Kisérettségik 2011–2015

Szent László Gimnázium

2016. április 29.

Tartalomjegyzék

Kedves Diákok!

Először a feladatok megoldás nélkül vannak felsorolva, illetve majd később, a(z) 16. oldaltól kezdődnek a megoldások. Ez a dokumentum a 2011-2015 évi érettségiket tartalmazza. A megoldások géprevitele során előfordulhatnak hibák, ezekkel kapcsolatban bármiféle visszajelzést nagy örömmel fogadok.

Sikeres készülést és jó munkát kívánok,

2016. április 29.
Molnár Attila

1. feladatok megoldás nélkül

1.1. 2015

1. Melyek azok az x valós számok, amelyekre nem értelmezhető az $\dfrac{x+3}{x^2+10x+25}$ tört? Válaszod indokold!

   $\big/ ?$

2. Hány olyan háromszög van, amely oldalhosszainak mérőszáma cm-ben mérve egész szám, az egyik oldala 8 cm, a másik pedig 6 cm? Válaszodat indokold!

   $\big/ ?$

3. Ábrázold az $-(x+1)^2+4$ függvényt! Add meg a függvény értékkészletét!

   $\big/ ?$

4. Hány különböző négyjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 8 és a 9 számjegyek felhasználásával?

   $\big/ ?$

5. Döntsd el mindegyik állításról, hogy igaz-e, vagy hamis!

   (a) A $\sqrt{-x}$ kifejezés csak az $x=0$ esetén értelmezhető.

   (b) $a^{10}\cdot a^3=a^{30}$

   (c) $]-2;3[\cap[2;5[=[2;3]$

   $\big/ ?$

6. Adj meg egy lehetséges a pozitív egész számot úgy, hogy az n számnak pontosan 16 db pozitív osztója legyen, ha $n=24a$.

   $\big/ ?$

7. Egy nyári cipő árát 15%-kal felemelték, majd nyár végén, a felemelt árat 40%-kal csökkentették. Így 8625 Ft-ért lehetett megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszod számítással indokold!

   $\big/ ?$

8. Egy 52 cm átmérőjű körlapból szeretnénk kivágni azt a lehető legnagyobb téglalapot, amely szomszédos oldalainak aránya 5 : 12. Mekkora a területe ennek a téglalapnak?

   $\big/ ?$

9. Egy munkahelyen 23 dolgozótól megkérdezték, hogy családjukban hány kiskorú gyermek él. A válaszokat az alábbi táblázatban összesítették.

gyerekek száma	0	1	2	3	4	5
válaszok száma	6	6	8	2	1	0

   Az adatok alapján számold ki, hogy hány gyerek van átlagosan egy családban! Mennyi az adatsor mediánja?

   $\big/ ?$

10. Az ABCD rombusz két oldalának vektora $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$. Fejezd ki ezek segítségével az A csúcsból az átlók $\overrightarrow{AF}$ metszéspontjába mutató vektort!

/?

11. Adj meg egy olyan egyenletet, amelynek a -4 és a 0 is megoldása!

/?

12. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben az átlók és a csúcsok számának összege 120?

/?

13. Oldd meg az egész számok halmazán az alábbi egyenleteket!

(a) $2\,|x+1| = 3x-2$

(b) $\sqrt{3-x} = x-1$

/6+6

14. Egy trapéz alakú virágágyást háromszög alakúvá akarnak alakítani úgy, hogy a trapéz szárait meghosszabbítják. Mekkorák lesznek e háromszög oldalai, ha a trapéz két alapja 16 m és 9 m, szárai pedig 6 m és 11 m hosszúak? A végeredményt méterben, egy tizedesjegy pontossággal add meg!

/12

15. Egy 4 fiúból és 5 lányból álló társaságban a fiúk is és a lányok is egy-egy baráti társaságot alkotnak, de nincs ismeretség a különböző neműek között.

(a) Kiosztunk nekik egy-egy kártyát úgy, hogy az egymást ismerő embereknek nem osztunk azonos lapot. Legalább hány különböző fajta kártyára van szükségünk?

(b) A társaság moziba megy, és egy sorba kérik a 9 jegyet. Az ismerkedést megkönnyítendő, úgy szeretnének leülni, hogy egymás mellett ne üljön két azonos nemű ember. Hány különböző módon tehetik ezt meg?

(c) Mozi után a fiúk kezet fognak minden fiúval, a lányok pedig puszit adnak lánybarátaiknak. Mennyivel több a puszik száma, mint a kézfogásoké?

/4+5+3

16. Egy matematikai versenyen három feladatot tűztek ki, a 184 versenyző közül mindenki megoldott legalább egy feladatot. Az első példát 90, a másodikat 80, a harmadikat 50 induló oldotta meg helyesen, pontosan két jó feladatmegoldása 32 diáknak volt.

(a) Hány olyan versenyző volt, aki az első feladatot nem oldotta meg?

(b) Hány olyan versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta?

(c) Ha azt is tudjuk, hogy 60 olyan diák volt, aki csak az első, és 50 olyan diák volt, aki csak a második feladatot oldotta meg, akkor hányan voltak azok, akik csak a harmadik feladatot oldották meg?

/2+8+7

17. Egy derékszögű háromszög AB átfogója 31,2 cm, egyik befogója BC=12 cm.

(a) Mekkora az AC befogóhoz tartozó súlyvonal hossza?

(b) Számoljuk ki a háromszög átfogóhoz tartozó magasságát!

(c) Adjuk meg a háromszögbe írható legnagyobb kör sugarát!

(d) Mekkora sugara van a háromszög köré írható körének?

	/ 4+4+5+4

18. Az $f : [0; 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ függvény egy ferdén elhajított testnek a talaj szintjétől mért távolságát írja le, ahol x az eldobás helyétől vízszintesen mért távolságot jelöli. (Az egység mindkét tengelyen 1 méter távolságnak felel meg.)

    (a) Ábrázolja a megfelelő koordináta-rendszerben az eldobott test pályáját! (A pálya az $f(x)$ függvény grafikonja.)

    (b) Az eldobás szintjéhez képest milyen magasra emelkedett a test?

    (c) Mekkora szintkülönbség a test legalacsonyabb és legmagasabb helyzete között?

    (d) Az eldobás helyéhez képest hol ért földet az elhajított test?

	/ 10+2+3+2

1.2. 2014

1. Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 4 cm, illetve 10 cm. Milyen hosszú a harmadik oldal?

2. Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ és a $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ halmaz. Adjuk meg elemeik felsorolásával az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat!

3. Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4x$ másodfokú függvény zérushelyeit! Számítsa ki a függvény helyettesítési értékét az $x = 2$ helyen!

4. Hányadik hatványra kell emelni a 4^4-t, hogy 8^8 legyen belőle? Válaszát indokolja!

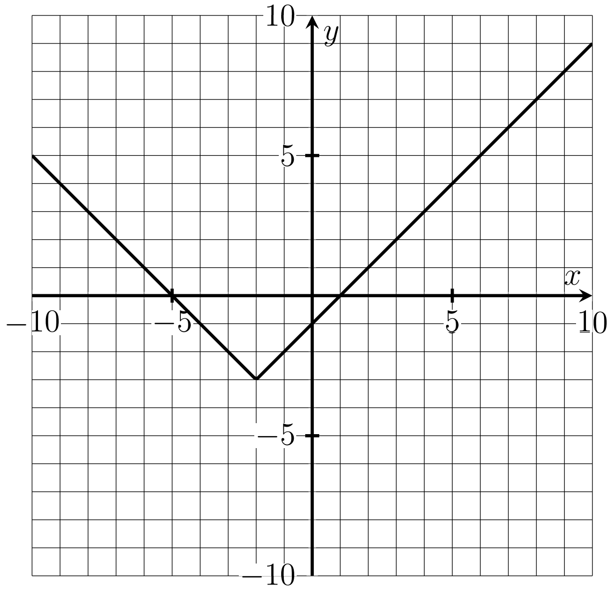
5. Egy tízfős baráti társaságból öten szeretik a focit, négyen a kosárlabdát, egy valaki mindkét sportágat. A társaságból hányan nem kedvelik az előbbi két labdajáték egyikét sem?

6. Egyszerűsítse a $K(x) = \dfrac{2a^4 + 6a^2}{a^3 + 3a}$ kifejezést, ahol $a \neq 0$!

7. Van-e olyan p prímszám, hogy a $p + 15$ is prímszám?

8. Egy derékszögű háromszög befogói 5 cm és 12 cm hosszúak. Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

9. Az ábrán a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - a| + b$ függvény grafikonjának egy részlete látható. Adja meg a és b értékét!



10. Adja meg azt az x valós számot, melyre teljesül az $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 2$ egyenlőség!

11. Bontsa fel a 72000-t két részre úgy, hogy a részek aránya 7:2 legyen!

12. Adja meg a $\left]\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right[$ nyílt intervallum két különböző elemét!

13. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet, illetve egyenletrendszert!

$$\frac{2x}{x+6} = x \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} xy & = & 600 \\ (x-10)(y+5) & = & 600 \end{array} \right.$$

14. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet, illetve egyenletrendszert!

$$\frac{2x}{x+6} = x \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} xy & = & 600 \\ (x-10)(y+5) & = & 600 \end{array} \right.$$

15. A munkavállaló nettó munkabérét a bruttó béréből számítják ki levonások és jóváírások alkalmazásával. Kovács úr bruttó bére 2010 áprilisában 200 000 forint volt. A 2010-ben érvényes szabályok alapján különböző járulékokra ennek a bruttó bérnek összesen 17%-át vonták le. Ezen felül a bruttó bérből személyi jövedelemadót is levontak, ez a bruttó bér 127%-ának a 17%-a volt. A levonások után megmaradó összeghez hozzáadtak 15 000 forintot adójóváírásként. Az így kapott érték volt Kovács úr nettó bére az adott hónapban.

    (a) Számítsa ki, hogy Kovács úr bruttó bérének hány százaléka volt a nettó bére az adott hónapban!

    Szabó úr nettó bére 2010 áprilisában 173 015 forint volt. Szabó úr fizetésénél a levonásokat ugyanazzal az eljárással számították ki, mint Kovács úr esetében, de ebben a hónapban Szabó úr csak 5980 forint adójóváírást kapott.

    (b) Hány forint volt Szabó úr bruttó bére az adott hónapban?

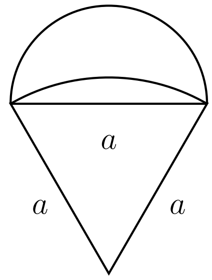
16. 15. Számológép használata nélkül határozza meg a következő számok legegyszerűbb alakját:

$$\sqrt{\sqrt{57}-\sqrt{48}} \cdot \sqrt{\sqrt{57}+\sqrt{48}}$$

$$\left(\frac{7}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\right) \cdot (13 \cdot \sqrt{7} + \sqrt{6})$$

17. Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két egyenessel három egybevágó téglalapra bontunk. Egy ilyen téglalap kerülete 24 cm.

(a) Hány cm^2 az eredeti négyzet területe?



Az ábrán egy ejtőernyős klub kitűzőjének vázlata látható. Az egyik körív középpontja a szabályos háromszög A csúcsa, a másik körív középpontja az A csúccsal szemközti oldal felezőpontja.

(b) Számítsa ki egyenként mindhárom tartomány területét, ha $a = 4$ cm !
Számításait legalább két tizedesjegy pontossággal végezze, és az így kapott eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

$/?$

---

18. (a) Hány oldalú lehet az a konvex sokszög, amelyik átlóinak száma úgy aránylik az oldalainak számához, mint 5 : 2?
(b) Melyik az a valós szám, amelyikhez a négyzetét hozzáadva a lehető legkisebb értéket kapjuk? Mennyi ez a legkisebb érték?

$/?$

---

19. Háromszor dobunk klasszikus dobókockával, a kapott számokat egymás után leírjuk.
(a) Hány különböző páratlan számot kaphattunk?
(b) Melyek lesznek ezek közül azok, amelyeknek a számjegyei megegyeznek?
(c) Hány különböző néggyel osztható számot kaphatunk?
(d) Az egyik keresett szám lehet a 624. Hány pozitív osztója van ennek a számnak?

$/?$

1.3. 2013

1. Hány 20000-nél nagyobb, de 30000-nél kisebb természetes szám képezhető a 0, 1, 1, 2, 3 számjegyekből?

   $/2$

2. Lehet-e két prímszám összege 2013?

   $/2$

3. Adottak a $[-3;4[$ és $[1;6]$ intervallumok. Add meg a két intervallum metszetét!

   $/2$

4. Milyen x természetes számokra igaz, hogy $\dfrac{15}{5-x} > 0$?

   $/2$

5. Határozd meg az $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ függvény értelmezési tartományát!

   $/2$

6. 4-nek melyik hatványával egyenlő 2^{30}-nak a 25%-a?

   $/2$

7. Írj fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, melynek gyökei $x_1 = \dfrac{1}{2}$ és $x_2 = -\dfrac{1}{3}$!

   $/3$

8. Egyszerűsítsd a következő törtet: $\dfrac{x^3-9x}{2x^3-12x^2+18x}$

   $/4$

9. Derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm, az adott befogóval szemközti szög 30°. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

   $/2$

10. Kristóf az új (7-jegyű) telefonszámát (__47231__) hiányosan adta meg társainak. Annyit elárult azonban, hogy a számjegyek módusza és mediánja is 3, a számjegyek átlaga pedig egész szám, és az utolsó számjegy a legnagyobb. Mennyi Kristóf telefonszáma?

    $/3$

11. Oldd meg az $|2x-4| < 6$ egyenlőtlenséget!

    $/2$

12. Döntsd el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis!

    (a) Ha egy deltoid téglalap, akkor négyzet.

    (b) Ha egy négyszögnek van két derékszöge, akkor húrnégyszög.

    (c) Van olyan paralelogramma, ami érintőnégyszög.

    (d) Ha egy paralelogrammának van derékszöge, akkor téglalap.

/4

13. Két pozitív szám különbsége 24, számtani és mértani közepük eltérése 4. Melyik ez a két szám?

/12

14. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának felezőpontja F, CD oldalának D-hez közelebbi negyedelőpontja N. Milyen arányban osztják az AC és FN szakaszok egymást?

/12

15. Határozd meg számológép használata nélkül az alábbi kifejezés pontos értékét!

$$\left(\frac{6}{\sqrt{7}+2}-\frac{9}{\sqrt{7}-2}+\frac{36}{\sqrt{7}-1}\right)\left(\sqrt{175}+4\right)$$

/12

16. 15) Adott az $f(x)=ax^2-2ax+3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény.

   a Hogyan válasszuk meg az a paraméter értékét, hogy a függvény grafikonja érintse az x tengelyt?

   b Milyen paraméterértékek esetén lesz a függvénynek két zérushelye?

   c Milyen paraméterértékek esetén lesz a függvénynek maximuma?

/17

17. Derékszögű háromszög kerülete 36 egység, a beírható kör sugara 3 egység. Mekkorák a háromszög oldalai?

/17

18. A 400 m hosszú futópályát úgy alakítják ki, hogy a téglalap alakú labdarúgópálya rövidebb oldalára kifelé félköröket szerkesztenek. A téglalap oldalainak aránya 2:3.

   (a) Milyen hosszú a futópálya két egyenes szakasza?

   (b) A téglalap két szemközti csúcsán egy-egy versenybíró áll. Hogyan kellene megválasztani a téglalap méreteit, hogy két szemközti oldalára kifelé félköröket szerkesztve a futópálya hossza 400 m legyen, de a két bíró a lehető legközelebb álljon egymáshoz?

