudok hazamenni, viszont a kulcsom még meg lehet.
Hasonló ehhez az, amikor mondatot követő szövegkörnyezetet sejteti, de nem biztosítja egy kötőszó, erre lesz példa a következő dián.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Csapdák: hacsak

A hacsak egy veszélyes kötőszó, ha nagyobb szövegkörnyezet nélkül fordul elő: „A korona az ezüst ládikában van, hacsak a tiara nincs az aranyban.”

Itt a hacsaknak ezt az előfordulását nem pusztán szükséges, de szükséges és elégséges feltételnek érezzük. Ez azonban valószínűleg azért van, mert egy ilyen mondatot *általában* egy olyan leírás szokott követni, ahol kifejtjük, hogy ha a tiara nincs az arany ládikában, akkor mi a helyzet a koronával, és rendszerint az szokott kiderülni, hogy a korona ilyenkor nem az ezüst ládikában lesz. A ‘hacsak’ egy efféle fordulatot előlegez meg a nyelvben, ezért már (okosan) eleve úgy készülünk, hogy a szükséges feltételünkről nemsokára kiderül, hogy elégséges is.

Kitérő: Feltételes állítások felismerése

Csapdák: hacsak

Próbáljuk megszegni ezt a konvenciót; ellentmondásosnak érezzük-e a következő érvelést?

„A korona az ezüst ládikában van, hacsak a tiara nincs az aranyban. Mert ha a tiara a nem az arany ládikában van, akkor a karkötő van ott, a tiara pedig a bronz ládikában, és a korona kerül az ezüst ládikába. Tehát a korona mindenképp az ezüst ládikában van.”

Nem ellentmondás, inkább csalódottság az, amit ilyenkor érez az ember. Hasonló a helyzet a „de” kötőszó esetében, amikor a második összekapcsolt állítás az ígéretével szemben mégsem meghökkentő, pl.

„Kitűnő lettem félévkor, de ösztöndíjat kaptam.”

Nem ellentmondással állunk szemben, csak valaki olyannal, aki még nem beszéli elég jól a nyelvet ahhoz, hogy törődjön az olvasójával.

Összegezve: tanácsoljuk az olvasónak, hogy tartsa magát távol a hacsak-ot tartalmazó, szövegkörnyezetükből kiragadott mondatok formalizálásától, ha azonban mégis erre kényszerül, vegye a feltételt szükséges előfeltételnek.

Következtetések és ellenőrzésük

Indirekt érvelés

Nurbanu csak akkor nem elégedett magával,
ha nem megy sem a piacra, sem a spinning edzésre.
Nurbanu piacra megy, ha nem megy spinning edzésre.

Nurbanu elégedett lesz önmagával.

Indirekt érvelés

Nurbanu csak akkor nem elégedett magával,
ha nem megy sem a piacra, sem a spinning edzésre.
Nurbanu piacra megy, ha nem megy spinning edzésre.

Nurbanu elégedett lesz önmagával.

p : Nurbanu meg lesz elégedve magával.
q : Nurbanu piacra megy.
r : Nurbanu spinning edzésre megy.

Indirekt érvelés

Nurbanu csak akkor nem elégedett magával,
ha nem megy sem a piacra, sem a spinning edzésre.
Nurbanu piacra megy, ha nem megy spinning edzésre.

Nurbanu elégedett lesz önmagával.

p : Nurbanu meg lesz elégedve magával.
q : Nurbanu piacra megy.
r : Nurbanu spinning edzésre megy.

$$\frac{\begin{array}{l}\neg p \to (\neg q \wedge \neg r) \\ \neg r \to q\end{array}}{p}$$

INDIREKT ÉRVELÉS

$$\neg p \to (\neg q \land \neg r)$$

$$\neg r \to q$$

$$\overline{}$$

$$p$$

A következtetés helyes, mivel a premisszák igazsága garantálja a konklúzió igazságát. Más szóval lehetetlen, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis legyen.

Ezt úgy tudjuk bebizonyítani egyszerűen, hogy feltesszük, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis, és ebből az ún. indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le, ezáltal kimutatva, hogy lehetetlen, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis legyen.

