Érveléstechnika és logika

Predikátumlogika

Molnár Attila, Zvolenszky Zsófia

Kőbányai Szent László Gimnázium
Eötvös Loránd Tudományegyetem

2017. május 13.

Predikátum–individuum-felbontás

PREDIKÁTUMLOGIKA NYELVE

Manó és Maminti a liftre várnak.

Kijelentéslogikában ezt így lehetne formalizálni:

$$p \wedge q, \text{ ahol } \begin{array}{ll} p: & \text{Manó a liftre vár.} \\ q: & \text{Maminti a liftre vár.} \end{array}$$

A probléma az, hogy bár p és q mindkettő a liftről szóló kijelentés, ez a szintaxisban egyáltalán nem jelentkezik, hiszen teljesen különböző jeleket használtunk; p-t és q-t.
Itt jön képbe a kijelentések predikátum/individuum felbontása

$$mVl \wedge m'Vl, \text{ ahol } \begin{array}{ll} m: & \text{Manó. (Ez egy individuum.)} \\ m': & \text{Maminti. (Ez egy individuum.)} \\ l: & \text{lift. (Ez egy individuum.)} \\ xVy: & x \text{ vár } y\text{-ra. (Ez egy 2-változós predikátum.)} \end{array}$$

PÉLDAMONDATOK – 1.1

A lány megcsókolta a fiút, aki szerette őt.

$L(x)$	:	x lány
$F(x)$	:	x fiú
xSy	:	x szerette y-t
xCy	:	x megcsókolta y-t

$$L(x) \land F(y) \land xCy \land ySx$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 1.2

Kecskemét és Cegléd között van Nagykőrös.

$$
\begin{array}{rcl}
K(x,y,z) & : & x \text{ és } z \text{ között van } y \\
k & : & \text{Kecskemét} \\
c & : & \text{Cegléd} \\
n & : & \text{Nagykőrös}
\end{array}
$$

$$K(k,n,c)$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 1.3

Micimackó mézéhes medve és Malacka szereti őt.

$$
\begin{array}{rcl}
m & : & \text{Micimackó} \\
m' & : & \text{Malacka} \\
M(x) & : & x \text{ medve} \\
M'(x) & : & x \text{ mézéhes} \\
xSy & : & x \text{ szereti } y\text{-t}
\end{array}
$$

$$M(m) \wedge M'(m) \wedge m'Sm$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Változók

Változók

Vannak olyan szavak, amik az individuumok helyén foglalnak helyet, mégis hol ezt, hol azt jelentik, és ennek megfelelően az általa alkotott mondatok is hol igazak, hol hamisak. Ezek a változók. Pl.

Ő rúgta a gólt.

Itt az ő jelentése változhat a kontextus függvényében. Ez a szó nem olyan, mint a Manó vagy Maminti, amelyek kontextustól függetlenül ugyanazt az embert jelentik. Ezek jelentése változhat. Ezeket ún. változókkal formalizáljuk.

$G(x)$: ő rúgta a gólt.

Változók haszna

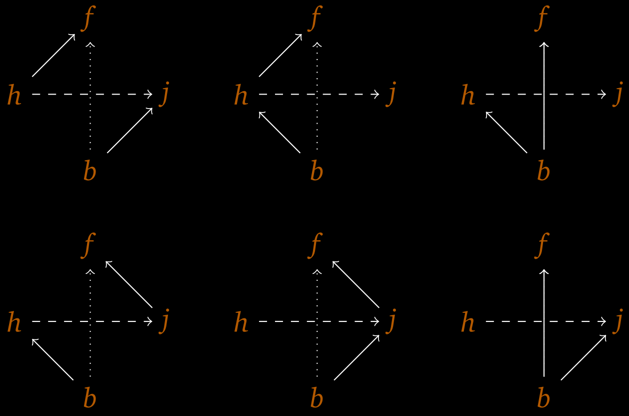
A változók segítenek abban is, hogy többértelmű mondatok jelentésében rendet tegyünk. Vegyük például a következő mondatot:

Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy egy beosztottja sokkal több hatalommal rendelkezik, mint a felettese.

Itt egyáltalán nem világos, hogy „ki kinek a mije”. A lehetőségeket a következő ábrán szemléltethetjük, feltéve, hogy változókkal címkézzük meg a hivatkozott szereplőket.

Egy többértelmű mondat

Egy *h* hivatalnoknak megsúgta egy *j* jóakarója, hogy van neki egy *b* beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő *f* felettesei.



A változók igazi haszna

A változók igazi haszna azonban igazából abban mutatkozik meg, hogy mivel a nevekéhez képest könnyebben változhat a jelentésük, felhasználhatjuk őket a „minden” és „van olyan” kifejezéseket tartalmazó kifejezések formalizálására is.

(A többértelmű mondatunkat is azért nem formalizáltuk, mert valójában rejtve ilyen kifejezéseket tartalmazott.)

Kvantorok

KVANTOROK ÉS VÁLTOZÓK

A predikátumok látszólag olyan dolgokra is vonatkozhatnak, amik nem egy meghatározott individuummal azonosíthatók, pl.
Mindenki szereti Snoopy-t. $\forall x\, xSs$
Valaki nem szereti Snoopy-t. $\exists x\, \neg xSs$
Ezekben az esetekben használunk kvantorokat:

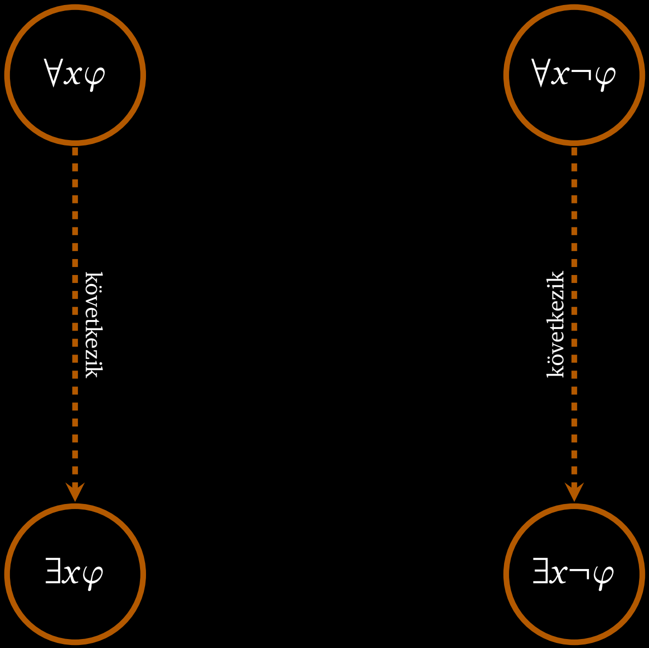
$$\begin{array}{ll} \forall x\ \varphi(x): & \text{minden } x\text{-re igaz, hogy } \varphi(x) \\ \exists x\ \varphi(x): & \text{van olyan } x\text{, amelyre igaz, hogy } \varphi(x) \end{array}$$

Tehát a kvantorok úgy működnek, hogy értelmezésükhöz változtatni kell a változók képlékeny jelentését.
$\forall x \varphi(x)$ akkor igaz, ha akárhogy változtatjuk meg x jelentését, $\varphi(x)$ mindig igaz marad,
$\exists x \varphi(x)$ pedig akkor igaz, ha meg tudjuk úgy változtatni x jelentését, hogy $\varphi(x)$ ezáltal igaz legyen.
E két kvantor jellegzetes viszonyban van egymással, amit a logikai négyszög ír le.