/17

1.4. 2012

1. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

   (a) Egy háromszög köré írható kör középpontja mindig valamelyik súlyvonalra esik.

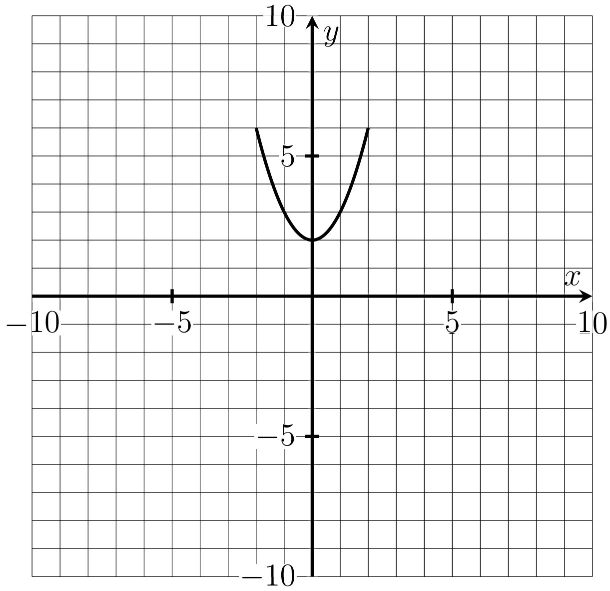
   (b) Egy négyszögnek lehet 180°-nál nagyobb belső szöge is.

   (c) Minden trapéz paralelogramma.

/3

---

2. Az ábrán egy, a $[-2; 2]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.



Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát!

   (a) $x \mapsto x^2 - 2$

   (b) $x \mapsto x^2 + 2$

   (c) $x \mapsto (x + 2)^2$

/2

---

3. Adja meg az előző feladatban adott, $[-2; 2]$ intervallumon értelmezett függvény értékkészletét!

/2

---

4. Egy kör sugara 6 cm. Számítsa ki ebben a körben a 120°-os középponti szöghöz tartozó körcikk területét!

/2

---

5. Egy 5 cm sugarú kör középpontjától 13 cm-re lévő pontból érintőt húzunk a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza? Írja le a számítás menetét!

/3

---

6. Melyek azok az x valós számok, amelyekre nem értelmezhető az $\frac{1}{x^2-9}$ tört? Válaszát indokolja!

/2

---

7. Egy farmernadrág árát 20%-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25%-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja!

/3

8. Az A és a B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \setminus B = \{5,7\}$. Adja meg az A és a B halmaz elemeit!

/2

9. Egy 10 tagú csoportban mindenki beszéli az angol és a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélik mindkét nyelvet? Válaszát indokolja számítással, vagy szemléltesse Venn-diagrammal! Tehát 4-en beszélik mindkét nyelvet.

/2

10. Egyszerűsítse az $\frac{a^2b-2ab}{ab}$ törtet, ahol az a, b valós számok és $ab \neq 0$!

/3

11. Egy kisüzem 6 egyforma teljesítményű gépe 12 nap alatt gyártaná le a megrendelt csavarmennyiséget. Hány ugyanilyen teljesítményű gépnek kellene dolgoznia ahhoz, hogy ugyanennyi csavart 4 nap alatt készítsenek el?

/3

12. Az A és a B halmazok a számegyenes intervallumai: $A = [-1,5;12]$, $B =]3;20[$. Ábrázolja számegyenesen az intervallumokat és adja meg intervallum jelöléssel az $A \cup B$ és az $A \cap B$ halmazokat!

/4

13. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

(a) $x^2 - (x-1)^2 = 2$

(b) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$

/12

14. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, a szárai 8 cm hosszúak.

(a) Mennyi a háromszög területe?

(b) Milyen hosszú részekre bontja a szárakat a hozzájuk tartozó magasság?

/12

15. Zsuzsi 7-jegyű mobiltelefonszáma különböző számjegyekből áll, és az első számjegy nem nulla. Amikor Ildikó felhívta Zsuzsit, feltűnt neki, hogy a mobiltelefonján a három oszlop közül csak kettőnek a nyomógombjaira volt szükség. Ezekre is úgy, hogy először az egyik oszlopban levő nyomógombokat kellett valamilyen sorrendben megnyomnia, ezután pedig egy másik oszlop nyomógombjai következtek valamilyen sorrendben. Hány ilyen telefonszám lehetséges?

1	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

/12

16. (a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $K(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető!

(b) Ábrázolja a $[-5; 8]$ intervallumon értelmezett $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt!

(c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan?

i. Az f értékkészlete: $[0; 5]$.

ii. Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

iii. Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4; 8]$ intervallumon.

/17

---

17. A következő kettő kérdés ugyanarra a 20 oldalú szabályos sokszögre vonatkozik.

(a) Mekkorák a sokszög belső szögei? Mekkorák a külső szögei?

(b) Hány átlója, illetve hány szimmetriatengelye van a sokszögnek? Hány különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból?

(c) Egy másik konvex sokszög átlóinak száma nyolcvannyolccal több, mint ahány oldalú. Hány oldala van ennek a sokszögnek?

/17

---

18. Egy kávéforgalmazó cég kétfajta kávéból készíti a keverékeit. Ha az A típusú kávéból 20 kg-ot és a B típusúból 30 kg-ot kevernek össze, a keverék egységára kilogrammonként 1860 Ft lesz. Ha az A típusú kávéból 30 kg-ot, a B típusúból 20 kg-ot kevernek össze, akkor a keverék egységára 1740 Ft lesz.

(a) Mennyi az A, illetve B típusú kávék kilogrammonkénti egységára?

(b) 60 kg 2000 Ft egységárú keveréket akarnak előállítani. Hány kilogrammot keverjenek bele az A, illetve a B típusú kávéból?

/17

1.5. 2011

1. Alakítsd szorzattá a következő kifejezést (amennyire csak lehet): $5a^2 - 20$

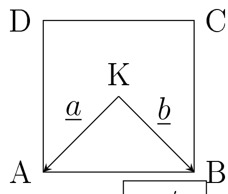
/2

2. Gyöktelenítsd a következő törtek nevezőjét! Ha lehet egyszerűsíteni, egyszerűsíts!

   (a) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

   (b) $\dfrac{4}{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

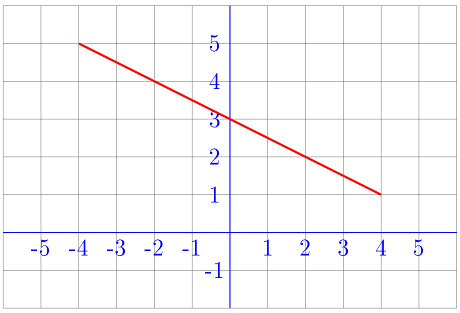
/1+2



3. Az ábrán látható $ABCD$ négyzet K középpontjából A-ba mutat az $\underline{a}$, B-be mutat a $\underline{b}$ vektor. Fejezd ki $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok segítségével $\overrightarrow{KC}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokat!

/2

4. Az ábrán egy a [-4; 4] intervallumon értelmezett függvény grafikonját látod. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

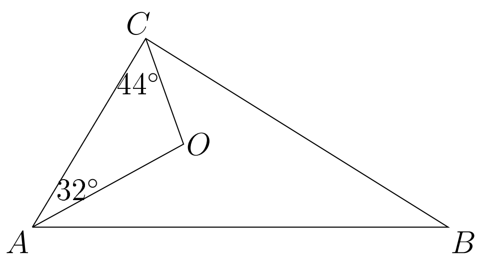


/2

5. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1$

/3

6. Az ábrán az ABC háromszöget és beírható körének O középpontját látjuk. Mekkora a B csúcsnál lévő külső szög?



/2

7. Iskolánkba 841 tanuló jár. A következő állításban melyik az a legnagyobb szám, amelyet a pontok helyébe írhatsz?
„Biztosan van legalább ... tanuló, aki ugyanabban a hónapban ünnepli a születésnapját.”

/2

8. Írd fel egyetlen gyökjel segítségével: $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$

/2

---

9. Egy 7 fős társaság moziba megy. Hányféleképpen ülhetnek le sorban az egymás melletti székekre, ha
   (a) Peti és Petra egymás mellé szeretnének ülni?
   (b) Fanni nem akar a szélén ülni?

/4

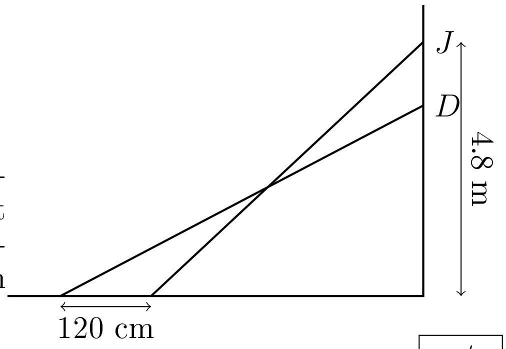
---

10. (a) 5-nek hányadik hatványa az $\frac{1}{125}$? **Válasz: _______-ik hatványa.**
    (b) 3-nak hányadik hatványa a $3^2(3^4)^{-1}$? **Válasz: _______-ik hatványa.**

/2

---

11. Rómeó egy 6 méter hosszú létra segítségével akart bemászni Júlia ablakpárkányán, amely 4,8 m magasan volt. Sajnos a létrát 120 cm-rel hátrébb támasztotta ki, mint kellett volna, így tévedésből a Dadus ablakpárkányán mászott be. Milyen magasan van a Dadus ablakpárkánya?



/3

---

12. Egy konvex sokszögnek 9 átlója van. Hány átlója van a 2-vel nagyobb oldalszámú konvex sokszögnek?

/3

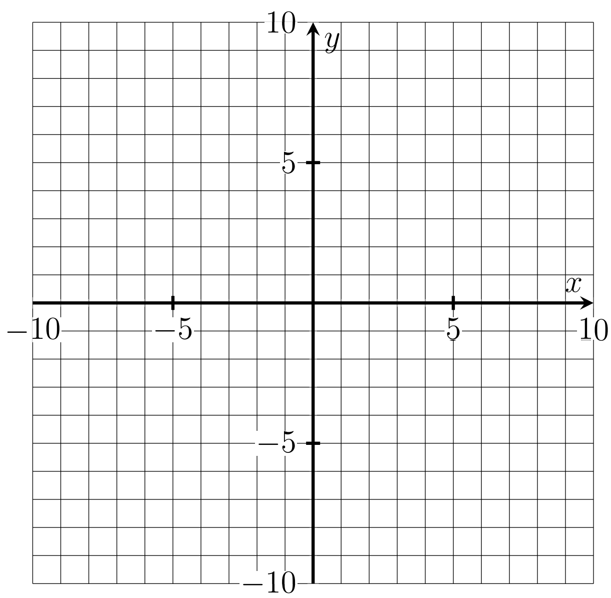
---

13. Egy dobókockával egymás után négyszer dobunk. A kapott számokat egymás mellé írva
    (a) Hány olyan eset lehet, amikor a dobott számok között nincs két egyforma?
    (b) Hány esetben kaphatunk páros számot?
    (c) Hány esetben kaphatunk 3-mal osztható számot?

/12

---

14. Adottak az $f(x) = 2\,|x-5| - 4$ és $g(x) = x^2 - 8x + 14$ függvények.
    (a) Ábrázold őket az $[1; 7]$ intervallumon!
    (b) Add meg f zérushelyét és g minimumát!
    (c) A grafikon alapján határozd meg az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!



/12

15. Egy 28 fős osztályban összeszámolták, kinek hány nyelvvizsgája van, és a következőket állapították meg: Angol és német 4 főnek, német és francia 3 főnek, csak angol 10 főnek van. A német nyelvvizsgával rendelkezők száma 11. Angolul vagy franciául 21 diák beszél. A csak francia nyelvvizsgával rendelkező diákok száma ugyanannyi, mint ahány diáknak angol és francia nyelvvizsgája is van. Nincs olyan tanuló, aki mindhárom nyelven beszél.

(a) Hányan vizsgáztak angolból, illetve franciából?

(b) Hány főnek nincs nyelvvizsgája az osztályból?

(c) Hány olyan tanuló van, akinek van angol, de nincs francia nyelvvizsgája?

/12

16. Egy vállalkozó három fodrászüzletet üzemeltetett. Fejlesztési terveihez pontos adatokra volt szüksége, ezért egy héten (7 napon) keresztül felmérte az egyes üzletek forgalmát a vendégek kora és neme szerinti megoszlásban. Az eredményt az alábbi táblázat mutatja:

		1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet
Felnőttek	Nők	116	88	102
	Férfiak	98	64	72
Gyerekek	Lányok	34	36	48
	Fiúk	30	28	32

(a) A három üzlet teljes forgalmának hány százalékát teszik ki a nőnemű vendégek?

(b) Szemléltesd oszlopdiagramon az egyes üzletek forgalmát nemek szerinti bontásban!

(c) Számítsd ki az üzletek átlagos forgalmát!

(d) Az 1. üzlet a hét egy napján, a 2. üzlet a hét három napján, a 3. üzlet a hét két napján zárva tartott műszaki okok miatt. Ezt tudva melyik üzlet napi átlagos forgalma a legnagyobb?

/17

17. Derékszögű háromszög magasságpontjának és súlypontjának távolsága 5 egység.

(a) Milyen messze van a köré írható kör középpontja a súlyponttól?

(b) A háromszög legkisebb oldala 9 egység. Milyen hosszú a legkisebb szög szögfelezőjének a háromszögbe eső szakasza?

/17

2. feladatok megoldásokkal

2.1. 2015

1. Melyek azok az x valós számok, amelyekre nem értelmezhető az $\dfrac{x+3}{x^2+10x+25}$ tört? Válaszod indokold!

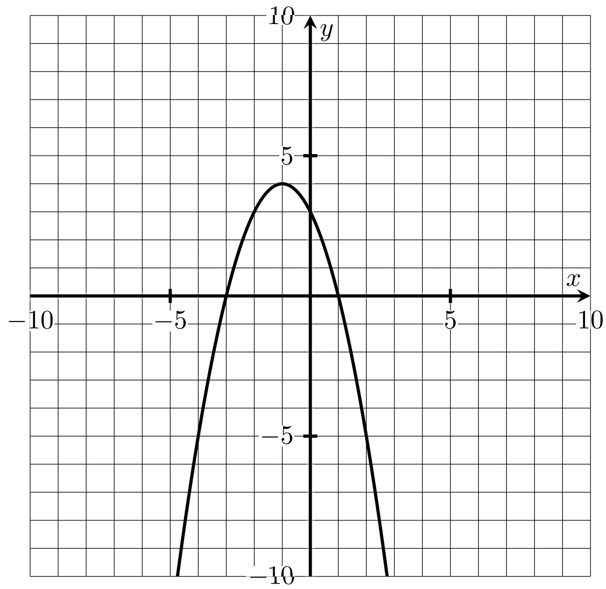
   Pontosan akkor nem értelmezhető, ha a nevező nulla, azaz azt kell megkeresni, hogy mely x-ekre lesz $x^2+10x+25=0$. Ezt lehet megoldóképlettel, vagy: $x^2+10x+25=(x+5)^2=0 \iff x+5=0 \iff x=-5$. Tehát $x=-5$-re nem értelmezhető a szóban forgó tört.

2. Hány olyan háromszög van, amely oldalhosszainak mérőszáma cm-ben mérve egész szám, az egyik oldala 8 cm, a másik pedig 6 cm? Válaszodat indokold!

   A háromszög-egyenlőtlenség alapján a harmadik oldal 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 cm lehet.