1. Tegyük fel (indirekte), hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.
2. Mivel a konklúzió hamis, $\neg p$ igaz.
3. Emiatt, és mivel az első premissza igaz, a *modus ponens* logikai szabály miatt $\neg q \land \neg r$ is igaz
4. Azaz $\neg q$ is igaz, azaz q hamis.
5. Azaz $\neg r$ is igaz.
6. a második premissza igazsága és az előbbi pont miatt akkor q is igaz.
7. ez azonban ellentmond annak, hogy a 4. pont miatt q hamis.
8. Ellentmondásra jutottunk, tehát a következtetés helyes.

Indirekt érvelés

Az indirekt érvelés arra képes, hogy ha a következtetés valóban helyes, akkor ezt belássuk vele. Ha a következtetés igazából helytelen, úgy az indirekt érvelés csak arra jó, hogy a cáfoló ellenpéldát kicsit feltérképezzük.
Fontos, hogy ha a köveztetés nem helyes, úgy meg kell adni legalább egy cáfoló ellenpéldát, ami ezt bizonyítja.
A cáfoló ellenpélda megadása a következő három lépés megtételét jelenti:

1. felsoroljuk a következtetésben szereplő atomi állításokat, és mindegyikről megmondjuk, hogy az (a cáfoló ellenpéldában) igaz-e vagy hamis.
2. Megmutatjuk, hogy az atomi állítások igazságértékei alapján következik, hogy mindegyik premissza igaz.
3. Megmutatjuk, hogy az atomi állítások igazságértékei alapján következik, hogy konklúzió viszont hamis

Példa a következő dián.

Példák

Ha ezt a feladatot is elszúrom, most már aztán elmegy a kedvem az egésztől, feltéve, hogy volt egyáltalán kedvem.
Márpedig vagy egyáltalán nem volt kedvem, vagy most már aztán elmegy.

Ezt a feladatot is elszúrom.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha ezt a feladatot is elszúrom, most már aztán elmegy a kedvem az egésztől, feltéve, hogy volt egyáltalán kedvem.
Márpedig vagy egyáltalán nem volt kedvem, vagy most már aztán elmegy.

Ezt a feladatot is elszúrom.

p : Ezt a feladatot is elszúrom.
q : Van kedvem (az egészhez).
r : Volt kedvem (az egészhez).

$$\frac{\begin{array}{l} r \to (p \to \neg q) \\ \neg r \nabla \neg q \end{array}}{p}$$

A ∇ jelet az ún. kizáró diszjunkció jelölésére használjuk. A kizáró értelemben értett „vagy φ vagy ψ" állítás akkor és csak akkor igaz, ha a két állítás igazságértéke különböző. Ezt a jelet azért használják ritkán, mert $\varphi \nabla \psi \iff \neg\varphi \leftrightarrow \psi$.

A következtetés helytelen: A konklúzió p lehet hamis úgy, hogy a premisszák igazak. Pl. ha p mellett r is hamis, q pedig igaz. Ekkor ugyanis az előbbi miatt a hamis előtagja miatt az első premissza igaz lesz, mivel pedig q és r igazságértéke különböző, $\neg q$ és $\neg r$ igazságértéke is különbözni fog, így a második premissza is igaz lesz. Tehát a cáfoló ellenpélda az, amikor bár elszúrom a feladatot és nem volt kedvem az egészhez, de éppen most van kedvem az egészhez.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Következtetés ellenőrzése igazságtáblázattal

Emlékezzünk vissza arra, hogy $(p \wedge q) \vee r \not\Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$

Ennek egy pontosabb leírása a következő:
$$(p \wedge q) \vee r \quad \not\Longrightarrow \quad p \wedge (q \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \quad \Longrightarrow \quad (p \wedge q) \vee r$$

Definíció (Helyes köv.)

Helyes egy következtetés, ha a premisszák igazsága garantálja a konklúció igazságát.

Ez rögtön kiderül egy kitöltött igazságtáblázatból: Ha a konklúzió nem hamis egyetlen olyan sorban sem, ahol a premisszák mind igazak, akkor a következtetés helyes.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	I	I	I
I	H	I	H	I	I	I
I	H	H	H	H	H	H
H	I	I	H	I	I	H
H	I	H	H	H	I	H
H	H	I	H	I	I	H
H	H	H	H	H	H	H

Következtetés ellenőrzése igazságtáblázattal

Emlékezzünk vissza arra, hogy $(p \wedge q) \vee r \not\Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$

Ennek egy pontosabb leírása a következő:
$$\begin{array}{lcl} (p \wedge q) \vee r & \not\Longrightarrow & p \wedge (q \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) & \Longrightarrow & (p \wedge q) \vee r \end{array}$$

Definíció (Helyes köv.)