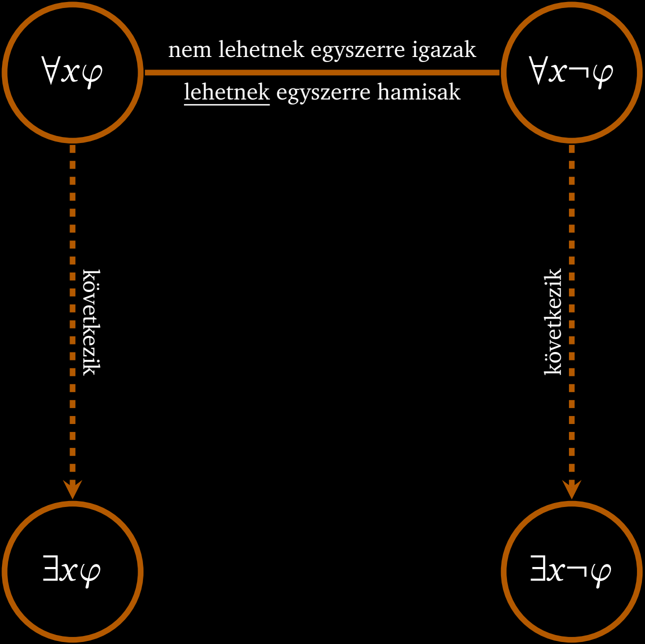
$\forall x \varphi$ $\forall x \neg \varphi$

$\exists x \varphi$ $\exists x \neg \varphi$

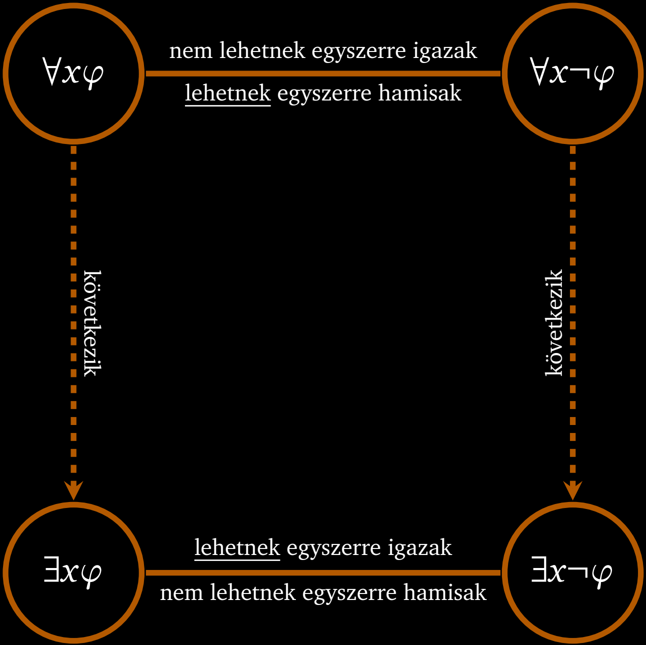
Feltesszük, hogy van legalább egyvalami, amire φ igaz!



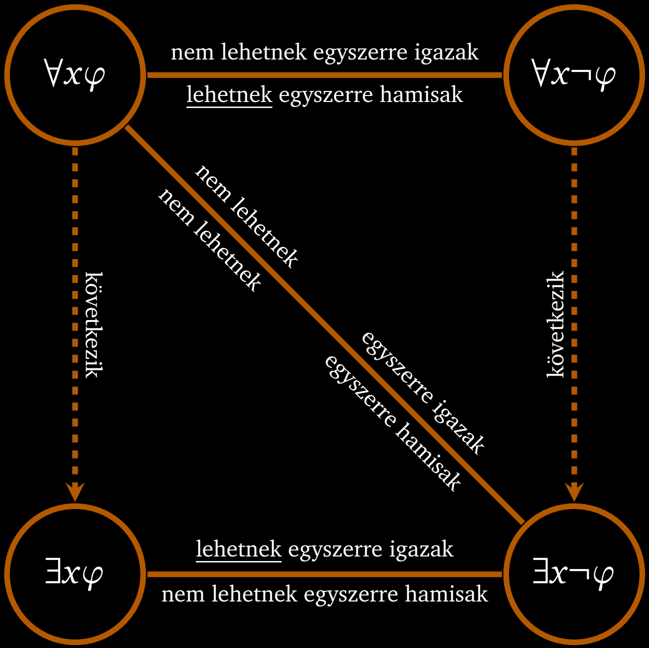
Feltesszük, hogy van legalább egyvalami, amire φ igaz!



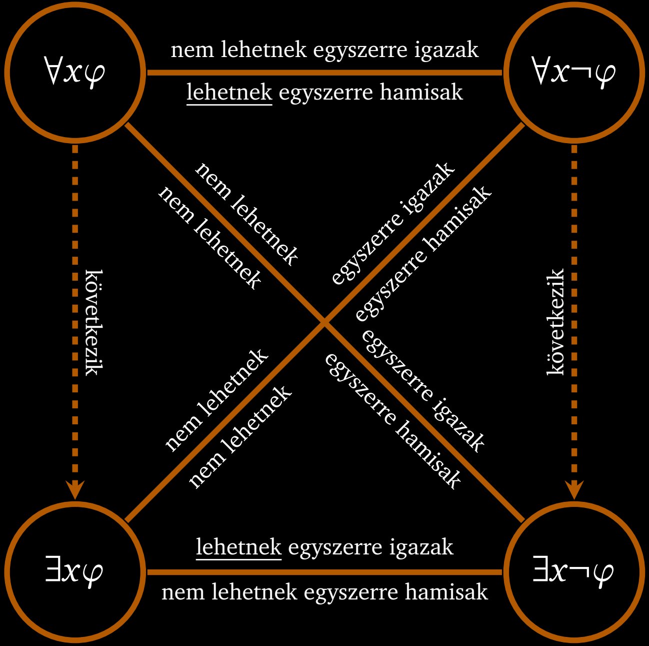
Feltesszük, hogy van legalább egyvalami, amire φ igaz!



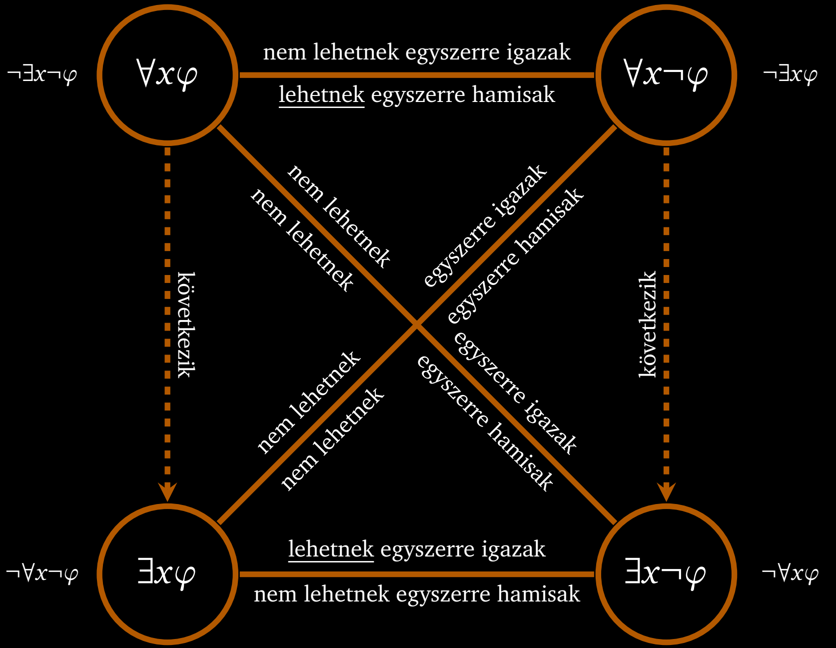
Feltesszük, hogy van legalább egyvalami, amire φ igaz!