3. Ábrázold az $-(x+1)^2+4$ függvényt! Add meg a függvény értékkészletét!

   Az értékkészlet $R_{-(x+1)^2+4}=]-\infty;4]$, mivel a függvény így néz ki:



4. Hány különböző négyjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 8 és a 9 számjegyek felhasználásával?

   Mivel a nulla nem szerepelhet a legnagyobb helyiértéken, $2\cdot3\cdot3\cdot3=54$ db szám képezhető.

5. Döntsd el mindegyik állításról, hogy igaz-e, vagy hamis!

   (a) A $\sqrt{-x}$ kifejezés csak az $x=0$ esetén értelmezhető.

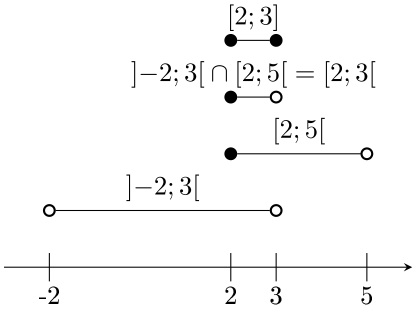
   Ez hamis, pl.: $\sqrt{-(-4)}=\sqrt{4}$ tökéletesen értelmes.

   (b) $a^{10}\cdot a^3=a^{30}$

   Ez helytelen, $a^{10}\cdot a^3=a^{10+3}=a^{13}$ lenne az igaz.

(c) $]-2;3[\, \cap\, [2;5[\, = [2;3]$

Hamis:



6. Adj meg egy lehetséges a pozitív egész számot úgy, hogy az n számnak pontosan 16 db pozitív osztója legyen, ha $n = 24a$.

Az n pozitív osztóinak száma $(i_1+1)(i_2+1)\cdots(i_m+1)$, ahol $n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdots p_m^{i_m}$ az n szám prímtényezős felbontása. (Tehát az osztók száma a prímtényezős felbontás kitevőinek rákövetkezőinek a szorzata.) Az n prímtényezős felbontása biztosan így kezdődik: $n = 3 \cdot 2^3 \cdot \ldots$, ahonnan az osztók száma legalább $2 \cdot 4 = 8$. Ahhoz, hogy pont 16 osztó legyen, meg kell szorozni ezt a szorzatot kettővel, amely sokféleképp biztosítható:
$a = 5, 7, 11, \ldots$ vagy valamilyen más prímszám.
$a = 3^2 = 9$
$a = 2^4 = 16$

7. Egy nyári cipő árát 15%-kal felemelték, majd nyár végén, a felemelt árat 40%-kal csökkentették. Így 8625 Ft-ért lehetett megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszod számítással indokold!

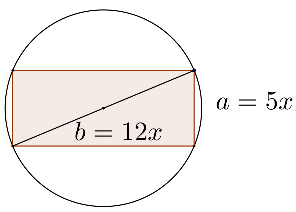
Legyen x a cipő ára. Ekkor a feladatban szereplő állítások alapján igaz a következő egyenlet:

$$\begin{aligned} 0.6 \cdot 1.15 \cdot x &= 8625 \\ 0.69 \cdot x &= 8625 \\ x &= 12500 \end{aligned}$$

Tehát a nyári cipő ára 12500 forint volt eredetileg.

8. Egy 52 cm átmérőjű körlapból szeretnénk kivágni azt a lehető legnagyobb téglalapot, amely szomszédos oldalainak aránya 5 : 12. Mekkora a területe ennek a téglalapnak?

A téglalap területe $T = ab$, keressük tehát az oldalakat, amelyekről az tudjuk, hogy $a = 5x$ és $b = 12x$ valamely $x \in \mathbb{R}$-re. A "körlapból lehető legnagyobb kivágható téglalap" arra utal, hogy a kör a téglalap köré írható köre:



Mármost az 52 cm-es átmérő a téglalap átlója is egyben, így a Pitagorasz tétel a következő egyenletet szolgáltatja:

$$\begin{aligned} (5x)^2 + (12x)^2 &= 52^2 \\ 25x^2 + 144x^2 &= 52^2 \\ 169x^2 &= 52^2 \\ (13x)^2 &= 52^2 \\ 13x &= 52, \text{ mivel } x > 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

tehát a két oldal $a = 5 \cdot 4 = 20$ cm és $b = 12 \cdot 4 = 48$ cm, és így a terület $T = 20 \cdot 48 = 960$ cm^2.

/?

9. Egy munkahelyen 23 dolgozótól megkérdezték, hogy családjukban hány kiskorú gyermek él. A válaszokat az alábbi táblázatban összesítették.

gyerekek száma	0	1	2	3	4	5
válaszok száma	6	6	8	2	1	0

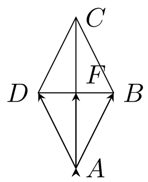
Az adatok alapján számold ki, hogy hány gyerek van átlagosan egy családban! Mennyi az adatsor mediánja?

Az átlagos gyerekszám: $\dfrac{6\cdot 0 + 6\cdot 1 + 8\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4 + 0\cdot 5}{6+6+8+2+1+0} = \dfrac{32}{23} \approx 1.39$
Medián: Mivel összesen $23 = 11 + 1 + 11$ válasz volt, a 12. válasz a medián. Mivel az adatok sorrendbe vannak rakva, az első 6 db 0-ás, az azt követő 6db 1-es érték lesz, így a medián 1.

/?

10. Az ABCD rombusz két oldalának vektora $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$. Fejezd ki ezek segítségével az A csúcsból az átlók $\overrightarrow{AF}$ metszéspontjába mutató vektort!

Lásd az ábrát:



$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$

/?

11. Adj meg egy olyan egyenletet, amelynek a -4 és a 0 is megoldása!

Pl.: $x(x+4) = 0$

/?

12. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben az átlók és a csúcsok számának összege 120?

$$\begin{aligned}
n + \frac{n(n-3)}{2} &= 120 \\
2n + n(n-3) &= 240 \\
2n + n^2 - 3n &= 240 \\
n^2 - n &= 240 \\
n^2 - n - 240 &= 0 \\
n^2 - n - 240 &= 0 \\
n &= 16 \qquad \text{(ezt megoldóképlettel vagy gyöktényezős alakkal, a negatív gyököt kizárja a feladat kontextusa)}
\end{aligned}$$

Ne felejtsünk el ellenőrizni.

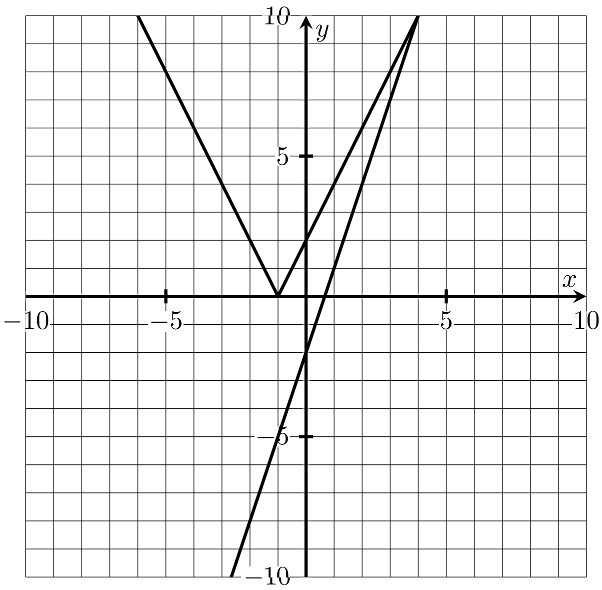
/?

13. Oldd meg az egész számok halmazán az alábbi egyenleteket!

(a) $2|x+1| = 3x - 2$

Két megoldást is adunk:

- **grafikus megoldás:**



Láthatjuk, hogy egy metszéspont van, mégpedig az $x = 4$ helyen, és mivel ez egész szám is egyben, ez az egyetlen megoldás. Ellenőrzés: $2 \cdot 5 = 3 \cdot 4 - 2 \iff 10 = 10$

- **algebrai megoldás:** Esetszétválasztás:
  - ha $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$, akkor az abszolútérték függvény helyben hagyja a számot:

$$\begin{aligned} 2(x+1) &= 3x - 2 \\ 2x + 2 &= 3x - 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

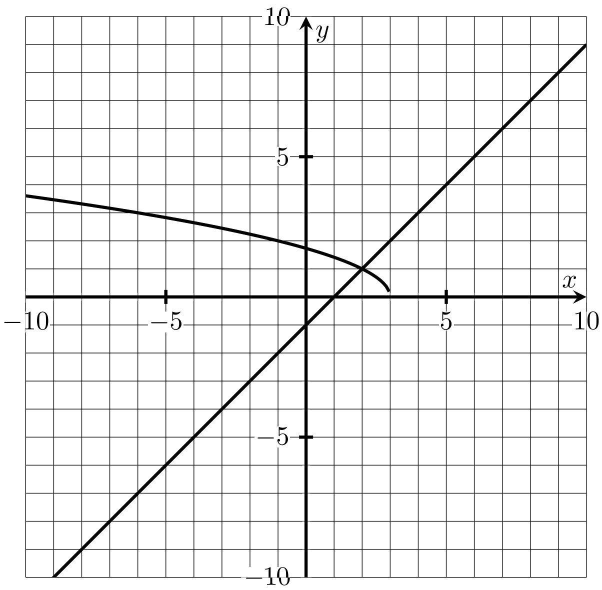
    Ez meg is felel a $x \geq -1$ kikötésnek, így ez megoldás is egyben. (Ellenőrzést lásd a grafikus megoldásnál)
  - ha $x + 1 \leq 0 \iff x \leq -1$, akkor $x + 1$ abszolútértéke az $x + 1$ ellentettje:

$$\begin{aligned} -2(x+1) &= 3x - 2 \\ -2x - 2 &= 3x - 2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

    Viszont ez nem felel meg a $x \leq -1$ kikötésnek, így ez valójában nem megoldás.

(b) $\sqrt{3-x} = x - 1$

- **grafikus megoldás:**



Láthatjuk, hogy egy metszéspont lehet csak, ez pedig az $x = 1$ helyen van, így $x = 2$ az egyetlen megoldás. Ellenőrzés: $\sqrt{3-2} = 2 - 1 \iff 1 = 1$.

- **algebrai megoldás:**

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} &= x-1 && /(\dots)^2 \\ 3-x &= x^2-2x+1 \\ x^2-x-2 &= 0 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

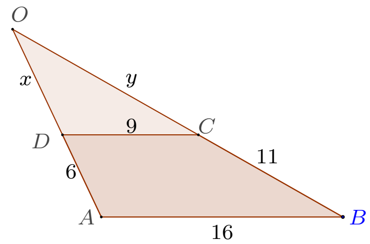
$x_1 = 2$-re kijön az ellenőrzés, lásd a grafikus megoldásnál, így ez megoldás,
$x_2 = -1$ viszont hamis gyök: $\sqrt{3+1} = -1-1 \iff 2 = -2$, így ez nem megoldás.

/ 6+6

---

14. Egy trapéz alakú virágágyást háromszög alakúvá akarnak alakítani úgy, hogy a trapéz szárait meghosszabbítják. Mekkorák lesznek e háromszög oldalai, ha a trapéz két alapja 16 m és 9 m, szárai pedig 6 m és 11 m hosszúak? A végeredményt méterben, egy tizedesjegy pontossággal add meg!

lásd az ábrát:



Alkalmazható a párhuzamos szelőszakaszok tétele, ahol a szelők most a trapéz alapjai, a szögszárak pedig a szóban forgó háromszög oldalai. De akár hasonlóságra is lehet hivatkozni: A $DCO\triangle \sim ABO\triangle$ (hasonlók), mivel minden szögük megegyezik (páronként párhuzamosak az oldalaik.). A hasonlóság miatt így megfelelő oldalaik aránya azonos, azaz

$$\begin{aligned} \frac{x}{9} &= \frac{x+6}{16} & \frac{y}{9} &= \frac{y+11}{16} \\ 16x &= 9(x+6) & 16y &= 9(y+11) \\ 7x &= 54 & 7y &= 99 \\ x &= \frac{54}{7} & y &= \frac{99}{7} \end{aligned}$$

A háromszögek oldalai így $6 + \frac{54}{7} \approx 13.7$ m és $11 + \frac{99}{7} \approx 25.1429$ m.

/ 12

---

15. Egy 4 fiúból és 5 lányból álló társaságban a fiúk is és a lányok is egy-egy baráti társaságot alkotnak, de nincs ismeretség a különböző neműek között.

(a) Kiosztunk nekik egy-egy kártyát úgy, hogy az egymást ismerő embereknek nem osztunk azonos lapot. Legalább hány különböző fajta kártyára van szükségünk?

A feltételek alapján egy fiúnak sem lehet azonos fajta kártyája, és egyetlen lánynak sem lehet azonos kártyája. Mivel lányokból több van, belőlük kell kiindulni. Oda 5 fajta kártya szükséges mindenképpen. Fiúk kaphatják ugyanezeket a kártyákat. Tehát 5.

(b) A társaság moziba megy, és egy sorba kérik a 9 jegyet. Az ismerkedést megkönnyítendő, úgy szeretnének leülni, hogy egymás mellett ne üljön két azonos nemű ember. Hány különböző módon tehetik ezt meg?

Mivel lányból van több, mindig lány-fiú-lány-fiú-lány-fiú-lány-fiú-lány elrendezésben fognak leülni. (Ha ugyanannyian lennének, kétszer annyi lehetőség adódna abból, hogy fiúval vagy lánnyal kezdjük a sort!) Innen adódik, hogy a lehetséges esetek száma $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2880$

(c) Mozi után a fiúk kezet fognak minden fiúval, a lányok pedig puszit adnak lánybarátaiknak. Mennyivel több a puszik száma, mint a kézfogásoké?

feltéve, hogy a lányok pontosan egy puszit adnak egymásnak, az elcsattanó puszik száma: $\frac{5(5-1)}{2} = 10$. A fiúk közti kézfogások száma: $\frac{4(4-1)}{2} = 6$. Tehát 4-gyel több a puszik száma.

$\big/$ 4+5+3

16. Egy matematikai versenyen három feladatot tűztek ki, a 184 versenyző közül mindenki megoldott legalább egy feladatot. Az első példát 90, a másodikat 80, a harmadikat 50 induló oldotta meg helyesen, pontosan két jó feladatmegoldása 32 diáknak volt.

(a) Hány olyan versenyző volt, aki az első feladatot nem oldotta meg?

Mivel 184-en voltak összesen, az első példát pedig 90-en oldották meg, ezért a maradék 184-90= 94 versenyző nem oldotta meg az első feladatot.

(b) Hány olyan versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta?

Először egy informális megoldást közlünk:
Képzeljük el, hogy minden I. feladatmegoldónak adunk egy ügyesvoltál-cetlit (továbbiakban ÜV-cetli).
Ez 90 ÜV-cetlit jelent.
Most adjunk minden II. feladatmegoldónak egy ÜV-cetlit.
Ez 80 db ÜV-cetlit jelent.
Most adjunk minden III. feladatmegoldónak egy ÜV-cetlit.
Ez 50 db ÜV cetlit jelent.
Kiosztottunk tehát 220 db ÜV-cetlit.
Az ÜV-cetlik számát azonban a következőképpen is összeszámolhatjuk:
Biztosan kiosztottunk 184 db ÜV-cetlit, mivel ennyi ember van összesen.
Kiosztottunk aztán további 32 db ÜV-cetlit azoknak, akik pontosan két feladatot oldottak meg. Ez eddig összesen 184+32=216 db.
Akik miatt nem jön ki a 220 db ÜV cetli, azok a három feladatot megoldók.
Nekik 3 cetlijük van, amiből egyet már beleszámoltuk a 184-be. Tehát minden három feladatot megoldónál 2 olyan cetli van, amit nem számoltunk még meg.
4 db cetli hiányzik.
Ezért 2 db ember kell legyen a felelős.