Helyes egy következtetés, ha a premisszák igazsága garantálja a konklúció igazságát.

Ez rögtön kiderül egy kitöltött igazságtáblázatból: Ha a konklúzió nem hamis egyetlen olyan sorban sem, ahol a premisszák mind igazak, akkor a következtetés helyes.

	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
	I	I	I	I	I	I	I
	I	I	H	I	I	I	I
	I	H	I	H	I	I	I
	I	H	H	H	H	H	H
→	H	I	I	H	I	I	H
	H	I	H	H	H	I	H
→	H	H	I	H	I	I	H
	H	H	H	H	H	H	H

Következtetés ellenőrzése igazságtáblázattal

Emlékezzünk vissza arra, hogy $(p \wedge q) \vee r \;\not\Longleftrightarrow\; p \wedge (q \vee r)$

Ennek egy pontosabb leírása a következő:

$$\begin{array}{lcl} (p \wedge q) \vee r & \not\Longrightarrow & p \wedge (q \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) & \Longrightarrow & (p \wedge q) \vee r \end{array}$$

Definíció (Helyes köv.)

Helyes egy következtetés, ha a premisszák igazsága garantálja a konklúció igazságát.

Ez rögtön kiderül egy kitöltött igazságtáblázatból: Ha a konklúzió nem hamis egyetlen olyan sorban sem, ahol a premisszák mind igazak, akkor a következtetés helyes. Ebből következik az is, hogy

$\varphi \;\Longrightarrow\; \psi$ pontosan akkor áll fenn, ha $\varphi \to \psi$ logikai igazság.

$(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \vee q) \wedge r)$

	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	
	I	I	I	I	I	I	I	I
	I	I	H	I	I	I	I	I
	I	H	I	H	I	I	I	I
	I	H	H	H	H	H	H	I
→	H	I	I	H	I	I	H	I
	H	I	H	H	H	I	H	I
→	H	H	I	H	I	I	H	I
	H	H	H	H	H	H	H	I

Formalizálás II.

PÉLDÁK

Ha fekszem az ágyon, csábít az álom.
Ha csábít az álom, messzire vágyom.

Ha messzi nem vágyom, nem fekszem az ágyon.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Példák

Ha fekszem az ágyon, csábít az álom.
Ha csábít az álom, messzire vágyom.

Ha messzi nem vágyom, nem fekszem az ágyon.

p : Fekszem az ágyon.
q : Csábít az álom.

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{\neg r \to \neg p}$$

A következtetés helyes. Ellenőrzés módja: Levezetéssel. Felhasznált logikai szabályok:

- Láncszabály: $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \implies \varphi \to \chi$.
- Kontrapozíció: $\{\varphi \to \psi\} \iff \neg\psi \to \neg\varphi$.

A premisszákból a láncszabály alapján következik $p \to r$, aminek a kontrapozíciója a konklúzió.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha vesszük az analitikus táblázatokat, nem jut elég idő a történeti vonatkozásokra.
Ha nem jut idő a történeti vonatkozásokra, nem tudjuk meg, mire jó ez az egész.
Márpedig megtudjuk, mire jó ez az egész.

Nem vesszük az analitikus táblázatokat.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha vesszük az analitikus táblázatokat, nem jut elég idő a történeti vonatkozásokra.
Ha nem jut idő a történeti vonatkozásokra, nem tudjuk meg, mire jó ez az egész.
Márpedig megtudjuk, mire jó ez az egész.

Nem vesszük az analitikus táblázatokat.

p : Vesszük az analitikus táblázatokat.
q : Jut idő történeti vonatkozásokra.
r : Megtudjuk, mire jó ez az egész.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg q \\ \neg q \rightarrow \neg r \\ r \\ \hline \neg p \end{array}$$

A következtetés helyes. Ellenőrzés módja: Levezetéssel.

