11B: Exponenciális és logaritmikus egyenletek

NÉV:		
Pontok	Százalék	Jegy

1. Hozd egyszerűbb alakra számológép használata nélkül! (lásd TK 94/4. példa)

$$9^{\log_{\frac{1}{27}} 4} = \left(\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\log_{\frac{1}{27}} 4} = \left(\left(\frac{1}{27}\right)^{\log_{\frac{1}{27}} 4}\right)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{2}{3}}$$

/4

2. Oldd meg a következő exponenciális egyenlőtlenséget! (lásd TK 86/3,8.példák)

$3^{x+1} - 3^x + 3^{x+3} \leq 87$

Bal oldalon kiemelünk: $3 \cdot 3^x - 3^x + 27 \cdot 3^x = 3^x(3 - 1 + 27) = 29 \cdot 3^x \leq 87 \implies 3^x \leq 3 \implies x \leq 1$ mivel 3^x szig. mon. nő.

/4

3. Oldd meg a következő exponenciális egyenletet! (lásd TK 86/4.példa)

$4^{x+1} = 14^x \cdot 49$

$$2^{2x+2} = (2 \cdot 7)^x \cdot 7^2 \quad (1)$$
$$2^{2x+2} = 2^x \cdot 7^x \cdot 7^2 \quad (2)$$
$$\frac{2^{2x+2}}{2^x} = 7^x \cdot 7^2 \quad (3)$$
$$2^{2x+2-x} = 7^{x+2} \quad (4)$$
$$2^{x+2} = 7^{x+2} \quad (5)$$
$$\frac{2^{x+2}}{7^{x+2}} = 1 \quad (6)$$
$$\left(\frac{2}{7}\right)^{x+2} = \left(\frac{2}{7}\right)^0 \quad (7)$$
$$x + 2 = 0 \text{ mert } \left(\frac{2}{7}\right)^x \text{ szig.mon.csökk.} \quad (8)$$
$$x = -2 \quad (9)$$

/6

4. Oldd meg a következő exponenciális egyenletet! (lásd TK 86/5.példa)

$4^x = 2^{x+1} - 3 \cdot 49$

$$4^x = 2^{x+1} - 3 \cdot 49 \quad (10)$$
$$\left(2^x\right)^2 - 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 49 = 0 \quad (11)$$
$$2^{x_{1,2}} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot 49}}{2} \text{nincs megoldás} \quad (12)$$

általában viszont figyeljünk arra, hogy ha 2^x-ra 0 vagy annál kisebb megoldás jön ki, akkor azt ki kell zárni!

Pl: $4^x = 2^{x+1} + 3$-nál 2^x-re 2^x-re 3 és -1 jön ki. Utóbbit ki kell zárni arra hivatkozva, hogy $2^x > 0$ minden x-re, előbbi esetén pedig ne felejtsük el hogy logaritmust kell használni ("logaritmizálni"): $2^x = 3 \implies \lg 2^x = \lg 3 \implies x \lg 2 = \lg 3 \implies x = \frac{\lg 3}{\lg 2} \implies$ számológép...

/6

5. Oldd meg a következő exponenciális egyenletet! (lásd TK 86/5.példa)

$\begin{cases} 125^{x-4} \cdot 25^{y-6} = 5^5 \\ 16^x = 256 \cdot 2^y \end{cases}$ (Itt az órán volt egy felesleges $\cdot 49$ a végén, ami miatt elég nehézzé vált, azt most töröltem, illetve véletlenül + szereplt a 125-ös és a 25-ös alapú hatvány között!)

Első egyenletből:

$$5^{3x-12} \cdot 5^{2y-12} = 5^5 \tag{13}$$
$$5^{3x+2y-24} = 5^5 \tag{14}$$
$$3x + 2y - 24 = 5, \text{ mert } 5^x \text{ szig.mon.nő.} \tag{15}$$
$$3x + 2y = 29, \text{ mert } 5^x \text{ szig.mon.nő.} \tag{16}$$

Második egyenletből:

$$16^x = 256 \cdot 2^y \tag{17}$$
$$2^{4x} = 2^8 \cdot 2^y \tag{18}$$
$$2^{4x} = 2^{y+8} \tag{19}$$
$$4x = y + 8, \text{ mert } 2^x \text{ szig.mon.nő.} \tag{20}$$
$$4x - y = 8 \tag{21}$$
$$8x - 2y = 16 \tag{22}$$