Most egy formális megoldást közlünk, amiben transzparens a szita-formula használata.

A szövegben lévő információ a következő: Legyen A, B és C rendre az első, második és harmadik példát megoldók halmaza. Ekkor

$$\begin{aligned} |A| &= 90 \\ |B| &= 80 \\ |C| &= 50 \\ |A \cup B \cup C| &= 184 \end{aligned}$$

Vezessük be a következő rövidítést: $x \stackrel{\text{def}}{=} |A \cap B \cap C|$.
Vegyük észre, hogy $|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| \geq 32$, ugyanis azokat, akik mindhárom feladatot megoldották, itt 3-szor is számoltuk. Hogy megkapjuk hát azok számát, akik pontosan két feladatot oldottak meg, le kell vonjuk ebből a számból az x háromszorosát:[1]

$$32 = |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 3x \tag{*}$$

Mármost a logikai szita formula (más nevén Poincaré-formula) szerint

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + x \\ 184 &= 90 + 80 + 50 - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + x \\ 184 &= 220 - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + x \qquad (**) \end{aligned}$$

A (*) egyenlet alapján:

$$3x + 32 = |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|$$

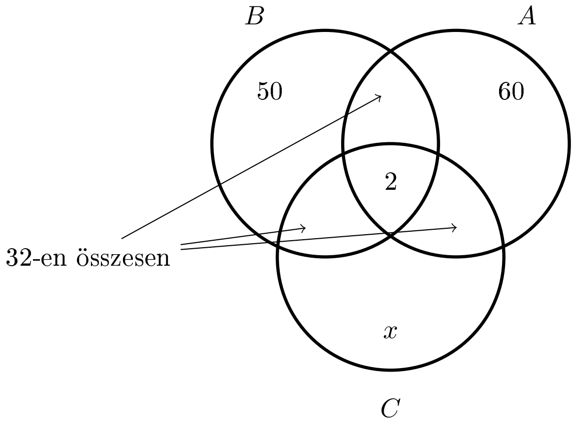
amit behelyettesítve az (**) egyenletbe kapjuk

$$\begin{aligned} 184 &= 220 - (3x + 32) + x \\ 184 &= 220 - 3x - 32 + x \\ 184 &= 188 - 2x \\ 2x &= 188 - 184 = 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

[1] Itt tulajdonképpen a logikai szita formula ötletét használtuk

(c) Ha azt is tudjuk, hogy 60 olyan diák volt, aki csak az első, és 50 olyan diák volt, aki csak a második feladatot oldotta meg, akkor hányan voltak azok, akik csak a harmadik feladatot oldották meg?

Lásd az ábrát:



$A \cup B$ számosságát az előző feladat alapján és a további információkból már tudjuk:

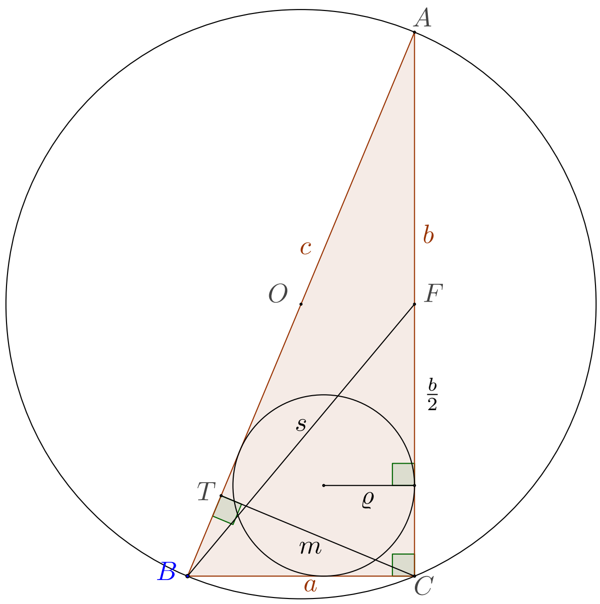
$$|A \cup B| = 50 + 60 + 2 + 32 = 144$$

Innen pedig a csak a 3. feladatot megoldók száma $|A \cup B \cup C| - |A \cup B| = 184 - 144 = 40$.

/ 2+8+7

17. Egy derékszögű háromszög AB átfogója 31,2 cm, egyik befogója BC=12 cm.

Elnevezések az ábrán:



(a) Mekkora az AC befogóhoz tartozó súlyvonal hossza?

$BCF\triangle$-re alkalmazott Pitagorasz-tétel alapján $s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, ahol $a = 12cm$, b pedig kiszámolható az $ABC\triangle$-re alkalmazott Pitagorasz-tételből:

$$b = \sqrt{31.2^2 - 12^2} = 28.8$$

$$s = \sqrt{12^2 + \left(\frac{28.8}{2}\right)^2} \approx 18.7446$$

(b) Számoljuk ki a háromszög átfogóhoz tartozó magasságát!

Ne feledjük, a szokásos 'terület-képlet' egyben magasság-képlet is: Ennek a derékszögű háromszögnek a területét kétféleképpen is kiszámíthatjuk: A befogók által és az átfogóval illetve annak magasságával:

$$T_{ABC\triangle} = \frac{28.8 \cdot 12}{2} = \frac{31.2 \cdot m}{2}$$

Ahonnan

$$m = \frac{2 \cdot 172.8}{31.2} \approx 11.0769 \text{ cm}$$

(c) Adjuk meg a háromszögbe írható legnagyobb kör sugarát!

Hasonló a gondolatmenet: a háromszög területét most a beírható kör sugarával írjuk fel:

$$172.8 = \frac{\varrho \cdot K}{2} \qquad (1)$$

$$\varrho = \frac{2 * 172.8}{31.2 + 12 + 28.8} = 4.8 \qquad (2)$$

(d) Mekkora sugara van a háromszög köré írható körének?

Thalész tételének *megfordítása* alapján egy derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontján helyezkedik el, és így a köré írható sugara természetesen az átfogó fele, $\frac{31.2}{2} = 15.6$ cm lesz.

/4+4+5+4

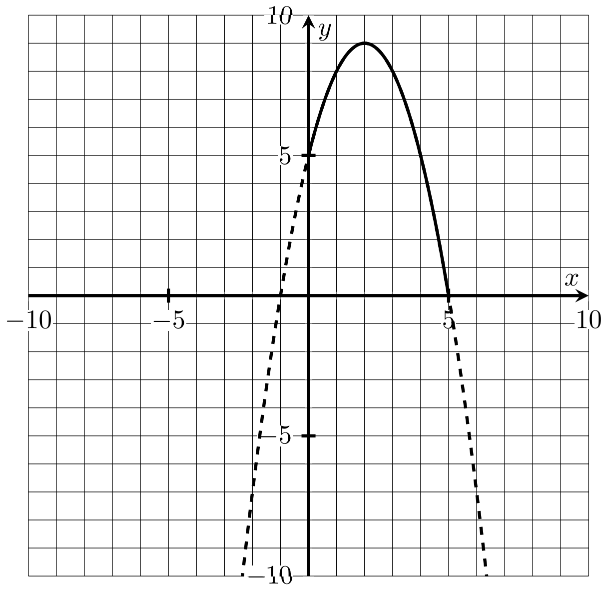
18. Az $f : [0; 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ függvény egy ferdén elhajított testnek a talaj szintjétől mért távolságát írja le, ahol x az eldobás helyétől vízszintesen mért távolságot jelöli. (Az egység mindkét tengelyen 1 méter távolságnak felel meg.)

(a) Ábrázolja a megfelelő koordináta-rendszerben az eldobott test pályáját! (A pálya az $f(x)$ függvény grafikonja.)

Először is teljes négyzetté kell alakítani:

$$-x^2 + 4x + 5 = -(x^2 - 4x) + 5 = -[(x-2)^2 - 4] + 5 = -(x-2)^2 + 4 + 5 = -(x-2)^2 + 9$$

Ezt követően már le lehet rajzolni, de vigyázni kell, hogy csak $D_f = [0; 5]$ értelmezési tartományon belül ábrázoljuk, vagy világosan különböztessük meg ezt a függvényt az egész $\mathbb{R}$-en értelmezettől:



(b) Az eldobás szintjéhez képest milyen magasra emelkedett a test?

4 méter

(c) Mekkora szintkülönbség a test legalacsonyabb és legmagasabb helyzete között?

9 méter

(d) Az eldobás helyéhez képest hol ért földet az elhajított test?

A kérdés nem teljesen egyértelmű: Jelentheti az eldobás pontja és a földreérkezés pontja közti távolságot, ami $5\sqrt{2}$ (5 oldalú négyzet átlója!), vagy jelentheti az x-tengelyre való merőleges vetülettől vett távolságot, ami 5 méter.

$\big/$ 10+2+3+2

2.2. 2014

1. Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 4 cm, illetve 10 cm. Milyen hosszú a harmadik oldal?

/ ?

---

2. Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ és a $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ halmaz. Adjuk meg elemeik felsorolásával az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat!

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$, $A \cap B = \{1; 3; 5\}$, $B \setminus A = \{7; 9\}$

/ ?

---

3. Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4x$ másodfokú függvény zérushelyeit! Számítsa ki a függvény helyettesítési értékét az $x = 2$ helyen!

Az $x^2 - 4x = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ami kiemeléssel rögtön adódik: $x(x-2) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 2$. A függvény helyettesítési értéke a 2 helyen $2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$.

/ ?

---

4. Hányadik hatványra kell emelni a 4^4-t, hogy 8^8 legyen belőle? Válaszát indokolja!

$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$, és $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$, tehát 3. hatványra kell emelni a 4^4-t.

/ ?

---

5. Egy tízfős baráti társaságból öten szeretik a focit, négyen a kosárlabdát, egy valaki mindkét sportágat. A társaságból hányan nem kedvelik az előbbi két labdajáték egyikét sem?

Logikai szitával: 10-(5+4-1) = 2 ember nem kedveli egyiket sem.

/ ?

---

6. Egyszerűsítse a $K(x) = \dfrac{2a^4 + 6a^2}{a^3 + 3a}$ kifejezést, ahol $a \neq 0$!

$$\frac{2a^4 + 6a^2}{a^3 + 3a} = \frac{2a^2(a^2 + 3)}{a(a^2 + 3)} = 2a$$

/ ?

---

7. Van-e olyan p prímszám, hogy a $p + 15$ is prímszám?

Igen, pl. a $p = 2$ esetén $p + 15 = 17$ prímszám.

/ ?

---

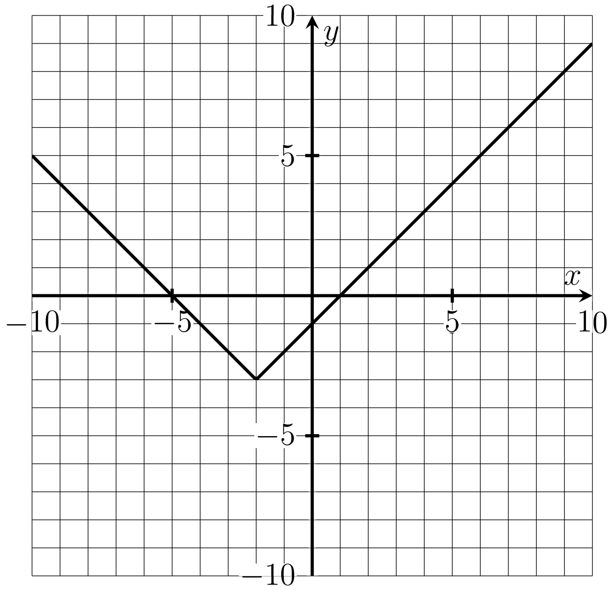
8. Egy derékszögű háromszög befogói 5 cm és 12 cm hosszúak. Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

6,5 cm, mivel a Thálesz-tétel megfordítása szerint egy derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja. (Az (5, 12, 13) pitagoraszi számhármas.)

/ ?

---

9. Az ábrán a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - a| + b$ függvény grafikonjának egy részlete látható. Adja meg a és b értékét!



$a = -2$ és $b = -3$

/ ?

---

10. Adja meg azt az x valós számot, melyre teljesül az $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 2$ egyenlőség!

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 2$$
$$\sqrt{x} = 4$$
$$x = 16$$

Mivel négyzetre emeltük az egyenletet, fontos, hogy ellenőrizzük, nem-e hamis gyök. Fontos az is, hogy ezt ne fejben tegyük: hagyjunk nyomot a papíron a javító tanerőnek is, máskülönben mi alapján bizonyosodhat meg róla, hogy odafigyeltünk a hamis gyökökre?

/ ?

---

11. Bontsa fel a 72000-t két részre úgy, hogy a részek aránya 7:2 legyen!

$7x + 2x = 9x = 72000 \implies x = 8000$, így pedig $7 \cdot 8000 = 56000$ az egyik, és $2 \cdot 8000 = 16000$ a másik rész

/ ?

---

12. Adja meg a $\left]\frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right[$ nyílt intervallum két különböző elemét!

Nem szabad a két végpontot választani, mivel az intervallum nyílt! Legyen így a $\frac{4}{8}$, illetve a $\frac{4{,}5}{8} = \frac{9}{16}$

/ ?

---

13. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet, illetve egyenletrendszert!

$$\frac{2x}{x+6} = x \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} xy & = & 600 \\ (x-10)(y+5) & = & 600 \end{array} \right.$$

/ ?

---

14. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet, illetve egyenletrendszert!

$$\frac{2x}{x+6} = x \qquad\qquad \begin{cases} xy = 600 \\ (x-10)(y+5) = 600 \end{cases}$$

/ ?

15. A munkavállaló nettó munkabérét a bruttó béréből számítják ki levonások és jóváírások alkalmazásával. Kovács úr bruttó bére 2010 áprilisában 200 000 forint volt. A 2010-ben érvényes szabályok alapján különböző járulékokra ennek a bruttó bérnek összesen 17%-át vonták le. Ezen felül a bruttó bérből személyi jövedelemadót is levontak, ez a bruttó bér 127%-ának a 17%-a volt. A levonások után megmaradó összeghez hozzáadtak 15 000 forintot adójóváírásként. Az így kapott érték volt Kovács úr nettó bére az adott hónapban.

(a) Számítsa ki, hogy Kovács úr bruttó bérének hány százaléka volt a nettó bére az adott hónapban!

$\frac{200000-0{,}17\cdot 200000-0{,}17\cdot 1{,}27\cdot 200000+15000}{200000} = \frac{137820}{200000} = 68,91\%$

Kovács úr nettó bére 68,91%-a bruttó bérének.

Szabó úr nettó bére 2010 áprilisában 173 015 forint volt. Szabó úr fizetésénél a levonásokat ugyanazzal az eljárással számították ki, mint Kovács úr esetében, de ebben a hónapban Szabó úr csak 5980 forint adójóváírást kapott.

(b) Hány forint volt Szabó úr bruttó bére az adott hónapban?

$$\begin{aligned} x - 0,17\cdot x - 0,17\cdot 1,27\cdot x + 5980 &= 173015 \\ x - 0,17x - 0.2159x &= 167035 \\ 0,6141x &= 167035 \\ x &= 272000 \end{aligned}$$

Szabó úr bruttó bére 272000 forint volt

/ ?