- kettős tagadás: $\psi \iff \neg\neg\psi$
- *modus tollens*: $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \implies \neg\varphi$

A premisszákból a láncszabály alapján következik $p \rightarrow \neg r$. Az r premisszából következik annak kettős tagadása, $\neg\neg r$. E kettőből a *modus tollens* szabály alapján következik a $\neg p$ konklúzió. (A $\psi := \neg r$ helyettesítést használtuk)

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha további részletek is érdekelnek vagy csak olvashatnékod van, érdemes körülnézni a Ruzsa-köny
Nincs olvashatnékod.

Ha további részletek is érdekelnek, érdemes körülnézni a Ruzsa-könyvben.

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

PÉLDÁK

Ha további részletek is érdekelnek vagy csak olvashatnékod van, érdemes körülnézni a Ruzsa-köny
Nincs olvashatnékod.

Ha további részletek is érdekelnek, érdemes körülnézni a Ruzsa-könyvben.

p: További részletek is érdekelnek.
q: Olvashatnékod van.
r: Érdemes körülnézni a Ruzsa-könyvben.

$$\frac{(p \vee q) \to r \qquad \neg q}{p \to r}$$

A következtetés helyes: Indirekt érveléssel bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy a konklúzió hamis, de a premisszák igazak, és ebből egy ellentmondást vezetünk le (ezáltal kimutatva, hogy lehetetlen az, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis legyen). Tegyük fel (indirekt), hogy a $p \to r$ konklúzió hamis, azaz p igaz de r hamis. Mivel megintcsak az indirekt feltevés szerint a premisszák viszont igazak, $(p \vee q) \to r$ igaz. Mármost mivel r hamis, *modus tollens* alapján $p \vee q$ is hamis, azaz p és q mindegyike hamis kell legyen. De p-ről az imént azt állítottuk, hogy igaz, így ellentmondásra jutottunk. Tehát nem lehet konzisztensen tagadni a következtetés helyességét, így az helyes. (Vegyük észre, hogy a második premisszára nem is volt szükség, így az első premisszából már magából is következik a konklúzió!)

A példamondat Mekis Péter gyűjtése

Analitikus fák

Analitikus fák

A klasszikus kijelentéslogikában minden kijelentés kifejezhető a $\neg$, $\wedge$ és $\vee$ kapcsolókkal.
(Sőt, az utóbbi kettő közül az egyiket is el lehet hagyni.)
Sőt, a De Morgan azonosságok használatával a tagadás mindig bevihető egészen az atomi formulákig.

$$\begin{aligned}
A \rightarrow B &\iff \neg A \vee B \\
\neg(A \rightarrow B) &\iff A \wedge \neg B \\
A \leftrightarrow B &\iff (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
\neg(A \leftrightarrow B) &\iff (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \\
\neg(A \vee B) &\iff \neg A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) &\iff \neg A \vee \neg B \\
\neg\neg A &\iff A
\end{aligned}$$

Így tetszőlegesen összetett kijelentéslogikai kijelentésre felépíthető egy vele ekvivalens kijelentés, ami atomi és tagadott atomi állításokból készül a $\wedge$ és $\vee$ segítségével.

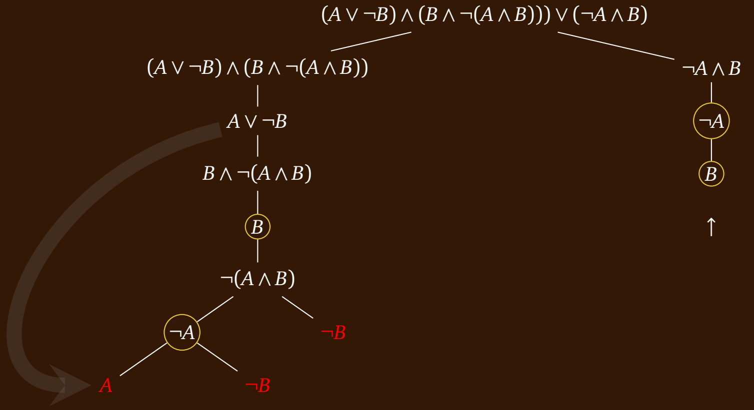
Analitikus fák

Példa:

