1. Egy vendéglőben 20 férfit és 20 nőt szeretnének leültetni egy asztal mellé. Hányféleképpen történhet az ültetés, ha
   (a) az asztal téglalap alakú, az asztalfőknél nincs szék, számít az, hogy ki melyik helyre ül, és a férfiak ülnek az asztal egyik oldalán, a nők pedig a másikon?
   Az asztal két oldala legyen az A és B oldal. Ha az A-nál ülnek a nők, akkor ott 20!-féleképpen ülhetnek le a nők és mindeközben 20!-féleképpen ülhetnek le a férfiak. Fordítva is ülhetnek azonban, így adódik a $2 \cdot 20! \cdot 20!$ lehetőség.
   (b) az asztal kör alakú, csak az számít, hogy ki ki mellett ül?
   Ez egy ciklikus permutáció; 40!-féle képpen ülhetnek le az emberek, de mivel csak az egymáshoz viszonyított sorrendjük számít, az elforgatott ülésrendek mind ugyanannak számít. Tehát $\frac{40!}{40}$-féle ülésrend van.

2. Hány olyan hétjegyű szám van, amely
   (a) páratlan?
   A 0 nem lehet első helyen, páros szám nem lehet az utolsó helyen: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$
   (b) páros? A 0 nem lehet első helyen, páratlan szám nem lehet az utolsó helyen: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$

3. Natasha Romanoff egy 4 hosszú számkódon alapuló beléptetőrendszert próbál feltörni. Feltéve, hogy csak egy ember használja a beléptetőrendszert, mindig ugyanazzal a kóddal, és sose üt mellé, hány lehetőséget kell Natashának végigpróbálnia, ha azt már kiderítette, hogy a helyes belépéskor a következő számjegyeket kell valamilyen sorrendben beütni:
   (a) 1, 3, 4, 7
   4! (permutáció)
   (b) 1, 3, 7, de a 3-as billentyűt elnézve úgy tűnik, hogy azt mindig többször ütötték le mint a többi billentyűt.
   $\frac{4!}{2!}$, (ismétléses permutáció)
   (c) 1, 3, de nem deríthető ki, hogy melyik billentyűt ütötték le többször. 1,1,1,3; 1,1,3,3; 1,3,3,3 ismétléses permutációkat kell kiszámolni: $\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{3!}$

4. Hányféleképpen olvashatók ki a következő szavak?

V	I	D	Á	M
I	D	Á	M	S
D	Á	M	S	Á
Á	M	S	Á	G

LLLJJJJ ismétléses permutációi: $\frac{7!}{3! \cdot 4!}$

B	O	L	D	O	G
O	L	D	O	G	
L	D	O	G		
D	O	G			
O	G				
G					

L-J döntésekből 7 db: 2^7

S	I	K	E	R		
I	K	E	R	É		
K	E	R	É	L		
				M		
				É	N	Y
				N	Y	
				Y		

$\frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 2^2$

5. Bontsd fel a zárójelet:
   (a) $(a+1)^5 = \binom{5}{5} \cdot a^5 + \binom{5}{4}a^4 + \binom{5}{3}a^3 + \binom{5}{2}a^2 + \binom{5}{1}a^1 + \binom{5}{0}a^0 = ...$
   (b) $(x-y)^4 = \binom{4}{4} \cdot x^4y^0 - \binom{4}{3}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 - \binom{4}{1}x^1y^3 + \binom{4}{0}x^0y^4 = ...$

6. Manó pizzát rendelt, és bár kereken ki tudta fizetni a pizzát, borravalót szeretne adni a futárnak. A zsebében azonban már csak 10, 20, 50, 100, 200 forintosok vannak, mindegyikből pontosan egy darab.
   (a) Hányféleképpen adhat borravalót a pincérnek a megmaradt pénzéből?
   2^5: Mindegyik érme esetében dönt arról, hogy az adott borravalóban szerepelni fog-e vagy sem.
   (b) Manó zavarában a zsebében kotorászva végül 3 érmét adott át a futárnak. Hányféle módon keveredhetett a kezébe a futárnak adott 3 érme?
   $\binom{5}{3}$; 5 elemből kell kiválasztani 3-at

7. A kampányon egy osztály több műsorszámot ad elő. A fiúk 12-en, a lányok 28-en vannak. Hányféleképpen választható ki

   (a) 7 fiú, akik vajas-lekváros kenyereket kennek majd a szünetekben?

   $\binom{12}{7}$

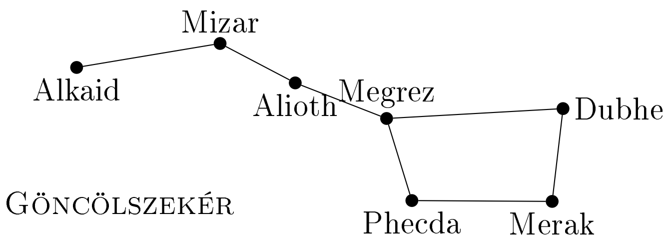
   (b) 12 ember, akik a szünetekben osztogatják a vajas-lekváros kenyereket?

   $\binom{40}{12}$

   (c) 6 fiú és 6 lány, akik páros táncot járnak majd az aulában?

   $\binom{12}{6} \cdot \binom{28}{6}$

8. Készíts egy olyan táblázatot, ami a Göncölszekér csillagképet mint gráfot reprezentálja (a 0-kat nem kell kiírni, elég üresen hagyni)



	Dubhe	Merak	Phecda	Megrez	Alioth	Mizar	Alkaid
Dubhe							
Merak							
Phecda							
Megrez							
Alioth							
Mizar							
Alkaid							

   Igaz-e, hogy ez a gráf

   - egyszerű? igen, nincsenek benne többszörös élek, hurkok és véges
   - egy fa? igen, körmentes és összefüggő

   Válaszodat indokold!

9. Egy körmérkőzéses torna 190 meccsel zárult. Kiderült azonban, hogy a Parafatantusz csapat jelentkezését elkeverték és így még sincsen vége a tornának; mindenkinek meg kell mérkőznie a szerencsétlenül járt csapattal is. Hány mérkőzést kell így lejátszani?

   ez egy teljes gráf, tehát $\frac{n(n-1)}{2} = 190$, ezt megoldva $n = 20$ adódik. Az új csapattal mindenkinek játszania kell, így 20 mérkőzést kell még lejátszani.

10. Egy 6 fős társaságban mindenki felírja egy papírra, hogy hány embert ismer a társaságból. (Feltesszük, hogy ismeretségek kölcsönösek.) Lehetségesek-e a következő eredmények? (Nemleges válasz esetén a választ indokolt, pozitív válasz esetén adj szemléltető ábrát!)

    (a) 5, 4, 3, 3, 3, 3 nem, a fokszámok összege páratlan.

    (b) 5, 4, 3, 3, 3, 2 igen, ennek a gráfját le lehet rajzolni

    (c) 5, 5, 3, 2, 2, 1 Egy 5 elemű gráfban két 5 fokszámú pont mindenkit lát, szóval az 1 fokszámú pontot két 5 fokszámú pontnak is látnia kéne, de akkor nem lehet 1 a fokszáma.