16. 15. Számológép használata nélkül határozza meg a következő számok legegyszerűbb alakját:

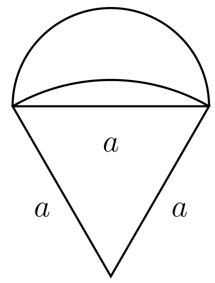
$$\sqrt{\sqrt{57}-\sqrt{48}}\cdot\sqrt{\sqrt{57}+\sqrt{48}}$$

$$\sqrt{\sqrt{57}-\sqrt{48}}\cdot\sqrt{\sqrt{57}+\sqrt{48}}\sqrt{\left(\sqrt{57}-\sqrt{48}\right)\left(\sqrt{57}+\sqrt{48}\right)}\sqrt{57-48} = \sqrt{9} = 3$$

$$\left(\frac{7}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\right)\cdot(13\cdot\sqrt{7}+\sqrt{6})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\right)\cdot(13\cdot\sqrt{7}+\sqrt{6}) &= \left(\frac{7(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{7-6} + \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{7-6}\right)\cdot(13\cdot\sqrt{7}+\sqrt{6}) \\ &= \left(7(\sqrt{7}-\sqrt{6}) + 6(\sqrt{7}+\sqrt{6})\right)\cdot(13\cdot\sqrt{7}+\sqrt{6}) \\ &= \left(7\sqrt{7}-7\sqrt{6}+6\sqrt{7}+6\sqrt{6}\right)\cdot(13\cdot\sqrt{7}+\sqrt{6}) \\ &= \left(13\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\cdot(13\cdot\sqrt{7}+\sqrt{6}) \\ &= 13^2\cdot 7 - 6 = 1183 - 6 = 1177 \end{aligned}$$

$\big/ ?$



17. Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két egyenessel három egybevágó téglalapra bontunk. Egy ilyen téglalap kerülete 24 cm.

(a) Hány cm^2 az eredeti négyzet területe?

Legyen a négyzet oldala x cm. Tehát $2x + 2\frac{x}{3} = 24$, ahonnan $x = 9$ cm, ahonnan a négyzet területe 81 cm^2.

Az ábrán egy ejtőernyős klub kitűzőjének vázlata látható. Az egyik körív középpontja a szabályos háromszög A csúcsa, a másik körív középpontja az A csúccsal szemközti oldal felezőpontja.

(b) Számítsa ki egyenként mindhárom tartomány területét, ha $a = 4$ cm ! Számításait legalább két tizedesjegy pontossággal végezze, és az így kapott eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A szabályos háromszög területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. A körszelet területe megkapható, mint a 60°-os körcikk területének és a háromszögnek a különbsége. A körcikk területe az a sugarú kör területének egyhatoda: $\frac{8}{3}\pi$. Tehát a körszelet területe $\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} \approx 1.4494$ cm^2. A hold-alakú terület megkapható mint az a átmérőjű félkör területének és a körszelet területének a különbsége. $\frac{2^2\pi}{2} - (\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \approx 4.8338$ cm^2.

$\big/ ?$

18. (a) Hány oldalú lehet az a konvex sokszög, amelyik átlóinak száma úgy aránylik az oldalainak számához, mint 5 : 2?

Ha tehát az oldalak száma $2x$, az átlók száma egyszerre lesz $5x$ és $\frac{2x(2x-3)}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2x(2x-3)}{2} &= 5x \\ 2x(2x-3) &= 10x \\ 4x^2 - 6x &= 10x \\ 4x^2 - 16x &= 0 \\ 4x(x-4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Tehát az oldalak száma $2x = 8$.

(b) Melyik az a valós szám, amelyikhez a négyzetét hozzáadva a lehető legkisebb értéket kapjuk? Mennyi ez a legkisebb érték?

A kérdés az, hogy az $f(x) = x^2 + x$ függvény mely x esetén a legkisebb. Teljes négyzetté alakítással (ábrázolható alakra hozással) megtalálhatjuk a minimumpontját:

$$x^2 + x = (x + 0.5)^2 - \frac{1}{4}$$

Eszerint a minimumpontja a függvénynek $x = -0.5$-nél lesz.

$\big/ ?$

19. Háromszor dobunk klasszikus dobókockával, a kapott számokat egymás után leírjuk.

(a) Hány különböző páratlan számot kaphattunk?

Mivel az utolsó helyre csak három számot írhatunk, $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$

(b) Melyek lesznek ezek közül azok, amelyeknek a számjegyei megegyeznek?

Ha az "ezek közül" az páratlanra végződő számokra vonatkozik, akkor akkor az 111, 333 és 555 számok. Ha az "ezek közül" kifejezés az eredeti szövegkörnyezetre hivatkozik ("a kapott számokat egymás után leírjuk"), akkor 111, 222, 333, 444, 555 és 666.

(c) Hány különböző néggyel osztható számot kaphatunk?

Pontosan akkor osztható egy szám néggyel, ha az utolsó két számjegye osztható néggyel. A háromjegyű, 1-6 számokból kirakható számok közül a megfelelő végződések az $X12, X16, X24, X32, X36, X44, X52, X56, X64$, ami 9 db lehetséges végződés. Mindegyiknél az X-et 6-féleképpen tölthetjük ki, így $6 \cdot 9 = 54$-féle ilyen szám van.

(d) Az egyik keresett szám lehet a 624. Hány pozitív osztója van ennek a számnak?

$624 = 2^4 \cdot 3 \cdot 13$, így a pozitív osztók száma $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$

$\boxed{/?}$

2.3. 2013

1. Hány 20000-nél nagyobb, de 30000-nél kisebb természetes szám képezhető a 0, 1, 1, 2, 3 számjegyekből?

Az első számjegy csak a 2 lehet.
A maradék 4 helyre a 0,1,1,3 számok kerülhetnek, ezek $\frac{4!}{2!} = 12$-féleképpen rendezhetők sorba.
12 db ilyen szám van.

/2

---

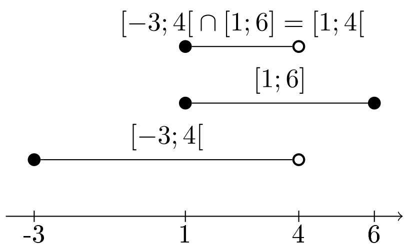
2. Lehet-e két prímszám összege 2013?

Két páratlan prím összege nem lehet, mert azok összege páros.
Mivel páros prím csak a 2 szám van, így 2+2011 így lehet csak. Ez pedig jó felírás, mert 2011 prím. Ez utóbbi egy prímszámtáblázattal ellenőrizhető (függvénytáblázat), vagy annak ellenőrzésével, hogy a $\sqrt{2011}$-nél kisebb prímek (2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43) egyike sem osztja 2011-et.

/2

---

3. Adottak a $[-3;4[$ és $[1;6]$ intervallumok. Add meg a két intervallum metszetét!



/2

---

4. Milyen x természetes számokra igaz, hogy $\dfrac{15}{5-x} > 0$?

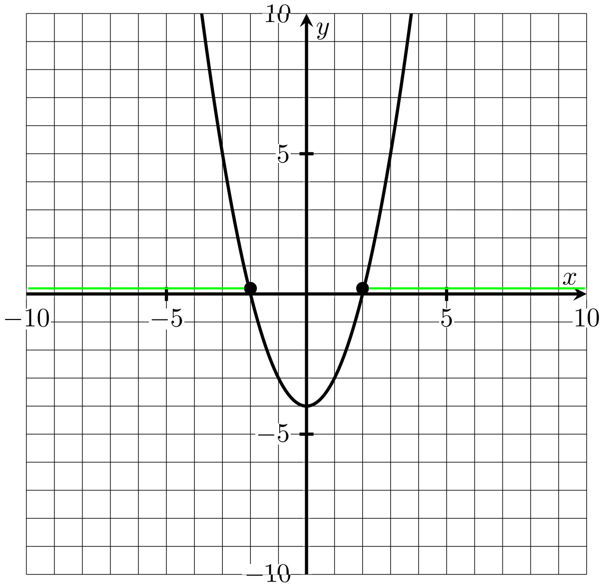
Mivel egy tört pontosan akkor pozitív, ha számlálójának és nevezőjének előjele megegyezik, és mivel $15 > 0$, így az $5 - x > 0 \iff x < 5$ feltételenek eleget tevő természetes számokat keressük: $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

/2

---

5. Határozd meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ függvény értelmezési tartományát!

A kikötés szerint $x^2 - 4 \geq 0$. Mivel a főegyütt ható pozitív, a parabola konvex, és egy gyors szkeccs mutatja is, hogy vannak gyökei (elnézést, géppel csak ilyen ábrát tudok):



Ha megvannak a gyökök, akkor a megoldás a két végtelen fele nyílt, zérushelyeknél zárt (a $\geq$ miatt) intervallum uniója lesz.

Keressük tehát a zérushelyeket. Egy igazi szkeccs alapján ez nem olyan transzparens, mint fentebb, ezért mi gyorsan megoldjuk az $x^2 - 4 = 0$ egyenletet:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Mármost így a megoldáshalmaz: $]\infty; -2] \cup [2; \infty[$

/2

6. 4-nek melyik hatványával egyenlő 2^{30}-nak a 25%-a?

a 25% vétele az $\frac{1}{4}$-el való szorzás, az $\frac{1}{4}$ pedig a 2 -2-ik hatványa: $2^{30} \cdot 2^{-2} = 2^{28} = 2^{2 \cdot 14} = (2^2)^1 4 = 4^{14}$

/2

7. Írj fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, melynek gyökei $x_1 = \dfrac{1}{2}$ és $x_2 = -\dfrac{1}{3}$!

Egy – nem feltéten egész együtthatós – másodfokú egyenletet felírhatunk a gyöktényező alakja által:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) &= 0 \\ x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} &= 0 \\ x^2 - \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x - \frac{1}{6} &= 0 \\ x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} &= 0 \end{aligned}$$

Mármost ez nem egész együtthatós. De szorozzuk meg mindkét oldal 6-tal és az lesz:

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

/3

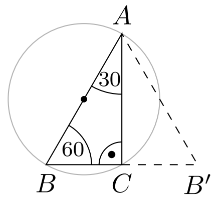
8. Egyszerűsítsd a következő törtet: $\dfrac{x^3 - 9x}{2x^3 - 12x^2 + 18x}$

$$\frac{x(x^2-9)}{2x(x^2-6x+9)} = \frac{x(x-3)(x+3)}{2x(x-3)^2} = \frac{x+3}{2(x-3)}$$

Elegendő volt tehát nevezetes azonosságokra támaszkodni. Ha mégsem jutna ez az eszünkbe, vagy nem találnánk nevezetes azonosságot a számlálóra/nevezőre, akkor oldjuk meg a számláló/nevező nullára rendezett egyenletét másodfokú egyenlet megoldóképletével és írjuk fel az – előjelekre gondosan figyelve – a gyöktényezős alakot. (Ha negatív diszkrimináns miatt az nem megoldható, akkor a kifejezés nem is bontható tovább szorzattá!)

/4

9. Derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm, az adott befogóval szemközti szög 30°. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?



Ez egy szabályos háromszög fele, tehát az átfogó $c = 20cm$. Thálesz tételének megfordítása szerint egy derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontján helyezkedik el, tehát a keresett sugár az átfogó fele lesz: $R = \frac{c}{2} = 10cm$

/2

10. Kristóf az új (7-jegyű) telefonszámát (__47231__) hiányosan adta meg társainak. Annyit elárult azonban, hogy a számjegyek módusza és mediánja is 3, a számjegyek átlaga pedig egész szám, és az utolsó számjegy a legnagyobb. Mennyi Kristóf telefonszáma?

Mivel a leggyakrabban előforduló számjegy a 3 (módusz), kell legyen benne még legalább egy 3-as. Mivel az utolsó számjegy a legnagyobb, ez csak 8 vagy 9 lehet. Mivel az átlag egész, a 8 és 9 közül a $\frac{1+2+3+3+4+7+a}{7} = \frac{20+a}{7}$ képletbe behelyettesítve csak a $\frac{28}{7}$ ad egész számot, tehát az utolsó számjegy 8. A telefonszám tehát 3472318.

/3

11. Oldd meg az $|2x-4| < 6$ egyenlőtlenséget!

$$\begin{array}{ccccc} -6 & < & 2x-4 & < & 6 \\ -2 & < & 2x & < & 10 \\ -1 & < & x & < & 5 \end{array}$$

$x \in \,]-1;5[$

/2

12. Döntsd el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis!

(a) Ha egy deltoid téglalap, akkor négyzet.

Igaz, mert a feltételek szerint minden szöge 90° és van két szomszédos egyenlő oldala.

(b) Ha egy négyszögnek van két derékszöge, akkor húrnégyszög.

Hamis, pl. ha egy derékszöget egy konkáv deltoiddá egészítünk ki. (Konkáv négyszögek köré nem írható kör.)

(c) Van olyan paralelogramma, ami érintőnégyszög.

Igaz, pl. a négyzet ilyen.

(d) Ha egy paralelogrammának van derékszöge, akkor téglalap.

Igaz, mert ennek a négyszögnek minden szöge derékszög kellene legyen.

/4

13. Két pozitív szám különbsége 24, számtani és mértani közepük eltérése 4. Melyik ez a két szám?

A következő kétismeretlenes egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{cases} a-b &= 24 \\ \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} &= 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 24+b \\ \frac{b+24+b}{2}-\sqrt{(24+b)b} &= 4 \\ \frac{2b+24}{2}-\sqrt{24b+b^2} &= 4 \\ b+12-\sqrt{24b+b^2} &= 4 \\ b+8 &= \sqrt{24b+b^2} \\ (b+8)^2 &= 24b+b^2 \\ b^2+16b+64 &= 24b+b^2 \\ 64 &= 8b \\ b &= 8 \end{aligned}$$

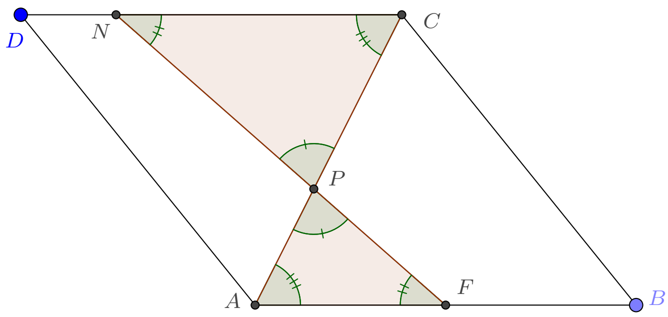
Így pedig visszahelyettesítéssel $a = 32$ jön ki az a-ra. Viszont itt muszáj ellenőriznünk, mivel az egyenlet rendezése során négyzetre emeltük az egyenletet, ami nem ekvivalens átalakítás (lehet hogy hamis gyökünk van).

Ellenőrzés: Számtani közepük 20, mértani közepük $\sqrt{256} = 16$, így ez rendben van.

A két szám tehát a 32 és a 8.

/ 12

14. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának felezőpontja F, CD oldalának D-hez közelebbi negyedelőpontja N. Milyen arányban osztják az AC és FN szakaszok egymást?