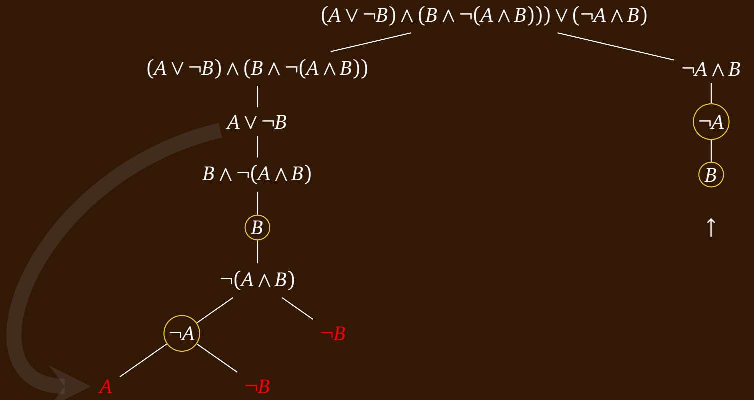
$$\begin{aligned} \neg((\neg p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow \neg q)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg(\neg p \rightarrow q) \vee \neg(r \leftrightarrow \neg q) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee ((r \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg q)) \end{aligned}$$

Analitikus fák

Az analitikus fák módszere egy esetszétválasztáson alapuló elemzés. Abból indulunk ki, hogy $A \vee B$ akkor igaz, ha legalább az egyik igaz – itt tehet egy esetszétválasztást kell alkalmazni – illetve abból, hogy $A \wedge B$ akkor igaz, ha mind a kettő igaz – itt pedig nincs szükség esetszétválasztásra. Pl.:



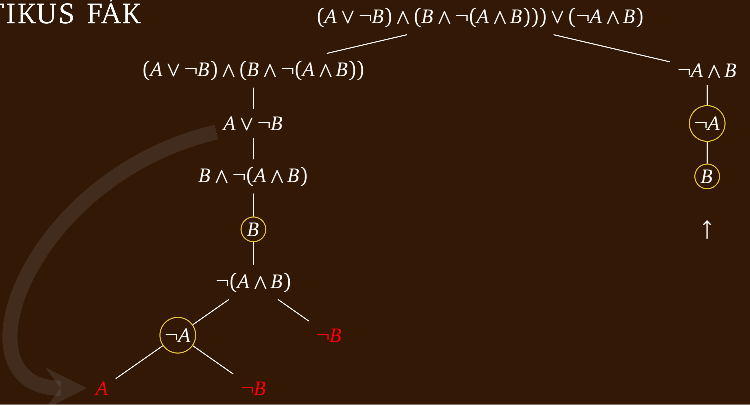
Analitikus fák



Az ábrából látszik, hogy a kiinduló kijelentés nem önellentmondásos, bár a legkülső diszjunkció bal tagja az. Az analitikus fák tehát a kielégíthetőség vizsgálatára alkalmasak leginkább:

> Kijelentések egy halmaza akkor és csak akkor ellentmondásos, ha az analitikus fáján minden ág zárt.

Analitikus fák



Kijelentések egy halmaza akkor és csak akkor ellentmondásos, ha az analitikus fáján minden ág zárt.

Ezt úgy használhatjuk következtetések ellenőrzésére, hogy azt vizsgáljuk: A premisszák és a konklúzió tagadása ellentmondásos kijelentéshalmazt alkot-e. Ha igen, akkor a következtetés helyes, ha nem, akkor helytelen és a cáfoló ellenpéldát a le nem záruló ág atomi kijelentéseiről olvashatjuk le.
Általában is a le nem záruló ágak árulkodnak arról, hogy a kijelentéshalmazból mi minden atomi állításokra vonatkozó konklúzió szűrhető le.

Származtatási szabályok

Mivel minden felírható a $\land$ és $\lor$ konnektívumokkal úgy, hogy a tagadások ‘belül vannak’, a következőképpen bonthatunk le minden típusú állítást:

	$\land$	$\lor$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
	$A \lor B$ A | B	$A \land B$ A B	$A \rightarrow B$ $\neg A$ | B	$A \leftrightarrow B$ A, B | $\neg A$, $\neg B$
$\neg$	$\neg(A \lor B)$ $\neg A$ $\neg B$	$\neg(A \land B)$ $\neg A$ | $\neg B$	$\neg(A \rightarrow B)$ A $\neg B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$ A, $\neg B$ | $\neg A$, B