Feltesszük, hogy van legalább egyvalami, amire φ igaz!



Feltesszük, hogy van legalább egyvalami, amire φ igaz!



Feltesszük, hogy van legalább egyvalami, amire φ igaz!

DeMorgan azonosságok:

$$\begin{aligned} \neg\exists x\varphi(x) &\iff \forall x\neg\varphi(x) \\ \neg\forall x\varphi(x) &\iff \exists x\neg\varphi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists x\varphi(x) &\iff \neg\forall x\neg\varphi(x) \\ \forall x\varphi(x) &\iff \neg\exists x\neg\varphi(x) \end{aligned}$$

Nagyon fontos, hogy

$$\forall x\varphi \implies \exists x\varphi$$

általában nem igaz:
Minden összegyűrt házi feladatot kijavítottam – hiszen nincs olyan összegyűrt házifeladat, amit ne javítottam volna ki. (Hiszen egyáltalán nincsenek is összegyűrt házi feladatok!). De ebből nem következik, hogy ténylegesen kijavítottam volna bármit is.
A modern (nem arisztoteliánus) felfogásban

minden univerzális állítás ellenpéldák nemlétét állítja.

Formalizálás

A formalizálandó mondatokat „meg kell rágni."

Érdemes nem egyből a predikátumlogika nyelvére formalizálni az állítást, hanem egy köztes hibrid nyelvre átfogalmazni, ekvivalens módon újrafogalmazgatni az állítást újra és újra egészen addig, amíg az nem válik formalizálhatóvá.

Minden ember halandó.

↓

Minden x emberre igaz, hogy x halandó.

↓

Minden x-re igaz, hogy ha x ember, akkor x halandó.

↓

$$\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$$

PÉLDAMONDATOK – 2.0A ELTÉRŐ VARIÁCIÓK

Neved ki diccsel ejtené, / Nem él oly velszi bárd (A.J.)

$$
\begin{aligned}
WB(x) &: \quad x \text{ wales-i bárd} \\
xDEy &: \quad x \text{ diccsel ejti } y \text{ nevét} \\
e &: \quad \text{Edgar}
\end{aligned}
$$

$$\neg\exists b(WB(b) \wedge bDEe)$$

Nem igaz, hogy van (=él) olyan *b* hogy *b* wales-i bárd és diccsel ejti *Edgar* nevét.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.0B ELTÉRŐ VARIÁCIÓK

Neved ki diccsel ejtené, / Nem él oly velszi bárd (A.J.)

$$
\begin{aligned}
W(x) &: \quad x \text{ wales-i} \\
B(x) &: \quad x \text{ bárd} \\
xDEy &: \quad x \text{ diccsel ejti } y \text{nevét} \\
e &: \quad \text{Edgar}
\end{aligned}
$$

$$\neg\exists b(W(b) \land B(b) \land bDEe)$$

Nem igaz, hogy van (=él) olyan b hogy b wales-i, b bárd és diccsel ejti *Edgar* nevét.

Ezen a nyelven lehet beszélni nem wales-i bárdokról és nem bárd wales-iekről is, ha a szövegkörnyezet ezt igényelné.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.0C ELTÉRŐ VARIÁCIÓK

Neved ki diccsel ejtené, / Nem él oly velszi bárd (A.J.)

$$\begin{array}{rcl} W(x) & : & x \text{ wales-i} \\ B(x) & : & x \text{ bárd} \\ xDEy & : & x \text{ diccsel ejti } y \text{nevét} \\ E(x) & : & x \text{ él} \\ e & : & \text{Edgar} \end{array}$$

$$\neg\exists b(W(b) \land B(b) \land E(b) \land bDEe)$$

Nem igaz, hogy van olyan *b* hogy *b* wales-i, *b* bárd, *b* él és diccsel ejti *Edgar* nevét.

Ez a nyelv annyival jobb, hogy lehet nem élő wales-i bárdokról is beszélni rajta.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.0D ELTÉRŐ VARIÁCIÓK

Neved ki diccsel ejtené, / Nem él oly velszi bárd (A.J.)

$$\begin{aligned} W(x) &: \quad x \text{ wales-i} \\ B(x) &: \quad x \text{ bárd} \\ xNy &: \quad x \text{ neve } y \\ xDEy &: \quad x \text{ diccsel ejti } y\text{-t} \\ E(x) &: \quad x \text{ él} \\ e &: \quad \text{Edgar} \end{aligned}$$

$$\neg\exists b(W(b) \wedge B(b) \wedge E(b) \wedge \exists n(eNn \wedge bDEn))$$

Nem igaz, hogy van olyan b hogy b wales-i, b bárd, b él és van olyan n név, hogy n Edgar neve és b diccsel ejti n-t.

Ez részletezi azt, hogy Edgarnak van egy neve, amit a bárdok valahogyan kiejtenek. (Fontos ez az adott kontextusban?)

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Példamondatok – 2.0e Eltérő variációk

Neved ki diccsel ejtené, / Nem él oly velszi bárd (A.J.)

$$\begin{aligned} W(x) &: x \text{ wales-i} \\ B(x) &: x \text{ bárd} \\ xNy &: x \text{ neve } y \\ D(x) &: x \text{ dicsőséges} \\ xMy &: x \text{ megszolalása } y \\ xTy &: x \text{ tartalmazza } y\text{-t} \\ E(x) &: x \text{ él} \\ e &: \text{Edgar} \end{aligned}$$

$$\neg\exists b(W(b) \wedge B(b) \wedge E(b) \wedge \exists n(eNn \wedge \exists m(bMm \wedge D(m) \wedge mTn))$$

Nem igaz, hogy van olyan b hogy b wales-i, b bárd, b él és van olyan n név, hogy n Edgar neve és van olyan m, hogy m egy b egy megszólalása, m dicsőséges és m tartalmazza n-t.

Ez az elemzés már túl részletes, nem világos, hogy miért jó ennyire részletekbe menni... (muszáj, hogy minden szóra legyen predikátum...?) De nem is feltétlen a 2.11e a legjobb formalizálás.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Példamondatok – 2.0f Eltérő variációk

Akkor van „elegendően mélyen” formalizálva egy mondat, ha van annyira részletes, hogy a lényeg kiderüljön belőle, de azért még el lehet igazodni benne. Ez általában a szituációtól, kontextustól függ és sokszor szubjektív.

Kezdőknek azt javasoljuk, hogy amennyire mélyre le tudnak menni az analízisben, tegyék azt meg, mert a dolgok „túlformalizálása” inkább formalizálásban rutinosabbak számára okoz csak problémát.

(Túlformalizálásért a házi feladatban nem fogunk levonni pontot, de ha valaki fontos részletet hagy el formalizáláskor, azért igen.)