Összeadjuk a két egyenletet

$$11x = 45 \tag{23}$$
$$x = \frac{45}{11} \tag{24}$$
$$3\left(\frac{45}{11}\right) + 2y = 29 \tag{25}$$
$$2y = \frac{319 - 135}{11} \tag{26}$$
$$2y = \frac{184}{11} \tag{27}$$
$$y = \frac{92}{11} \tag{28}$$

És ezt ellenőrizni... (tz-ben szebb számok lesznek...)

/8

6. Határozzuk meg $\mathbb{R}$ azon legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető! (lásd TK 96/10 b).példa)

$\ln(0.25^{x-1} - \frac{1}{16})$

e alapú a logaritmus, de ez most nem fontos. A lényeg az, hogy $0.25^{x-1} - \frac{1}{16} > 0$ legyen. És ez már csak egy mezei exp. egyenlőtlenség...

$$0.25^{x-1} > \frac{1}{16} \tag{29}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \tag{30}$$

$$x - 1 < 2 \text{ mert } \left(\frac{1}{4}\right)^{x} \text{ szig.mon.csökk. (emiatt rel. jel fordul!!!)} \tag{31}$$

$$x < 3 \tag{32}$$

/6

7. Oldd meg a következő logaritmikus egyenletet! (lásd pl. 113/6. példa)

$\log_3(\log_{17}(\log_5(x+2)+15)+80) = 4$

$$\log_3(\log_{17}(\log_5(x+2)+15)+80) = 4 \tag{33}$$

$$\log_{17}(\log_5(x+2)+15)+80 = 3^4 = 81 \tag{34}$$

$$\log_{17}(\log_5(x+2)+15) = 1 \tag{35}$$

$$\log_5(x+2)+15 = 17^1 = 17 \tag{36}$$

$$\log_5(x+2) = 2 \tag{37}$$

$$x+2 = 5^2 \tag{38}$$

$$x = 23 \tag{39}$$

Ez így leírva azért elég jól néz ki.

/4

8. Oldd meg a következő logaritmikus egyenletet! (lásd pl. 113/6. példa)

$\log_3 x + \log_3 4 = 2 + \log_{\sqrt{3}} 6$

$$\log_3 x + \log_3 4 = 2 + \log_{\sqrt{3}} 6 \tag{40}$$

$$\log_3 x + \log_3 4 = 2 + \frac{\log_3 6}{\log_3 \sqrt{3}} \tag{41}$$

$$\log_3 x + \log_3 4 = \log_3 9 + \frac{\log_3 6}{\frac{1}{2}} \tag{42}$$

$$\log_3 x + \log_3 4 = \log_3 9 + 2\log_3 6 \tag{43}$$

$$\log_3 x + \log_3 4 = \log_3 9 + \log_3 6^2 \tag{44}$$

$$\log_3 4x = \log_3 9 \cdot 6^2 \tag{45}$$

$$4x = 9 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \text{ mert } \log_3 x \text{ szig.mon.nő} \tag{46}$$