Az algoritmus

1. Írjuk fel a vizsgálandó állításokat egymás alá.
2. Vegyünk egy állítást – lehetőleg azt, amelyik a legkevesebb elágazással jár majd – majd ezt bontsuk fel a származtatási szabályok alkalmazásával, majd az így keletkező részállításokat is bontsuk fel addig, amíg atomi állításokhoz vagy azok negáltjaihoz nem jutunk. Ha eközben előfordul, hogy a felfele futó láncon egy A és egy $\neg A$ alakú kijelentéspár is előfordul, akkor az ágat valamilyen jelöléssel lezárjuk. A lezárt ágakkal a továbbiakban nem csinálunk semmit.
3. Minden így keletkező nyitott, azaz nem zárt ág végére írjuk fel most a kezdeti lista egy új, eddig fel nem bontott állítását, és bontsunk azt is atomi formulákig
4. Ha elfogytak a vizsgálandó állítások, akkor
   - ha minden ág lezárult, akkor a kijelentéshalmaz ellentmondásos
   - ha van nyílt ág, a kijelentéshalmaz kielégíthető, és a kielégíteni képes értékelést a nyílt ágon felfele haladva kiolvasott atomi mondatok és tagadásaik alapján határozhatjuk meg.

Rejtvények

Rejtvények

Portia ládikái 68a – Melyik ládában van a kép?

Ezúttal minden fedélen két állítás volt, és Portia annyit mondott, hogy egyik fedélen sincs egynél több hamis állítás.

arany: A kép nem ebben van. A kép festője velencei.

ezüst: A kép nem az arany ládikában van. A kép festője firenzei.

ólom: A kép nem ebben van. A kép az ezüstládikában van.

Rejtvények

Portia ládikái 68a – Melyik ládában van a kép?

Ezúttal minden fedélen két állítás volt, és Portia annyit mondott, hogy egyik fedélen sincs egynél több hamis állítás.

arany: A kép nem ebben van. A kép festője velencei.

ezüst: A kép nem az arany ládikában van. A kép festője firenzei.

ólom: A kép nem ebben van. A kép az ezüstládikában van.

a: a kép az arany ládikában van.
e: a kép az ezüst ládikában van.
$\neg a \wedge \neg e$ megfelel annak, hogy a kép az ólomládikában van.
v: a kép festője velencei.
f: a kép festője firenzei.

Rejtvények

Portia ládikái 68a – Melyik ládában van a kép?

Ezúttal minden fedélen két állítás volt, és Portia annyit mondott, hogy egyik fedélen sincs egynél több hamis állítás.

arany: A kép nem ebben van. A kép festője velencei.

ezüst: A kép nem az arany ládikában van. A kép festője firenzei.

ólom: A kép nem ebben van. A kép az ezüstládikában van.

a: a kép az arany ládikában van.
e: a kép az ezüst ládikában van.
$\neg a \wedge \neg e$ megfelel annak, hogy a kép az ólomládikában van.
v: a kép festője velencei.
f: a kép festője firenzei.

Portia állítása alapján minden ládán lévő állítást diszjunkcióval kell kiolvasni:

arany: $\neg a \vee v$

ezüst: $\neg a \vee f$

ólom: $\neg(\neg a \wedge \neg e) \vee e \Longleftrightarrow a \vee e$

kontextus: $\neg(a \wedge e)$

kontextus: $\neg(v \wedge f)$

Rejtvények

Portia ládikái 68a – Melyik ládában van a kép?

Ezúttal minden fedélen két állítás volt, és Portia annyit mondott, hogy egyik fedélen sincs egynél több hamis állítás.

arany: A kép nem ebben van. A kép festője velencei.

ezüst: A kép nem az arany ládikában van. A kép festője firenzei.

ólom: A kép nem ebben van. A kép az ezüstládikában van.

a: a kép az arany ládikában van.
e: a kép az ezüst ládikában van.
$\neg a \wedge \neg e$ megfelel annak, hogy a kép az ólomládikában van.
v: a kép festője velencei.
f: a kép festője firenzei.