PÉLDAMONDATOK – 2.1

Minden madár társat választ.

$$\begin{array}{rcl} M(x) & : & x \text{ madár} \\ xTVy & : & x \text{ társául választja } y\text{-t} \end{array}$$

$$\forall x(M(x) \rightarrow \exists y\, xTVy)$$

minden x-re ha x madár, akkor van olyan y amelyre igaz, hogy x társául választja y-t.

Lehetett volna „$TV(x)$: x társat választ” predikátummal is dolgozni, de a társválasztás nekem inkább tűnt olyannak, mint amit kétváltozós predikátummal kézenfekvő formalizálni.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.2

Aki a virágot szereti, rossz ember nem lehet.

$$\begin{aligned} VS(x) &\quad : \quad x \text{ szereti a virágokat} \\ REL(x) &\quad : \quad x \text{ rossz ember lehet} \end{aligned}$$

$$\forall x(VS(x) \rightarrow \neg REL(x))$$

Minden x-re igaz, hogy ha x szereti a virágokat, akkor nem igaz, hogy x rossz ember

Az „Aki” mint mondatkezdő szó jellegzetes jele egy elrejtett univerzális kvantifikációnak.

A „lehet” szócska intenzionális kontextusra utal: $\forall x(VS(x) \rightarrow \neg\Diamond RE(x))$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.3

Akinek vannak halai, eteti őket.

$$\begin{aligned} xBy &: \quad x \text{ birtokolja } y\text{-t} \\ xEy &: \quad x \text{ eteti } y\text{-t} \\ H(x) &: \quad x \text{ hal.} \end{aligned}$$

$$\forall x(\exists y(xBy \wedge H(y)) \rightarrow \forall y((H(y) \wedge xBy) \rightarrow xEy))$$

Minden x-re igaz, hogy ha van olyan y, hogy x birtokolja y-t és y hal, akkor minden y-ra igaz, hogy ha y hal, akkor x eteti y-t.

PÉLDAMONDATOK – 2.4

Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.

$$\begin{array}{lcl} B(x) & : & x \text{ bogár} \\ R(x) & : & x \text{ rovar} \end{array}$$

$$\forall x(B(x) \rightarrow R(x)) \wedge \neg \forall x(R(x) \rightarrow B(x))$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Példamondatok – 2.5

Péternek van barátja.

$$\begin{aligned} p &: \text{Péter} \\ xBy &: x\text{barátja } y\text{-nak} \end{aligned}$$

$$\exists x\; xBp$$

Van olyan x, hogy x barátja Péternek.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.6

Fülesnek elnéző barátja is akad.

$$\begin{array}{rcl} f & : & \text{Füles} \\ E(x) & : & x\text{elnéző} \\ xBy & : & x\text{barátja } y\text{-nak} \end{array}$$

$$\exists x(E(x) \land xBf)$$

Van olyan x, hogy x elnéző és x barátja Fülesnek.

Az „akad”, „előfordul”, stb. mind egzisztenciális kvantort, $\exists$-t mutatnak.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.7

Amália tagja egy énekkarnak.

$$\begin{array}{rcl} a & : & \text{Amália} \\ E(x) & : & x \text{ énekkar} \\ xTy & : & x\text{tagja } y\text{-nak} \end{array}$$

$$\exists x(E(x) \wedge aTx))$$

Van olyan x, hogy x énekkar és Amália tagja x-nek.

Az „egy” jelezte most az egzisztenciális kvantort.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.8

Aki másnak vermet ás, maga esik bele.

$$\begin{array}{rcl} a & : & \text{Amália} \\ xAy & : & x \text{ ássa } y\text{-t} \\ xVy & : & x \text{ verem } y\text{-nak szánva} \\ xEy & : & x \text{ beleesik } y\text{-ba} \end{array}$$

$$\forall x \forall y((xAy \land \exists z(z \neq x \land yVz)) \to xEy))$$

minden x-re, és y-ra, ha x ássa y-t és valamely x-től különböző z-re y egy z-nek szánt verem, akkor x beleesik y-ba.

A közmondásban nagyon fontos, hogy ugyanabba a verembe esik bele az illető, mint amit ő ásott. Ami nehéz, az az, hogy nem csak az ásók, de a vermek fölött is univerzálisan kvantifikálunk. Bármely illető bármely másnak ásott verméről van szó!

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Példamondatok – 2.9a

Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy van neki egy beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő felettesei.

$$
\begin{array}{rcl}
H(x) & : & x \text{ hivatalnok} \\
S_{x,y}\varphi & : & x \text{ megsúgta } y\text{-nak, hogy } \varphi \text{ (intenzionális!)} \\
xJy & : & x \text{ jóakarója } y \\
x > y & : & x \text{ sokkal több hatalommal rendelkezik, mint } y \\
xFy & : & x \text{ felettese } y
\end{array}
$$

$$\exists h(H(h) \wedge \exists j(hJj \wedge S_{j,h}\exists b(bFj \wedge \forall f(hFf \to b > f))))$$

Egy h hivatalnoknak megsúgta egy j jóakarója, hogy van neki egy b beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő f felettesei.

$$
\begin{tikzcd}
 & f & \\
h \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & j \\
 & b \arrow[uu, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Példamondatok – 2.9b

Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy van neki egy beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő felettesei.

$H(x)$	:	x hivatalnok
$S_{x,y}\varphi$	:	x megsúgta y-nak, hogy φ (intenzionális!)
xJy	:	x jóakarója y
$x > y$	:	x sokkal több hatalommal rendelkezik, mint y
xFy	:	x felettese y

$$\exists h(H(h) \wedge \exists j(hJj \wedge S_{j,h}\exists b(bFh \wedge \forall f(hFf \rightarrow b > f))))$$

Egy h hivatalnoknak megsúgta egy j jóakarója, hogy van neki egy b beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő f felettesei.

$$\begin{tikzcd}
 & f & \\
h \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & j \\
 & b \arrow[ul] \arrow[uu, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

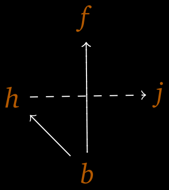
PÉLDAMONDATOK – 2.9C

Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy van neki egy beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő felettesei.

$$
\begin{array}{rcl}
H(x) & : & x \text{ hivatalnok} \\
S_{x,y}\varphi & : & x \text{ megsúgta } y\text{-nak, hogy } \varphi \text{ (intenzionális!)} \\
xJy & : & x \text{ jóakarója } y \\
x > y & : & x \text{ sokkal több hatalommal rendelkezik, mint } y \\
xFy & : & x \text{ felettese } y
\end{array}
$$

$$\exists h(H(h) \wedge \exists j(hJj \wedge S_{j,h}\exists b(bFh \wedge \forall f(bFf \rightarrow b > f))))$$

Egy h hivatalnoknak megsúgta egy j jóakarója, hogy van neki egy b beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő f felettesei.



Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

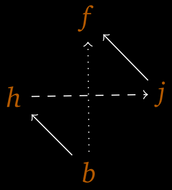
PÉLDAMONDATOK – 2.9D

Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy van neki egy beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő felettesei.

$H(x)$	:	x hivatalnok
$S_{x,y}\varphi$	:	x megsúgta y-nak, hogy φ (intenzionális!)
xJy	:	x jóakarója y
$x > y$	:	x sokkal több hatalommal rendelkezik, mint y
xFy	:	x felettese y

$$\exists h(H(h) \wedge \exists j(hJj \wedge S_{j,h}\exists b(bFh \wedge \forall f(jFf \rightarrow b > f))))$$

Egy h hivatalnoknak megsúgta egy j jóakarója, hogy van neki egy b beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő f felettesei.



Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

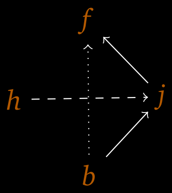
Példamondatok – 2.9e

Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy van neki egy beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő felettesei.

$H(x)$	:	x hivatalnok
$S_{x,y}\varphi$	:	x megsúgta y-nak, hogy φ (intenzionális!)
xJy	:	x jóakarója y
$x > y$	:	x sokkal több hatalommal rendelkezik, mint y
xFy	:	x felettese y

$$\exists h(H(h) \wedge \exists j(hJj \wedge S_{j,h}\exists b(bFj \wedge \forall f(jFf \to b > f))))$$

Egy h hivatalnoknak megsúgta egy j jóakarója, hogy van neki egy b beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő f felettesei.



Példamondatok – 2.9f

Egy hivatalnoknak megsúgta egy jóakarója, hogy van neki egy beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő felettesei.

$H(x)$	:	x hivatalnok
$S_{x,y}\varphi$	:	x megsúgta y-nak, hogy φ (intenzionális!)
xJy	:	x jóakarója y
$x > y$	:	x sokkal több hatalommal rendelkezik, mint y
xFy	:	x felettese y

$$\exists h(H(h) \land \exists j(hJj \land S_{j,h}\exists b(bFj \land \forall f(bFf \to b > f))))$$

Egy h hivatalnoknak megsúgta egy j jóakarója, hogy van neki egy b beosztottja, aki sokkal több hatalommal rendelkezik, mint az ő f felettesei.

$$\begin{tikzcd}
& f & \\
h \arrow[rr, dashed] & & j \\
& b \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Példamondatok – 2.10 (jó nehéz)

Egy Rubik kocka-tulajdonos minden Rubik kockájának van olyan oldala, hogy azon az összes négyzet azonos színű.

$R(x)$	:	x Rubik kocka
xBy	:	x birtokolja y-t
xOy	:	x oldala y
xNy	:	x négyzete az y oldalnak
xSy	:	x négyzety színű

$$\exists t(\exists x(R(x) \wedge tBx) \wedge \forall k((R(k) \wedge tBk) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists o(kOo \wedge \forall n \forall n'((nNo \wedge n'No) \rightarrow \exists s(nSs \wedge n'Ss)))))$$

Van olyan t (tulajdonos) és olyan x (Rubik kocka), hogy x Rubik kocka és t birtokolja x-et, és minden egyéb k-ra (Rubik kockára) igaz, hogy ha k egy Rubik kocka és t tulajdona, akkor van olyan o (oldal) hogy k oldala o és bármely két n és n'-re igaz, hogy ha k oldala n és n', akkor van olyan s szín, hogy n és n' is s színű.

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

PÉLDAMONDATOK – 2.11 VEGYES FELVÁGOTT

1. Tanulságos kudarc is előfordul. $\exists k(K(k) \wedge T(k))$
2. A zsemebemben van pénz. $\exists p\ Zs(p)$
3. Péter talált valamit. $\exists v\ pTv$
4. Bella vett egy nyakláncot. $\exists n(Ny(n) \wedge bVn)$
5. Júlia szeret valakit. $\exists r\ jSr$
6. Júliát szereti valaki. $\exists r\ rSj$
7. Mindenki gyanús nekem, aki él. $\forall x((x) \rightarrow Gy(x))$
8. Amit Jancsi nem tanult meg, nem tudja azt János. $\forall x(\neg jTx \rightarrow \neg j'T'x)$
9. Péter minden barátjának van gyermeke. $\forall b(pBb \rightarrow \exists g\ bGg)$
10. Nincsen rózsa tövis nélkül. $\neg\exists r(R(x) \wedge \neg\exists t\ tTr)$
11. Egyetlen tanár sem keres sokat. $\forall t(T(t) \rightarrow \neg SK(x))$
12. A tantestületnek nem minden tagja osztályfőnök. $\exists t(T(t) \wedge \neg O(t))$
13. Nincsen olyan ember, aki ne érezné egyszer, hogy sírni kell. $\neg\exists e(E(e) \wedge \neg SK(e))$
14. Csak a bátrak nem vonulnak vissza. $\forall x \neg V(x) \rightarrow B(x)$
15. Minden ember szabadnak és egyenlőnek született. $\forall x, y((E(x) \wedge E(y)) \rightarrow (Sz(x) \wedge xEy))$
16. Nem mind arany, ami fénylik. $\neg\forall x(F(x) \rightarrow A(x))$
17. Akinek vaj van a fején, nem áll a napra. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg NA(x))$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

A buszmegálló – numerikus kvantifikáció

legalább/legfeljebb/pontosan n db dologra igaz egy φ tulajdonság...

1. Maminti egyedül ül a buszmegállóban.

$$B(m) \land \forall x(B(x) \to x = m)$$

2. Manó és Maminti ketten ülnek a buszmegállóban.

$$B(m) \land B(m') \land \forall x(B(x) \to (x = m \lor x = m'))$$

3. Legalább ketten ülnek a buszmegállóban.

$$\exists x \exists y(B(x) \land B(y) \land x \neq y$$

4. Legfeljebb ketten ülnek a buszmegállóban.

$$\exists x \exists y \forall z(B(z) \to (z = x \lor z = y))$$

5. Ketten ülnek a buszmegállóban.

$$\exists x \exists y(B(x) \land B(y) \land x \neq y \land \forall z(B(z) \to (z = x \lor z = y)))$$

6. Hárman ülnek a buszmegállóban.

$$\exists x \exists y \exists z(B(x) \land B(y) \land B(z) \land x \neq y \land y \neq z \land x \neq z \land \forall t(B(t) \to (t = x \lor t = y \lor t = z)))$$

Madarász–Pólos–Ruzsa: A logika elemei, 6–8.

Numerikus kvantifikáció

Ezeket értelemszerűen akármekkora mennyiségre ki lehet mondani, és így mindig meg lehet oldani, hogy a következőket is kifejezzük. Általában is használhatók a következő jelölések:

$\exists! x \; \varphi(x)$: pontosan egy x-re igaz, hogy φ.

$\underset{n}{\exists!} x \; \varphi(x)$: pontosan n darab x-re igaz, hogy φ.

Tehát a házi feladatban nem kell az előző slide cirkalmas fordulatait használni, használhatják ezt a tömörített jelölést is.

Venn-diagramok

Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét. $\forall x((K(x) \land S(x)) \to Z(x))$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak. $\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$

Ezt a következtetést a Venn-diagramok módszerével fogjuk ellenőrizni.

A Venn-diagramok módszere azon az elven alapul, hogy ha valamit meg akarunk érteni, át akarunk látni, akkor érdemes valamilyen ábrát rajzolni.

Nagyon leegyszerűsítve: pontosan akkor helyes a következtetés, ha a konklúzió olyat állít, ami teljesül a premisszák alapján felrajzolt ábrára.

Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét.

$$\forall x((K(x) \wedge S(x)) \rightarrow Z(x))$$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \wedge \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak.

$$\Rightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg K(x))$$

Ez a következtetés olyan szerkezetű, hogy könnyű lerajzolni, mert

- nem szerepelnek benne vegyes és/vagy beágyazott kvantorok $(\forall x \exists y \; xRy)$,
- csak egyváltozós predikátumok szerepelnek benne,
- csak három predikátum szerepel benne.

Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét.

$$\forall x((K(x) \land S(x)) \to Z(x))$$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak.

$$\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$$

Ez alapján a következőképpen ábrázolhatunk:

- Az individuumokat pontokkal ábrázoljuk.
- A róluk szóló tulajdonságokat (egyváltozós predikátumokat) körökkel ábrázoljuk.
- Egy pont pontosan akkor van a körön belül, ha teljesül rá a szóban forgó tulajdonság.
- Több tulajdonság esetén a köröknek mindig lesz belső része, hogy lehessen beszélni arról, hogy valaki mindkét tulajdonsággal bír, és mindig lesz a saját, a másik kör(ök) által nem tartalmazott része is, hogy lehessen beszélni olyan individuumokról is, amelyek csak az egyik tulajdonsággal bírnak.

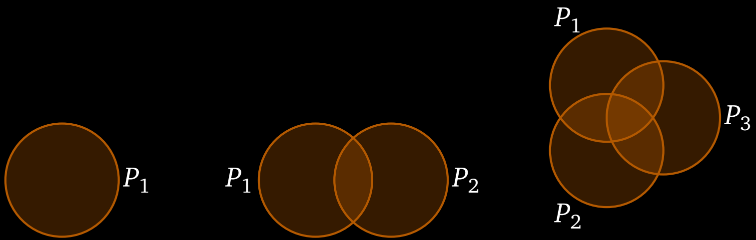
Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét. $\forall x((K(x) \land S(x)) \to Z(x))$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak. $\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$

Egy, két és három tulajdonság esetén a következőképpen rajzolhatunk köröket:



Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét.

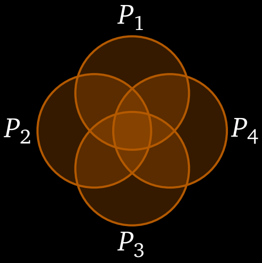
$$\forall x((K(x) \land S(x)) \to Z(x))$$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak.

$$\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$$

Négy tulajdonság alapján a következő ábrát **nem szabad** lerajzolni!



Az a baj, hogy ide nem lehet berajzolni olyan individuumot, ami rendelkezik a P_1 és P_3 tulajdonságokkal, de nem rendelkezik a P_2 és P_4 tulajdonságokkal. Tehát ez a diagram kihagy két logikai lehetőséget.

Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét.

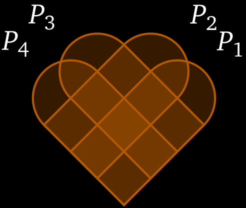
$$\forall x((K(x) \land S(x)) \to Z(x))$$

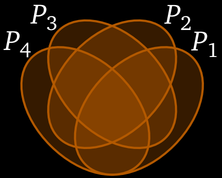
Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak.

$$\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$$

Ha 4 tulajdonság esetén is feltétlen rajzolni akarunk (nem biztos, hogy érdemes), rajzoljunk szívecskéket vagy ellipsziseket körök helyett:





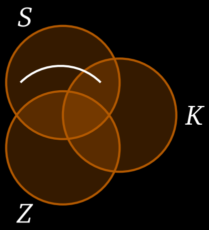
Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét. $\forall x((K(x) \land S(x)) \rightarrow Z(x))$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak. $\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$

Kezdjük a második premisszával, mert az egy egzisztenciálisan kvantifikált állítás ($\exists$).



Azért húztunk vonalat több tartományon át, mert nem tudjuk, hogy a zenét nem kedvelő sporttag könyvtártag-e vagy sem. A vonal tehát nem azt jelenti, hogy ahol átmegy ott mind van valami: Ez mindössze azt jelenti, hogy az áthúzott tartományok egyikében van egy elem.

Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét.

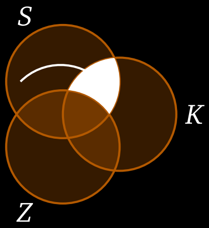
$$\forall x((K(x) \land S(x)) \rightarrow Z(x))$$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak.

$$\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$$

Folytassuk az első premisszával. ($\forall$)



Emlékezzünk arra, hogy minden univerzális állítás cáfoló ellenpéldák nemlétezését állítja. Eszerint az első állítás azt állítja, hogy nincs olyan könyvtár-sportklub-tag, aki ne kedvelné a zenét, tehát a szóban forgó régió üres kell legyen. Ezért ezt kisatírozzuk.

Egy példa

A könyvtár és a sportklub közös tagjai kedvelik a zenét.

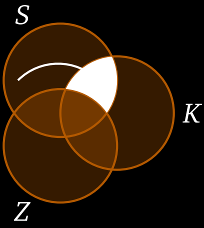
$$\forall x((K(x) \land S(x)) \to Z(x))$$

Van olyan sportklubtag, aki nem zenekedvelő. $\exists x(S(x) \land \neg Z(x))$

Tehát a sportklubnak van olyan tagja, aki nem tagja a könyvtárnak.

$$\Rightarrow \exists x(S(x) \land \neg K(x))$$

Vessük össze ezt a konklúzióval.



Azt látjuk tehát, hogy van egy sportoló, aki sem nem zenekedvelő, sem nem könyvtártag. Ez elegendő (sőt több is) a konklúzió igazságához, mivel az csak annyit állít, hogy van olyan sportoló, aki nem könyvtártag. Tehát a következtetés helyes.

Az Ubulra hallgatók

Aki Ubulra hallgat, az éretlen.
Aki Ubulra hallgat, az rosszul jár.

Tehát némely éretlen rosszul jár.

Az Ubulra hallgatók

Aki Ubulra hallgat, az éretlen. $\forall x(U(x) \rightarrow E(x))$
Aki Ubulra hallgat, az rosszul jár. $\forall x(U(x) \rightarrow R(x))$

Tehát némely éretlen rosszul jár. $\exists x(E(x) \wedge R(x))$

Az Ubulra hallgatók

Aki Ubulra hallgat, az éretlen. $\forall x(U(x) \rightarrow E(x))$

Aki Ubulra hallgat, az rosszul jár. $\forall x(U(x) \rightarrow R(x))$

Tehát némely éretlen rosszul jár. $\exists x(E(x) \wedge R(x))$

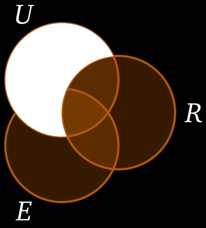
Emlékezzünk arra, hogy minden univerzális állítás valójában cáfoló ellenpéldák nemlétezését állítja. Ez alapján gyanús, hogy két ilyen állításból egy egzisztánciális állítás következik.

Az Ubulra hallgatók

Aki Ubulra hallgat, az éretlen. $\forall x(U(x) \to E(x))$
Aki Ubulra hallgat, az rosszul jár. $\forall x(U(x) \to R(x))$

Tehát némely éretlen rosszul jár. $\exists x(E(x) \land R(x))$

1. premissza:



Az első premissza azt állítja, hogy nincs olyan Ubulra hallgató, aki ne lenne éretlen, tehát ezt a tartományt kisatírozzuk.