$$x = 3^4 = 81 \tag{47}$$

/8

9. Oldd meg a következő logaritmikus egyenletrendszert!

$$\begin{cases} \lg(x+1)+\lg(y-3)=1 \\ \lg(y-1)-\lg x=0 \end{cases}$$

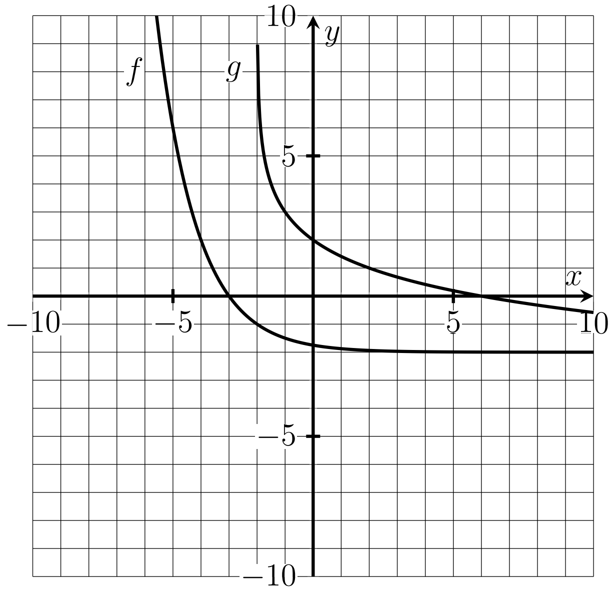
$$\lg(x+1)+\lg(y-3)=1 \tag{48}$$
$$\lg(x+1)(y-3)=1 \tag{49}$$
$$(x+1)(y-3)=10^1 \tag{50}$$
$$(x+1)(y-3)=10^1 \tag{51}$$
$$\tag{52}$$
$$\lg\frac{y-1}{x}=0 \tag{53}$$
$$\frac{y-1}{x}=10^0=1 \tag{54}$$
$$y-1=x \text{ kikötésből tudjuk hogy } x\neq 0\text{, innen visszahelyettesítünk} \tag{55}$$
$$(y-1+1)(y-3)=10 \tag{56}$$
$$y(y-3)-10=0 \tag{57}$$
$$y^2-3y-10=0 \tag{58}$$
$$(y-5)(y+2)=0(\text{ megoldóképlet vagy Viéte-formulákkal gyöktényezős alak}) \tag{59}$$
$$y_1=5 \implies x_1=4 \tag{60}$$
$$y_2=-2 \implies x_2=-3 \tag{61}$$

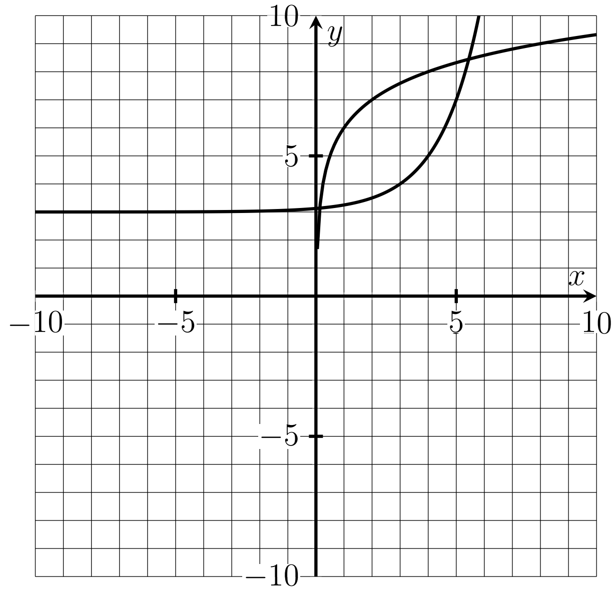
De ne feledjük hogy az utóbbi x_2, y_2 megoldáspár nem felel meg a kikötéseknek. Ez persze ellenőrzéskor is kiderül, mivel logaritmusba nem lehet negatív számot írni, és emiatt a számológép is kifagy.

/8

10. Mi lehet az f és g függvények hozzárendelési szabálya? Ábrázold a $-4+\log_2 1024x$ és $\frac{2^{x+2}}{32}+3$ függvényeket!

Megoldás: A felrajzolt függvények a baloldalon: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-2$ és $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, illetve berajzoltam a jobboldalra a kérdezett függvényeket.





/8

11. A bizmut-214 radioaktív izotóp 10%-a 3 perc alatt elbomlik. Tudjuk, hogy a radioaktív bomlás exponenciális folyamat, az $m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje.

(a) Mekkora a bizmut-214 felezési ideje? A szöveg alapján $0.9\cdot m_0=m_0\cdot 2^{-\frac{3}{T}}$. Vegyük észre hogy itt m_0-val lehet osztani, szóval az a változó ‘ott sincs’. (Természetesen feltehetjük, hogy az nem nulla.) Innen ki lehet számolni a T-t, ez egyébként kell is majd a további kérdésekhez.

(b) Mennyi idő múlva marad meg az eredeti mennyiség 0,01%-a? Azt kell megoldani, hogy $\frac{1}{2}m_0=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$. De mivel tudjuk mennyi T, ez sima ügy. Logaritmizálás, stb.