Portia állítása alapján minden ládán lévő állítást diszjunkcióval kell kiolvasni:

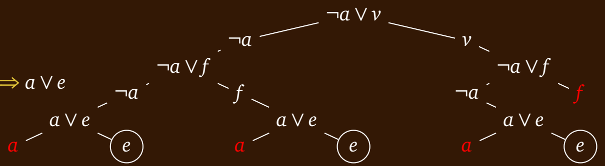
arany: $\neg a \vee v$

ezüst: $\neg a \vee f$

ólom: $\neg(\neg a \wedge \neg e) \vee e \Longleftrightarrow a \vee e$

kontextus: $\neg(a \wedge e)$

kontextus: $\neg(v \wedge f)$



Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek? (68a)

Rejtvények

lovagok és lókötők – trükkök önreferenciák kezelésére

„Ugyanilyen érdekes az a feladattípus, amelynek szereplői háromfélék lehetnek: lovagok, akik mindig igazat mondanak, lókötők, akik mindig hazudnak és normális emberek, akik hol hazudnak, hol igazat mondanak. [. . .]
[. . .] Két ember, A és B, mindkettő – egymástól függetlenül – vagy lovag, vagy lókötő, vagy normális, és a következőket állítja:

A: B lovag.

B: A nem lovag.

Bizonyítandó, hogy legalább egyikük igazat mond, de nem lovag.”

Rejtvények

Lovagok és lókötők – trükkök önreferenciák kezelésére

„Ugyanilyen érdekes az a feladattípus, amelynek szereplői háromfélék lehetnek: lovagok, akik mindig igazat mondanak, lókötők, akik mindig hazudnak és normális emberek, akik hol hazudnak, hol igazat mondanak. [. . .]
[. . .] Két ember, A és B, mindkettő – egymástól függetlenül – vagy lovag, vagy lókötő, vagy normális, és a következőket állítja:

A: B lovag.

B: A nem lovag.

Bizonyítandó, hogy legalább egyikük igazat mond, de nem lovag."

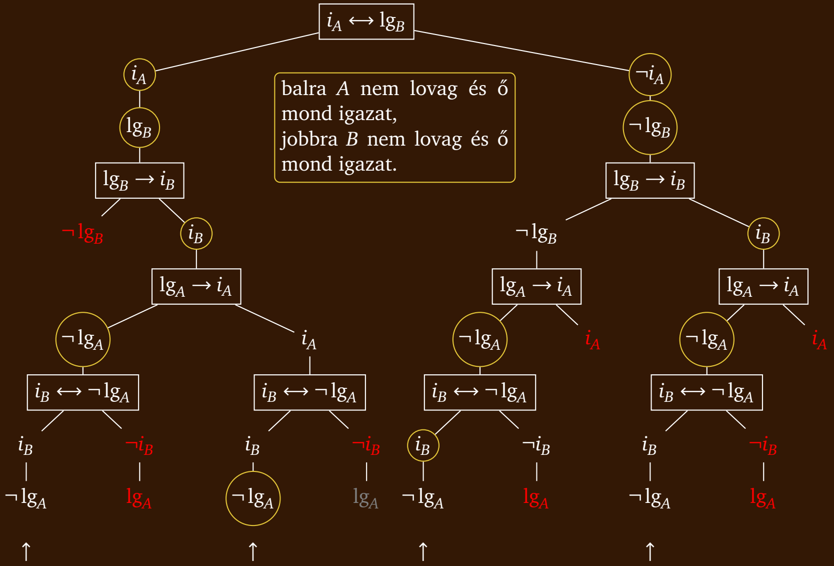
Az igazmondás szabálya: $\boxed{X \text{ igazat mond} \iff \text{igaz, amit } X \text{ mond.}}$

$\mathrm{lg}_A, \mathrm{lg}_B$:	A lovag, B lovag.	lovagok működése:	$\mathrm{lg}_A \to i_A$	$\mathrm{lg}_B \to i_B$
$\mathrm{lk}_A, \mathrm{lk}_B$:	A lókötő, B lókötő.	lókötők működése:	$\mathrm{lk}_A \to \neg i_A$	$\mathrm{lk}_B \to \neg i_B$
i_A, i_B:	A igazat mond, B ...	kimondás szerepe:	$i_A \leftrightarrow \mathrm{lg}_B$	$i_B \leftrightarrow \neg\, \mathrm{lg}_A$

Bizonyítandó: $(i_A \wedge \neg\, \mathrm{lg}_A) \vee (i_B \wedge \neg\, \mathrm{lg}_B)$

Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek? (40.)

Logikai szerkezet analitikus fával



balra A nem lovag és ő mond igazat,
jobbra B nem lovag és ő mond igazat.