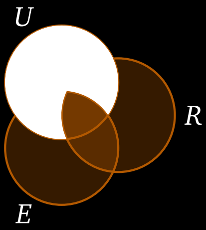
Az Ubulra hallgatók

Aki Ubulra hallgat, az éretlen. $\forall x(U(x) \to E(x))$

Aki Ubulra hallgat, az rosszul jár. $\forall x(U(x) \to R(x))$

Tehát némely éretlen rosszul jár. $\exists x(E(x) \land R(x))$

2. premissza:



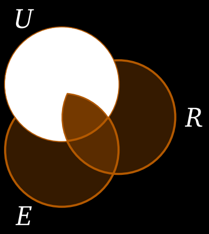
A második premissza azt állítja, hogy nincs olyan Ubulra hallgató, aki ne járna rosszul, tehát ezt a tartományt kisatírozzuk.

Az Ubulra hallgatók

Aki Ubulra hallgat, az éretlen. $\forall x(U(x) \to E(x))$
Aki Ubulra hallgat, az rosszul jár. $\forall x(U(x) \to R(x))$

Tehát némely éretlen rosszul jár. $\exists x(E(x) \land R(x))$

Konklúzióval való összevetés



A konklúzió azt állítja, hogy az R és E halmazok metszete nem üres. Azonban oda nincsen berajzolva semmi, ami ezt jelentené. Ez adja az ötletet a cáfoló ellenpéldához is: Ha igazából senki se hallgat Ubulra, és az éretlenek és rosszul járók halmaza is mind üres, akkor az első két premissza (ellenpélda hiányában) igaz, ellenben a konklúzió hamis, mert mind a három halmaz üres.

Denise

A versenyzők közül egyetlen francia sem jutott be a döntőbe.
Denise, aki francia, egyike a versenyzőknek.

Tehát van olyan versenyző, aki nem jutott be a döntőbe.

Kicsit furcsa ez a következtetés, mert a tulajdonságok nem tűnnek függetlennek egymástól: Aki döntős, versenyző kell legyen. Ezért ezt felvehetjük ún. implicit premisszaként: $\forall x(D(x) \rightarrow V(x))$. Meglátjuk, hogy lesz-e erre szükség.

Denise

A versenyzők közül egyetlen francia sem jutott be a döntőbe. $\forall x(V(x) -$

Denise, aki francia, egyike a versenyzőknek. $F(d) \wedge V(d)$

Tehát van olyan versenyző, aki nem jutott be a döntőbe. $\exists x(V(x) \wedge \neg D(x$

Kicsit furcsa ez a következtetés, mert a tulajdonságok nem tűnnek függetlennek egymástól: Aki döntős, versenyző kell legyen. Ezért ezt felvehetjük ún. implicit premisszaként: $\forall x(D(x) \rightarrow V(x))$. Meglátjuk, hogy lesz-e erre szükség.

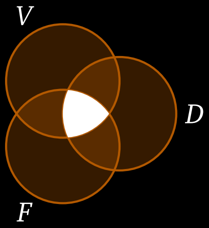
DENISE

A versenyzők közül egyetlen francia sem jutott be a döntőbe. $\forall x(V(x) \rightarrow$
Denise, aki francia, egyike a versenyzőknek. $F(d) \wedge V(d)$

Tehát van olyan versenyző, aki nem jutott be a döntőbe. $\exists x(V(x) \wedge \neg D(x$

Kicsit furcsa ez a következtetés, mert a tulajdonságok nem tűnnek függetlennek egymástól: Aki döntős, versenyző kell legyen. Ezért ezt felvehetjük ún. implicit premisszaként: $\forall x(D(x) \rightarrow V(x))$. Meglátjuk, hogy lesz-e erre szükség.

1. premissza:



Az első premissza azt állítja, hogy a döntősök és franciák metszetének nincs közös része a versenyzőkkel.

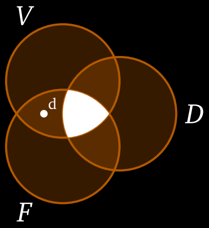
Denise

A versenyzők közül egyetlen francia sem jutott be a döntőbe. $\forall x(V(x) -$
Denise, aki francia, egyike a versenyzőknek. $F(d) \wedge V(d)$

Tehát van olyan versenyző, aki nem jutott be a döntőbe. $\exists x(V(x) \wedge \neg D(x$

Kicsit furcsa ez a következtetés, mert a tulajdonságok nem tűnnek függetlennek egymástól: Aki döntős, versenyző kell legyen. Ezért ezt felvehetjük ún. implicit premisszaként: $\forall x(D(x) \rightarrow V(x))$.
Meglátjuk, hogy lesz-e erre szükség.

2. premissza:



A második premissza azt állítja, hogy Denise francia versenyző. Az első premissza miatt a közös részbe már nem rajzolhatjuk, tehát egyértelműen a jelölt régióban foglalhat már csak helyet.

Denise

A versenyzők közül egyetlen francia sem jutott be a döntőbe. $\forall x(V(x) -$

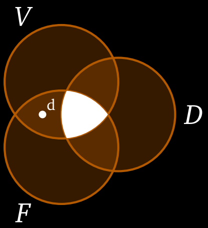
Denise, aki francia, egyike a versenyzőknek. $F(d) \wedge V(d)$

Tehát van olyan versenyző, aki nem jutott be a döntőbe. $\exists x(V(x) \wedge \neg D(x$

Kicsit furcsa ez a következtetés, mert a tulajdonságok nem tűnnek függetlennek egymástól: Aki döntős, versenyző kell legyen. Ezért ezt felvehetjük ún. implicit premisszaként: $\forall x(D(x) \rightarrow V(x))$.

Meglátjuk, hogy lesz-e erre szükség.

Konklúzióval való összevetés



A konklúzió azt állítja, hogy a versenyzők halmazának van a döntősök halmazába nem tartozó eleme. Dehát látjuk, hogy Denise pont ilyen, és ez be is van jelölve az ábránkon. Tehát a következtetés helyes.

Észrevehetjük, hogy az implicit premisszára nem is volt szükségünk.

Indirekt érvelés

Venn-diagramok korlátai

Bármennyire és szépek a Venn-diagramok, nagyon komoly korlátai vannak a módszernek.

- Nem, vagy csak nagyon körülményesen alkalmazható a módszer kétváltozós predikátumok esetén
- Nem alkalmazható a módszer vegyesen vagy egymásba ágyazott kvantifikált állítások esetén
- Csak nagyon körülményesen alkalmazható a módszer 3-nál több predikátum esetén.

A következő, indirekt érvelés azonban mindig működik, viszont mivel kevésbé kötött a „műfaj”, kicsit nehezebb is művelni.

Indirekt érvelés

Egy $P_1, \ldots, P_n \Rightarrow K$ érvelés helyességét indirekten a következőképpen ellenőrizhetünk:

1. Feltesszük, hogy a következtetés nem is helyes. Ez efajta feltevést nevezik indirekt feltevésnek. Ezt az aktust én gyakran az $\nearrow$ jellel jelölöm.
2. Az indirekt feltevés alapján akkor a premisszák mindegyike igaz, a konklúzió pedig hamis.
3. Ebből az információhalmazból addig végzünk következtetéseket/levezetéseket, amíg ellentmondásra nem jutunk. Az ellentmondást általában az $\lightning$ jellel jelölik.
   1. Ha megvan az ellentmondás, azzal azt bizonyítottunk, hogy az indirekt feltevés ellentmondásra vezet, tehát nem is lehet igaz, hogy a következtetés helytelen, tehát a következtetés valójában helyes kell legyen.
   2. Ha nincs meg az ellentmondás, akkor egy cáfoló ellenpélda jellemzése kellett körvonalazódjon a levezetések során. Ezt felírjuk és meg van cáfolva az eredeti következtetés.