Legyen a parallelogramma oldala a. Az $APF\sphericalangle = CPN\sphericalangle$, mivel csúcsszögek, és $AFP\sphericalangle = PNC\sphericalangle$ illetve $FAP\sphericalangle = PCN\sphericalangle$ mivel váltószögek. Mivel az $AFP\triangle$ és $CNP\triangle$ háromszögek megfelelő szögei egyenlőek, ezek hasonló háromszögek. Emiatt a keresett $\frac{AP}{PC}$ és $\frac{FP}{PN}$ arányok is egyenlőek egymással, sőt, a harmadik oldalból felírt aránnyal is: $\frac{AP}{PC} = \frac{FP}{PN} = \frac{AF}{CN} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{4}a} = \frac{2}{3}$

/ 12

15. Határozd meg számológép használata nélkül az alábbi kifejezés pontos értékét!

$$\left(\frac{6}{\sqrt{7}+2}-\frac{9}{\sqrt{7}-2}+\frac{36}{\sqrt{7}-1}\right)\left(\sqrt{175}+4\right)$$

Először gyöktelenítjük a nevezőket:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{6(\sqrt{7}-2)}{7-4}-\tfrac{9(\sqrt{7}+2)}{7-4}+\tfrac{36(\sqrt{7}+1)}{7-1}\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \text{gyöktelenítés} \\ &\left(\tfrac{6(\sqrt{7}-2)}{3}-\tfrac{9(\sqrt{7}+2)}{3}+\tfrac{36(\sqrt{7}+1)}{6}\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \\ &\left(\tfrac{12(\sqrt{7}-2)}{6}-\tfrac{18(\sqrt{7}+2)}{6}+\tfrac{36(\sqrt{7}+1)}{6}\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \text{Közös nevezőre hozzuk az első három törtet} \\ &\left(\tfrac{12(\sqrt{7}-2)-18(\sqrt{7}+2)+36(\sqrt{7}+1)}{6}\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \text{Összeadjuk őket} \\ &\left(\tfrac{12\sqrt{7}-24-18\sqrt{7}-36+36\sqrt{7}+36}{6}\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \text{Összevonjuk a számlálót} \\ &\left(\tfrac{30\sqrt{7}-24}{6}\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \text{Egyszerűsítünk} \\ &\left(5\sqrt{7}-4\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \text{mivel } 5\sqrt{7}=\sqrt{25\cdot 7}=\sqrt{175}, \\ &\left(\sqrt{175}-4\right)\left(\sqrt{175}+4\right) && \text{ez már egy nevezetes azonosság} \\ &175-16 && \\ &159 && \end{aligned}$$

/ 12

16. 15) Adott az $f(x) = ax^2 - 2ax + 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény.

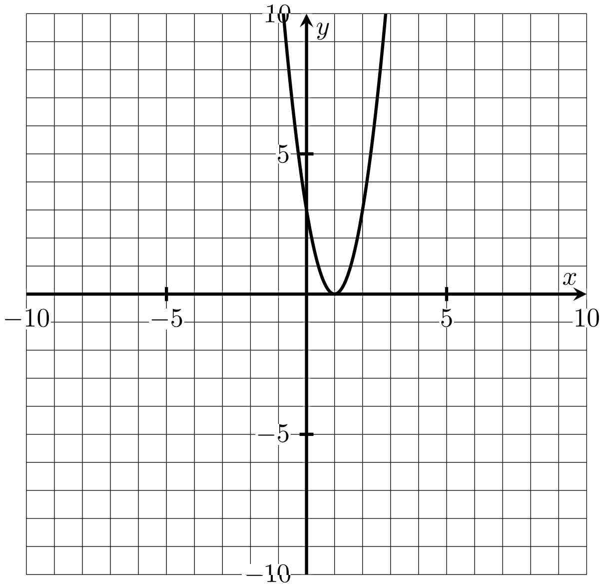
a Hogyan válasszuk meg az a paraméter értékét, hogy a függvény grafikonja érintse az x tengelyt?

Másodfokú függvény ($a \neq 0$) pontosan akkor érinti az x tengelyt, ha 1 zérushelye van, azaz a diszkrimináns, jelen esetben $(-2a)^2 - 4 \cdot a \cdot 3$, nulla:

$$\begin{aligned} 4a^2 - 12a &= 0 \\ 4a(a-3) &= 0 \\ a_1 = 0 & \\ a_2 = 3 & \end{aligned}$$

Viszont az $a_1 = 0$ nem másodfokú függvényt, hanem konstans függvényt (az $f(x) = 3$-at) eredményez, amely messze elkerüli az x tengelyt, így csak a_2 felel meg a kikötéseknek. A keresett függvény tehát $3x^2 - 6x + 3$.

Ellenőrizni ezt úgy tudjuk, hogy teljes négyzetté alakítással megpróbáljuk ábrázolni: $3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$, ez pedig a háromszorosára nyújtott parabola eltolása az x tengelyen pozitív irányba. Függőleges irányú eltolást nem tartalmaz, tehát ugyanúgy érinti az x tengelyt, ahogy a standard x^2 függvény:



b Milyen paraméterértékek esetén lesz a függvénynek két zérushelye?

Ehhez az kell, hogy a diszkrimináns pozitív legyen, tehát $D > 0$. Ez a fentiek alapján oda vezet, hogy az

$$4a(a-3) > 0$$

másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Mivel a^2 főegyütthatója a felbontás után 4, azaz egy pozitív szám lenne, a parabolánk konvex lesz (felfele nyíló parabola), így az ezt az egyenletet kielégítő megoldások halmaza a két zérushely által megadott két, végtelen fele nyílt intervallum uniója lesz. Tehát az egyenletnek pontosan akkor lesz két megoldása, ha

$$a \in]-\infty; 0[\cup]3; \infty[$$

c Milyen paraméterértékek esetén lesz a függvénynek maximuma?

Akkor lesz a függvénynek maximuma, ha konkáv (lefelé nyíló parabola), a függvény pedig pontosan akkor konkáv, ha a főegyütthatója negatív, azaz $a < 0$ esetén.

| /17 |

17. Derékszögű háromszög kerülete 36 egység, a beírható kör sugara 3 egység. Mekkorák a háromszög oldalai?

Pitagorasz tétele alapján tudjuk, hogy a kerület $K = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 36$. Ebben azonban két ismeretlen is előfordul, így egy másik, más forrásból származó, ugyanezen változókat tartalmazó kétismeretlenes egyenletet is kell találnunk. A háromszög oldalai előfordulnak a derékszögű háromszög területének $\frac{ab}{2}$ képletében is, amely területet most más képlet alapján is kiszámolhatunk; a háromszög területe felírható a beírt kör sugarának $\varrho = 3$ és $K = 36$ kerületének segítségével:

$$T = \frac{\varrho \cdot K}{2} = \frac{3 \cdot 36}{2} = 54$$

Tehát azt tudjuk az oldalakról, hogy $\frac{ab}{2} = 54$. Feladatunk tehát megoldani a követező kétismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{2} &= 54 \\ a + b + \sqrt{a^2+b^2} &= 36 \end{aligned}$$

(Itt észrevehetjük, hogy ez egy olyan kétismeretlenes egyenlet, amiben bármilyen érték is jöjjön ki a-ra és b-re, az a-k helyére és b-t és a b-k helyére a-t helyettesítve az egyenletek ugyanazok maradnak. Ez azzal jár, hogy majd egy a-ra vagy b-re felírt másodfokú egyenlet eredményeként adódó a_1 és a_2 megoldás valójában a és b lesznek (azaz $b_1 = a_2$ és $b_2 = a_1$).)

$$\begin{aligned}
ab &= 108 && \text{(első egyenletből)}\\
b &= \frac{108}{a} && \text{(első egyenletből)}\\
\sqrt{a^2+b^2} &= 36-(a+b) && \text{(második egyenletből)}\\
a^2+b^2 &= 36^2 - 2\cdot 36\cdot(a+b)+(a+b)^2 && \text{(egyenlet két oldalának négyzetre emelése)}\\
a^2+b^2 &= 1296-72a-72b+a^2+2ab+b^2 && (-a^2-b^2)\\
0 &= 1296-72a-72\cdot\frac{108}{a}+216 && \text{(behelyettesítés)}\\
0 &= 1512-72a-\frac{7776}{a} && \text{(összevonás)}\\
0 &= 1512a-72a^2-7776 && \text{(a-val végigszorzunk)}\\
a^2-21a+108 &= 0 && \text{(-72-vel osztunk)}\\
a_{1,2} &= \frac{21\pm\sqrt{21^2+4\cdot 1\cdot 108}}{2}\\
&= \frac{21\pm\sqrt{441-432}}{2}\\
&= \frac{21\pm 3}{2}\\
a_1 &= 12\\
a_2 &= 9
\end{aligned}$$

Innen visszahelyettesítve az első egyenletbe (az előző megjegyzés alapján várható módon) $b_1 = 9$ és $b_2 = 12$ lesz. Tehát noha két megoldáspárunk van, ez ugyanazt a háromszöget adja vissza, mégpedig azt a derékszögű háromszöget, amelynek oldalai 9, 12 és 15. (fontos, hogy az átfogót is kérdezte a feladat! De ez csak egy Pitagoraszi számhármas).

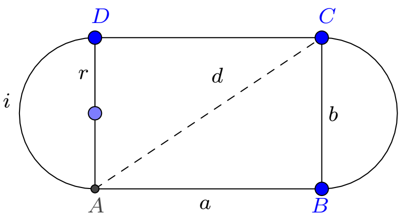
Az ellenőrzés kijön.

/17

18. A 400 m hosszú futópályát úgy alakítják ki, hogy a téglalap alakú labdarúgópálya rövidebb oldalára kifelé félköröket szerkesztenek. A téglalap oldalainak aránya 2:3.

(a) Milyen hosszú a futópálya két egyenes szakasza?

Egy ábra:



a 400 méter úgy adódik össze, hogy összeadjuk a két félkörív és a keresett a oldal hosszának kétszeresét, ahol a körívek r sugara a téglalap másik oldalának a fele. A 2:3 arányról szóló információt a következőképpen írhatjuk egyenletbe: $a = \frac{3}{2}\cdot 2r = 3r$.

$$\begin{aligned}
2r\pi + 2\cdot 3r &= 400\\
2r\pi + 6r &= 400\\
r(2\pi+6) &= 400\\
r &= \frac{400}{2\pi+6} = \frac{200}{\pi+3} \approx 32.5648 \text{ m}
\end{aligned}$$

Tehát ennek háromszorosa, $a = 97.6944$ m méter hosszú a futópálya két egyenes szakasza.

(b) A téglalap két szemközti csúcsán egy-egy versenybíró áll. Hogyan kellene megválasztani a téglalap méreteit, hogy két szemközti oldalára kifelé félköröket szerkesztve a futópálya hossza 400 m legyen, de a két bíró a lehető legközelebb álljon egymáshoz?

Bárhogy válasszuk is az a és b oldalakat, a futópálya kerülete állandó kell legyen:

$$400 = 2 \cdot \frac{a}{2}\pi + 2b = a\pi + 2b$$

mármost célunk az a-tól és b-től függő $d(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$ átló értékének minimalizálása. Az előző egyenlet alapján ez egy változóval is kifejezhető: mivel $a\pi + 2b = 400 \iff b = \frac{400-a\pi}{2}$, és így a következő $d(a)$ függvény minimumpontjának a megtalálása a cél:

$$d(a) = \sqrt{a^2 + \left(\frac{400-a\pi}{2}\right)^2}$$

Mivel a négyzetgyökfüggvény $\sqrt{x}$ szigorúan monoton nő, ennek pontosan ott lesz minimuma, ahol az $f(a) = a^2 + \left(\frac{400-a\pi}{2}\right)^2$ függvénynek van minimuma. Ezt a minimumpontot teljes négyzetté alakítással találhatjuk meg. (**Figyelem, a most következő levezetés jóval egyszerűbb, ha $\pi \approx 3,14$-gyel és számológéppel számolunk! Hasonlóképpen, mivel a másodfokú függvény minimumpontjának csak az első koordinátája a kérdés, igazából elegendő az elsőfokú tag együtthatóját meghatározni. Így is elhanyagolható a számolás egy jelentős része.**)

$$\begin{aligned}
f(a) &= a^2 + \frac{400^2 - 2\cdot 400 \cdot a\pi + a^2\pi^2}{4} \\
&= a^2 + \frac{160000 - 800a\pi + a^2\pi^2}{4} \\
&= \frac{4a^2 + 160000 - 800a\pi + a^2\pi^2}{4} \\
&= \frac{a^2(4+\pi^2) - 800a\pi + 160000}{4} \\
&= a^2\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) - 200a\pi + 40000 \\
&= \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)a^2 - 200\pi a + 40000 \\
&= \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)\left[a^2 - \frac{200\pi}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}a\right] + 40000 \\
&= \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)\left[\left(a - \frac{100\pi}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right)^2 - \left(\frac{100\pi}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right)^2\right] + 40000 \\
&= \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(a - \underbrace{\frac{100\pi}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}}_{\substack{x\text{-tengelyen} \\ \text{jobbra lépés}}}\right)^2 \underbrace{- \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{100\pi}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right)^2 + 40000}_{\substack{y\text{-tengelyen felfele lépés,} \\ \text{de ez most teljesen mindegy}}}
\end{aligned}$$

Tehát $f(a)$, és így $d(a)$ értéke akkor minimális, ha $a = \frac{100\pi}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)} = \frac{100\pi}{\frac{4+\pi^2}{4}} = \frac{400\pi}{4+\pi^2}$

(ez algebrailag is látszik: a négyszetes kifejezés értéke akkor minimális, más szóval nulla, ha a benne lévő kifejezés nulla.)
Így akkor minimális a két bíró közti távolság, ha az a oldal egész pontosan $\frac{400\pi}{4+\pi^2}$ m, megközelítőleg pedig 90.6037 méter.

/17

2.4. 2012

1. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

   (a) Egy háromszög köré írható kör középpontja mindig valamelyik súlyvonalra esik.

   Hamis: Ehhez szükséges, hogy a háromszög hegyes-vagy derékszögű legyen. Tompaszögű háromszögek esetében a körülírt kör középpontja kívül van a háromszögön, és így nem lehet rajta a súlyvonalon.)

   (b) Egy négyszögnek lehet 180°-nál nagyobb belső szöge is.

   Igen, pl. egy konkáv deltoid esetében.

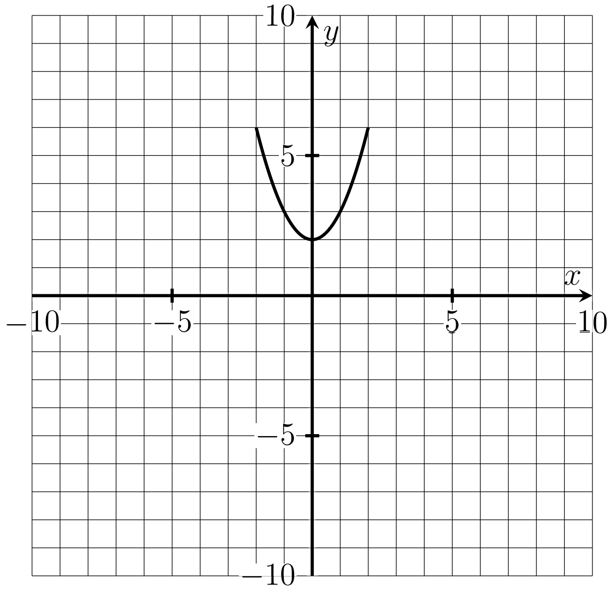
   (c) Minden trapéz paralelogramma.

   Igen, mivel minden parallelogrammának van párhuzamos oldalpárja.

/3

---

2. Az ábrán egy, a $[-2; 2]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.



Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát!

   (a) $x \mapsto x^2 - 2$

   (b) $x \mapsto x^2 + 2$

   (c) $x \mapsto (x + 2)^2$

   A megoldás az $x \mapsto x^2 + 2$.