Példa indirekt érvelésre

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála.
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt.

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér.

Példa indirekt érvelésre

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg eOh$

PÉLDA INDIREKT ÉRVELÉSRE

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg eOh$

1. Tegyük fel, hogy
   - (1) Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála, $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
   - (2) Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xO$
   - (3) De Hugó okosabb, mint Elemér. eOh
2. Mivel Hugó okosabb, mint Elemér, (1) miatt Elemér fúrja Hugót eFh. Mivel Elemér fúrja Hugót, (2) miatt Hugó nem okosabb, mint Elemér. Ez ellentmond a (3)-nak.↯
3. Mivel az indirekt feltevés ellentmondásra vezetett, a következtetés helyes.

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála.
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt.

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér.

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

$$\begin{array}{rl} (1) & \forall x(eOx \rightarrow eFx) \\ (2) & \forall x(xFh \rightarrow \neg xOh) \\ ↯(3) & \neg\neg eOh \end{array}$$

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall x(eOx \rightarrow eFx) & \\
(2) & \forall x(xFh \rightarrow \neg xOh) & \\
\lightning(3) & \neg\neg eOh \iff eOh & \text{kettős negáció}
\end{array}
$$

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$

Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

(1)	$\forall x(eOx \rightarrow eFx)$	
(2)	$\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$	
(3)	$\neg\neg eOh \iff eOh$	kettős negáció
(1) $\Rightarrow$	$eOh \rightarrow eFh$	(1)-ben x helyére h-t írunk

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$

Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

$$
\begin{array}{rll}
(1) & \forall x(eOx \rightarrow eFx) & \\
(2) & \forall x(xFh \rightarrow \neg xOh) & \\
(3) & \neg\neg eOh \iff eOh & \text{kettős negáció} \\
(1) \Rightarrow & eOh \rightarrow eFh & \text{(1)-ben } x \text{ helyére } h\text{-t írunk} \\
\Rightarrow & eFh & \text{modus ponens az előző két sor alapján}
\end{array}
$$

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

$$
\begin{array}{rlll}
(1) & \forall x(eOx \rightarrow eFx) & & \\
(2) & \forall x(xFh \rightarrow \neg xOh) & & \\
(3) & \neg\neg eOh & \Longleftrightarrow \quad eOh & \text{kettős negáció} \\
(1) \Rightarrow & eOh \rightarrow eFh & & \text{(1)-ben } x \text{ helyére } h\text{-t írunk} \\
\Rightarrow & eFh & & \text{modus ponens az előző két sor alapján} \\
(2) \Rightarrow & eFh \rightarrow \neg eOh & & \text{(2)-ben } x \text{ helyére } e\text{-t írunk}
\end{array}
$$

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \rightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

(1)	$\forall x(eOx \rightarrow eFx)$	
(2)	$\forall x(xFh \rightarrow \neg xOh)$	
(3)	$\neg\neg eOh \iff eOh$	kettős negáció
(1) $\Rightarrow$	$eOh \rightarrow eFh$	(1)-ben x helyére h-t írunk
$\Rightarrow$	eFh	modus ponens az előző két sor alapján
(2) $\Rightarrow$	$eFh \rightarrow \neg eOh$	(2)-ben x helyére e-t írunk
$\Rightarrow$	$\neg eOh$	modus ponens az előző két sor alapján

Példa indirekt érvelésre formálisan

Elemér mindenkit fúr, aki okosabb nála. $\forall x(eOx \longrightarrow eFx)$
Hugó nem okosabb, mint azok, akik fúrják őt. $\forall x(xFh \longrightarrow \neg xOh)$

Tehát Hugó nem okosabb, mint Elemér. $\neg hOe$

(1)	$\forall x(eOx \longrightarrow eFx)$	
(2)	$\forall x(xFh \longrightarrow \neg xOh)$	
(3)	$\neg\neg eOh \iff eOh$	kettős negáció
$(1) \Rightarrow$	$eOh \longrightarrow eFh$	(1)-ben x helyére h-t írunk
$\Rightarrow$	eFh	modus ponens az előző két sor alapján
$(2) \Rightarrow$	$eFh \longrightarrow \neg eOh$	(2)-ben x helyére e-t írunk
$\Rightarrow$	$\neg eOh$	modus ponens az előző két sor alapján
$(3) \Rightarrow$	$\lightning$	

Tehát a következtetés helyes.

Példa indirekt érvelésre

Ekvivalens-e a következő két állítás?

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

Először a $\Longleftarrow$ irányt vizsgáljuk meg:

1. Legyen $\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$ igaz, és legyen az indirekt feltevésünk szerint $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ hamis.
2. Mivel egy univerzális állítás akkor hamis, ha van rá ellenpélda, kell legyen egy a individuum, amelyre $\varphi(a) \vee \psi(a)$ hamis.
3. Mivel egy $\vee$-al kapcsolt állítás pontosan akkor hamis, ha mindkét tagja hamis, $\varphi(a)$ hamis és $\psi(b)$ is hamis.
4. A premissza szerint azonban $\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$ igaz, tehát a két $\vee$-al kapcsolt állítás közül legalább az egyik igaz kell legyen.
   - $\forall x\varphi(x)$ azonban nem lehet igaz, hiszen $\varphi(a)$ hamis.
   - de $\forall x\psi(x)$ sem lehet igaz, hiszen $\psi(b)$ hamis.

   Ez ellentmondás ↯
5. Mivel az indirekt feltevés (miszerint a premissza igaz, a konklúzió hamis, azaz a következtetés helytelen) ellentmondásra vezetett, a következtetés helyes kell legyen.

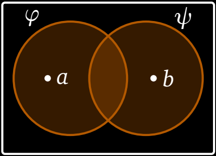
Példa indirekt érvelésre

Ekvivalens-e a következő két állítás?

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

Most a $\implies$ irányt vizsgáljuk meg:

1. Legyen $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))$ igaz, és legyen az indirekt feltevésünk szerint $\forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$ hamis.
2. Mivel egy $\vee$-al kapcsolt állítás pontosan akkor hamis, ha mindkét tagja hamis, $\forall x\varphi(x)$ is hamis és $\forall x\psi(x)$ is hamis.
3. Tehát valamilyen elemekre, nevezzük most őket most a-nak és b-nek, $\varphi(a)$ hamis és $\varphi(b)$ hamis.
4. Nemigen látszik, hogy hogyan is lehetne itt ellentmondásra jutni abból, hogy minden dolog φvagy ψtulajdonságú. Kezdjünk tehát inkább ellenpéldát rajzolni. Létezzen összesen két dolog, a és b úgy, hogy (1) alapján mindkettő a φés ψhalmazok valamelyikébe tartozzon, de teljesüljön az is, hogy $\varphi(a)$ hamis és $\psi(b)$ hamis. Az ábrán látható, hogy a premissza lehet úgy igaz, hogy a konklúzió hamis. Tehát a következtetés helytelen.



Példa indirekt érvelésre

Ekvivalens-e a következő két állítás?

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

A válaszunk: nem, a két állítás nem ekvivalens.

Bővebben:

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Longleftarrow \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

helyes következtetés, de

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \implies \forall x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)$$

helytelen következtetés.