/2

---

3. Adja meg az előző feladatban adott, $[-2; 2]$ intervallumon értelmezett függvény értékkészletét!

$R_{x^2+2} = [2; 6]$

/2

---

4. Egy kör sugara 6 cm. Számítsa ki ebben a körben a 120°-os középponti szöghöz tartozó körcikk területét!

$$\frac{T_{\text{körcikk}}}{6^2\pi} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3} \iff T_{\text{körcikk}} = 12\pi \approx 37,6991$$

/2

5. Egy 5 cm sugarú kör középpontjától 13 cm-re lévő pontból érintőt húzunk a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza? Írja le a számítás menetét!

Az érintőszakasz, a sugár, és a pontot a középponttal összekötő szakasz derékszögű háromszöget alkotnak. Pitagorasz tétel alapján 12cm hosszú lesz a kérdéses szakasz (Pitagoraszi számhármas).

/3

6. Melyek azok az x valós számok, amelyekre nem értelmezhető az $\frac{1}{x^2-9}$ tört? Válaszát indokolja!

Pontosan akkor nem értelmezhető a fenti kifejezés, ha $x^2 - 9 = (x-3)(x+3) = 0$, azaz amikor $x = 3$ vagy $x = -3$.

/2

7. Egy farmernadrág árát 20%-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25%-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja!

Mit jelöl az ismeretlen: Jelölje x a farmernadrág árát.

Az egyenlet és megoldása:

$$\begin{aligned} 0.75 \cdot 1.20x &= 3600 \\ x &= 4000 \end{aligned}$$

Szöveges válasz: Tehát 4000 forintba került eredetileg a farmernadrág.

/3

8. Az A és a B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \setminus B = \{5,7\}$. Adja meg az A és a B halmaz elemeit!

Venn diagramot érdemes rajzolni. A halmaz elemei előállnak, mint a metszet és a különbség uniója: $A = \{1,2,5,7\}$, B pedig minden más unióbeli elem és a metszetbeli elemek: $B = \{1,2,3,4,6\}$

/2

9. Egy 10 tagú csoportban mindenki beszéli az angol és a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélik mindkét nyelvet? Válaszát indokolja számítással, vagy szemléltesse Venn-diagrammal!

Venn-diagramot érdemes rajzolni, ügyelve arra, hogy 'kijöjjön a 10 ember'. Legyen A az angolul beszélők halmaza, B a németül beszélők halmaza a csoportban. A logikai szita alapján

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ 10 &= 6 + 8 - |A \cap B| \\ |A \cap B| &= 6 + 8 - 10 = 4 \end{aligned}$$

Tehát 4-en beszélik mindkét nyelvet.

/2

10. Egyszerűsítse az $\frac{a^2b-2ab}{ab}$ törtet, ahol az a, b valós számok és $ab \neq 0$!

$$\frac{a^2b - 2ab}{ab} = \frac{ab(a-2)}{ab} = a - 2$$

/3

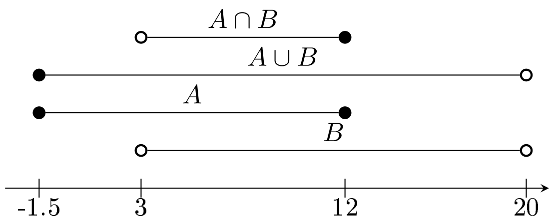
11. Egy kisüzem 6 egyforma teljesítményű gépe 12 nap alatt gyártaná le a megrendelt csavarmennyiséget. Hány ugyanilyen teljesítményű gépnek kellene dolgoznia ahhoz, hogy ugyanennyi csavart 4 nap alatt készítsenek el?

Kevesebb gép tovább dolgozik, így a gépek száma és a gyártáshoz szükséges napok száma között fordított arányosság áll fent. Ha 6 gép 12 nap alatt gyártja le a szükséges csavarmennyiséget, akkor ahhoz, hogy harmadannyi idő alatt végezzenek, 3-szer annyi gépre, tehát 18 gépre van szükség.

/3

---

12. Az A és a B halmazok a számegyenes intervallumai: $A = [-1,5; 12]$, $B =]3; 20[$. Ábrázolja számegyenesen az intervallumokat és adja meg intervallum jelöléssel az $A \cup B$ és az $A \cap B$ halmazokat!



/4

---

13. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

(a) $x^2 - (x-1)^2 = 2$

$$\begin{aligned} x^2 - (x-1)^2 &= 2 \\ x^2 - (x^2 - 2x + 1) &= 2 \\ x^2 - x^2 + 2x - 1 &= 2 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

(b) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$

$$\begin{aligned} 5 - x &= \sqrt{2x^2 - 71} \\ \Longrightarrow \quad 25 - 10x + x^2 &= 2x^2 - 71 \\ -x^2 - 10x + 96 &= 0 \\ x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot 96}}{-2} \\ &= \frac{10 \pm 22}{-2} \\ x_1 &= 6 \\ x_2 &= -16 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:
A 6 hamis gyök, nem megoldása az eredeti egyenletnek: $5 - 6 \neq \sqrt{72 - 71}$
A -16 megoldása az eredeti egyenletnek: $5 + 16 = \sqrt{512 - 71}$

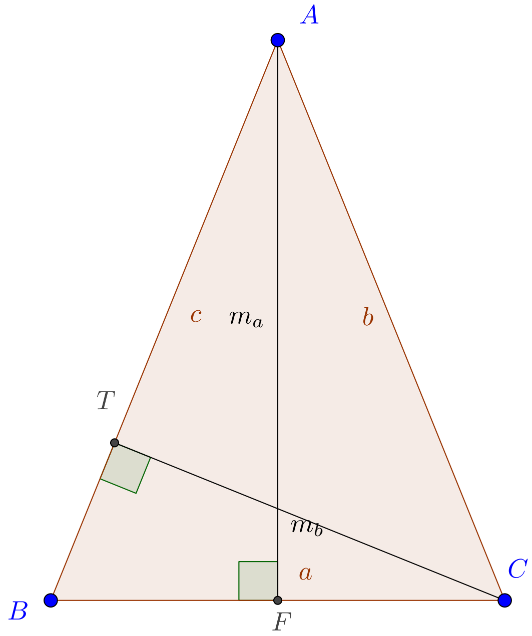
/12

---

14. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, a szárai 8 cm hosszúak.

(a) Mennyi a háromszög területe?

Elnevezésekért lásd az ábrát:



A háromszög területéhez szükség van az egyik oldali, pl. az alaphoz tartozó magasságra. Tudjuk, hogy mivel a háromszög egyenlő szárú, ez a magasság az alapot felezi, így keletkezik az ABF derékszögű háromszög, melynek átfogója 8 cm, befogója $\frac{6}{2} = 3$ cm, befogója pedig a keresett magasság. Pitagorasz tétele alapján ez a magasság $m_a = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} \approx 7.4162$ cm. A terület ez alapján $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{6\sqrt{55}}{2} = 3\sqrt{55} \approx 22.2486$

(b) Milyen hosszú részekre bontja a szárakat a hozzájuk tartozó magasság?

A keresett szakaszok kiszámolhatók a szárakhoz tartozó magasság ismeretében (Pitagorasz-tétel a 6 cm-es alappal mint átfogóval), így megkeressük a magasságot. Ez kiszámolható a területképletből és az előző feladatban kiszámolt területből:

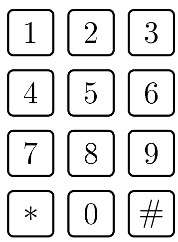
$$\begin{aligned} T = 3\sqrt{55} &= \frac{8m_b}{2} \\ 3\sqrt{55} &= 4m_b \\ m_b &= \frac{3\sqrt{55}}{4} \approx 5.5621 \text{ cm} \end{aligned}$$

Innen a már említett Pitagorasz-tétel alapján: $x = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3\sqrt{55}}{4}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{9 \cdot 55}{16}} = \sqrt{5.0625} = 2.25$ cm a rövidebbik szakasz, és $8 - 2.25 = 5.75$ cm a hosszabbik szakasz.

/ 12

---

15. Zsuzsi 7-jegyű mobiltelefonszáma különböző számjegyekből áll, és az első számjegy nem nulla. Amikor Ildikó felhívta Zsuzsit, feltűnt neki, hogy a mobiltelefonján a három oszlop közül csak kettőnek a nyomógombjaira volt szükség. Ezekre is úgy, hogy először az egyik oszlopban levő nyomógombokat kellett valamilyen sorrendben megnyomnia, ezután pedig egy másik oszlop nyomógombjai következtek valamilyen sorrendben. Hány ilyen telefonszám lehetséges?



Mivel 7-jegyű a telefonszám, ezért a két oszlop közül az egyik a 4 elemű középső oszlop kell legyen. Bármelyik oszlopot is választjuk másodiknak (2 lehetőség), további két lehetőség adódik, hogy a rövid vagy a hosszú oszloppal kezdjük a számbeütést.

- ha a hosszúval kezdjük, akkor – mivel nullával nem kezdődhet a szám – az azon lévő számokat $3 \cdot 3!$-féleképpen lehet lenyomni (sorba rendezni), majd utána a rövidebbik oszlopról ugyanezt $3!$-féleképpen lehet befejezni, tehát ebben az esetben $3 \cdot 3! \cdot 3!$-féleképpen lehet beütni a számokat.

- ha a rövidről kezdődik a telefonszám, akkor nem kell aggódni a 0 miatt: $3! \cdot 4!$-féleképpen lehet beütni a számokat

Összesen tehát a lehetőségek száma:

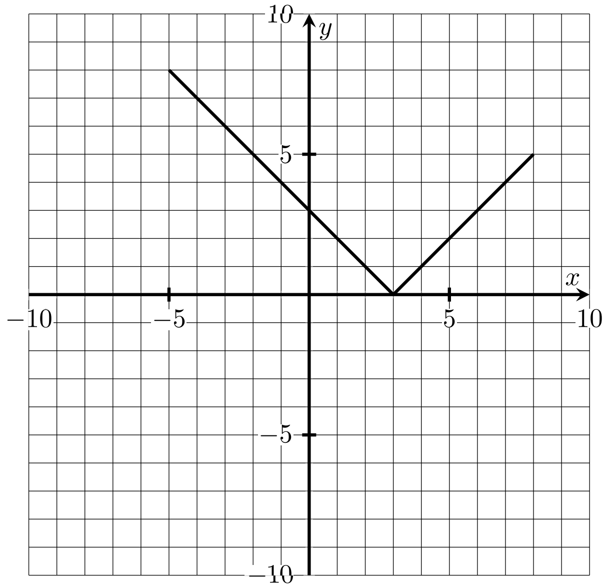
$$2(3 \cdot 3! \cdot 3! + 3! \cdot 4!) = 504$$

/12

16. (a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $K(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető!

A kifejezés akkor nem értelmezhető, ha $x^2 - 6x + 9 < 0$, így ezt a másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldjuk. A keresett függvény konvex (minimuma, nem pedig maximuma van, ‘ ‘ ‘felfele néző’ ’ ’), így a zérushelyek közti nyílt intervallum lesz azon számok halmaza, amelyekre az értéke negatív lesz. Megoldóképletre azonban most nincs feltétlen szükség, mivel ez az $(x-3)^2$, ez pedig pontosan akkor nulla, ha $x - 3 = 0$, azaz $x = 3$. Tehát mivel pontosan egy gyöke van, a függvény grafikonja (ami most egy parabola) érinti az x-tengelyt, tehát egyetlen értékre sem lesz kisebb, mint nulla. Tehát a gyök alatti kifejezés bármely x esetén nemnegatív, így a gyökös kifejezés mindig értelmezhető, és a valós számok azon legbővebb részhalmaza, amelyen $K(x)$ értelmezhető, $\mathbb{R}$.

(b) Ábrázolja a $[-5; 8]$ intervallumon értelmezett $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt!



(c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan?

i. Az f értékkészlete: $[0; 5]$.

Ez hamis, mivel pl. $f(-4) = 7$. (Az értékkészlete valójában $R_f = [0; 8]$)

ii. Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

Ez hamis, mivel $f(-3) = 6$, de pl. $f(0) = 3$. (A minimumát valójában az $x = 3$ helyen veszi fel.)

iii. Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4; 8]$ intervallumon.

Ez igaz, indoklásként lásd az ábrát.

/17

17. A következő kettő kérdés ugyanarra a 20 oldalú szabályos sokszögre vonatkozik.

(a) Mekkorák a sokszög belső szögei? Mekkorák a külső szögei?

A 20 oldalú szab. sokszög belső szögeinek összege $(20-2) \cdot 180° = 3240°$ (az átlók ugyanis $n-2$ db háromszögre bontják a sokszöget), és ez a szögösszeg a szabályosság miatt egyenlő arányban oszlik szét a 20 szög között; mindegyik belső szöge $162°$. Mindegyik külső szöge $180 - 162 = 18°$.

(b) Hány átlója, illetve hány szimmetriatengelye van a sokszögnek? Hány különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból?

Az átlóinak száma $\frac{20(20-3)}{2} = 170$.
Mivel páros számú oldala van, a szimmetriatengelyek pontosan a szemközti cúscsokat összekötő átlókra és az oldalak felezőpontjait összekötő szakaszokra illeszkednek. Mind a két típusból 10-10 darab van, tehát összesen 20db szimmetriatengely van.

Egy A csúcsból $20 - 3 = 17$ db átló húzható, mivel azonban az A-n áthaladó szimmetriatengely nem csak a sokszöget, de azok átlóit is átlókba viszi, így az 1 db szimmetriatengelyként funkcionáló átlón kívüli 16 átló közül 1-1 mindig egyenlő hosszú. Ezt leszámítva azonban a szomszédos csúcstól a szemközti csúcsig haladva egyre nőnek az átlók hosszai, tehát 8 db különböző hosszúságú átlót találhatunk, és ehhez adódik még az 1 db szimmetriatengely a leghosszabb átló; tehát 9 db különböző hosszúságú átlót húzhatunk egy csúcsból.

(c) Egy másik konvex sokszög átlóinak száma nyolcvannyolccal több, mint ahány oldalú. Hány oldala van ennek a sokszögnek?

Ismeretlenek meghatározása: Legyen ennek a konvex sokszögnek az oldalainak a száma n. Ekkor az átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$.
Egyenlet felírása: Az állítás szerint

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 88$$

Egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-3)}{2} &= n + 88 \\
n(n-3) &= 2n + 176 \\
n^2 - 3n &= 2n + 176 \\
n^2 - 5n - 176 &= 0 \\
n_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-176)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{5 \pm 27}{2} \\
n_1 &= 16 \\
n_2 &= -11
\end{aligned}$$

Az n_2 gyöktől eltekintünk, a megoldást ugyanis a pozitív egész számok között keressük. A megoldás tehát $n = n_1 = 16$.
Ellenőrzés: $\frac{16(16-3)}{2} = \frac{16 \cdot 13}{2} = \frac{208}{2} = 104 \qquad (= 16 + 88)$
Szöveges válasz: Tehát a szóban forgó sokszög egy 16-oldalú konvex sokszög.

/17

18. Egy kávéforgalmazó cég kétfajta kávéból készíti a keverékeit. Ha az A típusú kávéból 20 kg-ot és a B típusúból 30 kg-ot kevernek össze, a keverék egységára kilogrammonként 1860 Ft lesz. Ha az A típusú kávéból 30 kg-ot, a B típusúból 20 kg-ot kevernek össze, akkor a keverék egységára 1740 Ft lesz.

(a) Mennyi az A, illetve B típusú kávék kilogrammonkénti egységára?

Ismeretlenek meghatározása: Jelölje az A és B típusú kávék kilogrammonkénti egységárát rendre a és b.
Egyenletrendszer felírása: Az első két mondathoz egy két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer tartozik:

$$\begin{cases} 20a + 30b &= 50 \cdot 1860 \quad (1) \\ 30a + 20b &= 50 \cdot 1740 \quad (2) \end{cases}$$

(Az első esetben az 50 kilogramm esetén kevert anyag ára $20a + 30b$, és ez nem más, mint az 1860 50-szerese. A második egyenlet hasonlóképp írható fel.)
Egyenletrendszer megoldása: A két egyenletet számos ekvivalens módon fel lehet írni, mint ahogy rendezni is nagyon sokféleképpen lehet. Mi most az egyenlő együtthatók módszerével oldjuk meg:

$$\begin{array}{rcll}
60a + 90b &=& 3 \cdot 93000 = 279000 & 3 \cdot (1) \\
60a + 40b &=& 2 \cdot 87000 = 174000 & 2 \cdot (2) \\
50b &=& 105000 & 3 \cdot (1) - 2 \cdot (2) \\
b &=& 2100 & \\
20a + 30 \cdot 2100 &=& 93000 & (1)\text{-ba visszahelyettesítve } b\text{-t} \\
20a &=& 30000 & \\
a &=& 1500 &
\end{array}$$

Ellenőrzés: a másik egyenletbe (is): $30 \cdot 1500 + 20 \cdot 2100 = 45000 + 42000 = 87000$.

Szöveges válasz: Tehát A típusú kávé kilogrammonkénti egységára 1500 forint, a B típusú kávé egységára pedig 2100 forint.

(b) 60 kg 2000 Ft egységárú keveréket akarnak előállítani. Hány kilogrammot keverjenek bele az A, illetve a B típusú kávéból?

Ismeretlenek meghatározása: Jelölje x és y rendre az A és B típusú kávékból keverendő kávé mennyiségét. (Az y igazából egyből kifejezhető $60 - x$ alakban is, külön egyenlet bevezetése nélkül is.)
Egyenletrendszer felírása: (Felhasználjuk az előző feladatból kapott egységárakat.)

$$\begin{cases} x \cdot 1500 + y \cdot 2100 = 60 \cdot 2000 & (3) \\ x + y = 60 & (4) \end{cases}$$

Egyenletrendszer megoldása: A (4) egyenletből y-t kifejezve $y = 60 - x$ adódik és ezt behelyettesítve a (3) egyenletbe kapjuk:

$$\begin{aligned} x \cdot 1500 + (60 - x) \cdot 2100 &= 120000 \\ 1500x + 126000 - 2100x &= 120000 \\ -600x &= -6000 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

és így $y = 60 - 10 = 50$. **Ellenőrzés:** $15000 + 105000 = 120000$

Szöveges válasz: Tehát 10 kg A típusú kávét kell 50 kg B típusú kávéval elkeverni, hogy 60 kg 2000 forintos egységárú keverékét kapjunk.

/17

2.5. 2011

1. Alakítsd szorzattá a következő kifejezést (amennyire csak lehet): $5a^2 - 20$

$$5a^2 - 20 = 5(a^2 - 4) = 5(a-2)(a+2)$$

/2

2. Gyöktelenítsd a következő törtek nevezőjét! Ha lehet egyszerűsíteni, egyszerűsíts!

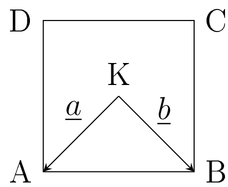
(a) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(b) $\dfrac{4}{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

$$\frac{4}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{4(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{2})(2\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{4(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{4\cdot 5 - 2} = \frac{4(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{18} = \frac{2(2\sqrt{5}+\sqrt{2})}{9}$$

/1+2

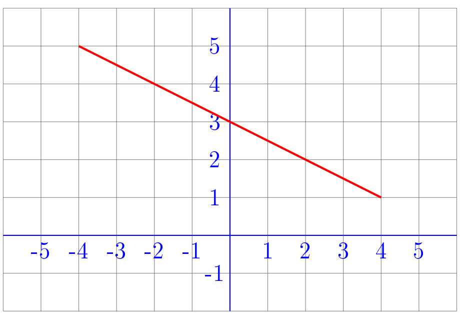


3. Az ábrán látható $ABCD$ négyzet K középpontjából A-ba mutat az $\underline{a}$, B-be mutat a $\underline{b}$ vektor. Fejezd ki $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok segítségével $\overrightarrow{KC}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokat!

$\overrightarrow{KC} = -\underline{a}$ és $\overrightarrow{CD} = \underline{a} - \underline{b}$ (a különbségvektor a két vektor végpontja közt halad, és a kisebbítendő fele mutat!)

/2

4. Az ábrán egy a [-4; 4] intervallumon értelmezett függvény grafikonját látod. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!



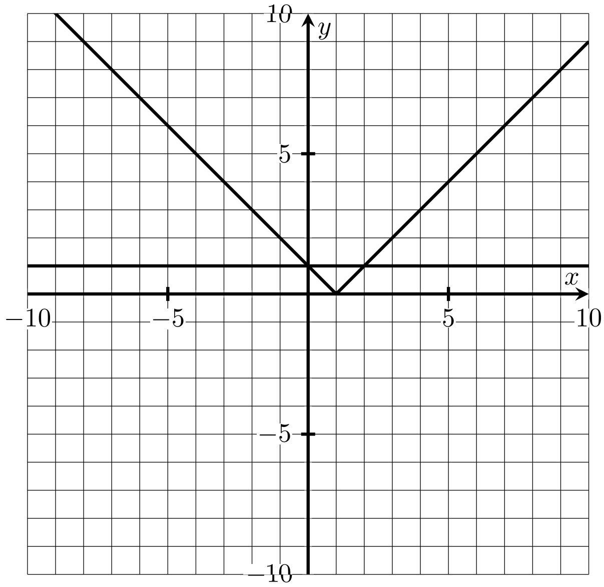
A függvény a 4-nél metszi az y tengelyt és 2-t lép jobbra, míg 1-et le, így a meredeksége $-\frac{1}{2}$. A hozzárendelési szabálya: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

/2

5. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1$

a gyök alatt az $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ kifejezést találjuk, így az egyenlet tulajdonképpen

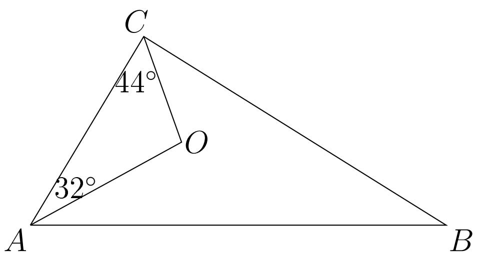
$$\sqrt{(x-1)^2} = 1$$
$$|x-1| = 1$$



Ezt megoldhatjuk grafikusan (még koordinátarendszer nélkül) is:
De a definíció alapján, esetszétválasztással algebrai úton is: Ez csak úgy teljesülhet hogy $x-1 \geq 0$ és $x-1=1 \iff x=2$, vagy $x-1<0$ és $-(x-1)=1 \iff -x+1=1 \iff x=0$.

/3

6. Az ábrán az ABC háromszöget és beírható körének O középpontját látjuk. Mekkora a B csúcsnál lévő külső szög?



A beírható kör középpontját a szögfelezők metszéspontjai adják, így az ábrán jelölt CO és AO szakaszok szögfelezők. Ennek megfelelően $ACB\sphericalangle = 2 \cdot ACO\sphericalangle = 2 \cdot 44 = 88$ és $CAB\sphericalangle = 2 \cdot CAO\sphericalangle = 2 \cdot 32 = 64$. A külsőszög-tétel alapján a B csúcsnál lévő szög a két nem mellette fekvő belső szög összege, tehát $152°$. (De persze kijön két 180-fokból történő kivonás után is, ami tulajdonképpen a külsőszög-tétel bizonyítása. . .)

/2

7. Iskolánkba 841 tanuló jár. A következő állításban melyik az a legnagyobb szám, amelyet a pontok helyébe írhatsz?
„Biztosan van legalább . . . tanuló, aki ugyanabban a hónapban ünnepli a születésnapját."

Skatulya-elv! 12 hónap van egy évben, így ennyi skatulyába kell osztani a 841 tanulót. A 841-et 12-vel maradékosan osztva 70 a végeredmény, így 70 mennyiségű gyereket lehet szétosztani úgy a hónapok között, hogy a lehető legkevesebb legyen az egy hónapban egyszerre születésnapot ünneplők száma. De $70 \cdot 12 = 840$, így mivel a fennmaradó 1 gyerek valamely hónapban meg kellett szülessen, abban a hónapban 71 gyerek fogja egyszerre ünnepelni a születésnapját. A válasz tehát 71.

/2

8. Írd fel egyetlen gyökjel segítségével: $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$

$\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3a^2}} = \sqrt[6]{a^5}$

/2

9. Egy 7 fős társaság moziba megy. Hányféleképpen ülhetnek le sorban az egymás melletti székekre, ha

(a) Peti és Petra egymás mellé szeretnének ülni?

Képzeljük el úgy, hogy Petit és Petrát összetekerjük egy kötéllel és ők lesznek PetiPetra, egy személyben. Így valójában 6 székre kell leültetnünk egy 6 fős társaságot, ami $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Ez azonban nem az összes lehetőség, mivel Petit és Petrát PetraPeti-ként, ellenkező sorrendben is összetekerhettük volna, így a végleges válasz: $2 \cdot 6! = 1440$-féleképpen ülhetnek le úgy, hogy Peti és Petra egymás mellett ülnek.

(b) Fanni nem akar a szélén ülni?

Ha Fanni nem akar a szélén ülni, akkor a 7 helyet az elejével meg a végével kezdve töltjük fel emberekkel, az elején Fannit nem számolva:

- Az első helyre 6 embert ültethetünk
- Az utolsó helyre 5 embert ültethetünk
- A második helyre (újra) 5 embert ültethetünk, mivel most már Fannit is leültethetjük,
- A harmadik helyre 4 embert ültethetünk,...

Tehát $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 6! = 3600$-féleképpen ültethetünk ebben az esetben.

/4

10. (a) 5-nek hányadik hatványa az $\frac{1}{125}$? **Válasz: $\underline{-3}$-ik hatványa.**

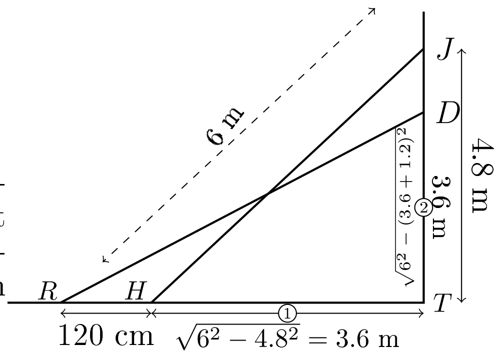
(b) 3-nak hányadik hatványa a $3^2(3^4)^{-1}$? **Válasz: $\underline{-2}$-ik hatványa.**

utóbbihoz indoklás:

$$3^2(3^4)^{-1} = 3^2 3^{-4} = 3^{2-4} = 3^{-2}$$

/2

11. Rómeó egy 6 méter hosszú létra segítségével akart bemászni Júlia ablakpárkányán, amely 4,8 m magasan volt. Sajnos a létrát 120 cm-rel hátrébb támasztotta ki, mint kellett volna, így tévedésből a Dadus ablakpárkányán mászott be. Milyen magasan van a Dadus ablakpárkánya?



Lásd az ábrát.

/3

12. Egy konvex sokszögnek 9 átlója van. Hány átlója van a 2-vel nagyobb oldalszámú konvex sokszögnek?

Ha nem találjuk ki, hogy 9 átlóval csak a konvex hatszög rendelkezik, akkor ezt ki lehet számítani az $\frac{n(n-3)}{2} = 9$ képletből is:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 9n(n-3) \quad = 18n^2 - 3n - 18 = 0n_{1,2} \quad = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = n_1 = 6n_2 \quad = -3$$

És itt -3-at a feladat kontextusa alapján figyelmen kívül hagyhatjuk, így a hatszögről kell legyen szó. A 2-vel több oldalú konvex sokszög így a 8-szög, amelynek $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ átlója van.

/3

13. Egy dobókockával egymás után négyszer dobunk. A kapott számokat egymás mellé írva

(a) Hány olyan eset lehet, amikor a dobott számok között nincs két egyforma?

Mivel a kikötés szerint nincs két egyforma, ez megegyezik azzal a feladattal, hogy hányféleképpen lehet 6 db 1-6-ig számokkal megjelölt számkártyákból 4-jegyű számokat kirakni. A válasz így: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$-féleképpen lehet kirakni a számokat.

(b) Hány esetben kaphatunk páros számot?

Páros egy szám akkor, ha az utolsó számjegye a $0, 2, 4, 6, 8$ számok valamelyike. Mármost egy kockán csak az $1 - 6$ számjegyek szerepelhetnek, így az utolsó helyen csak a 2,4,6 szám, tehát összesen 3 db szám fordulhat elő (ez az utolsó helyre összes dobható szám fele), így a megoldás – mivel most nincs az a kikötés, hogy különbözőek a dobott számok – $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 648$ db lehetőség van

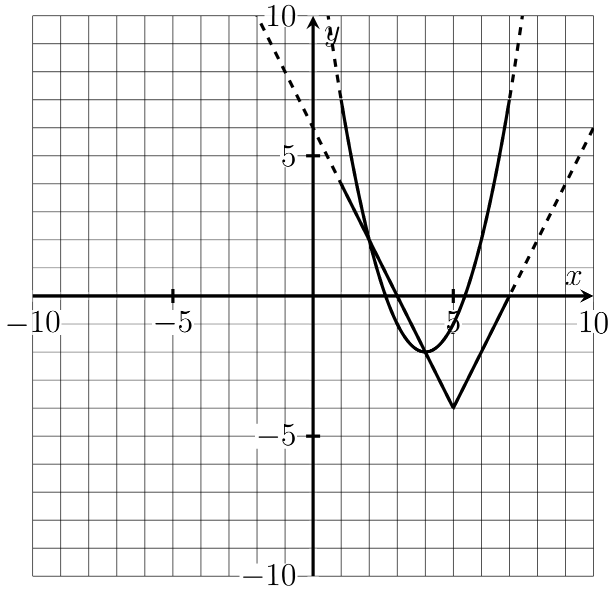
(c) Hány esetben kaphatunk 3-mal osztható számot?

Pontosan akkor osztható a dobott szám 3-mal, ha a számjegyek összege osztható 3-mal. Az ötlet most a következő: A szám leírásakor elegendő az utolsó számjegyet úgy megválasztani, hogy a számjegyek összege hárommal oszthatóvá váljon. Az első három számjegyet $6 \cdot 6 \cdot 6$-féleképpen választhatjuk ki. Ezen számok alapján a számjegyek összege 0, 1 vagy 2 maradékot fog adni 3-mal osztva. Ez alapján választhatjuk a 4. számot: ha az első három számjegy összege 3-mal osztva

- 0 maradékot ad, akkor 3-at vagy 6-ot,
- 1 maradékot ad, akkor 2-őt vagy 4-et,
- 2 maradékot ad, akkor 1-et vagy 5-öt,

választhatunk. Mindegyik esetben tehát 2 db szám választható az első három számhoz, így összesen tehát $6^3 \cdot 2$-féleképpen dobhatunk 3-mal osztható számot.

/12



14. Adottak az $f(x) = 2\,|x-5| - 4$ és $g(x) = x^2 - 8x + 14$ függvények.

(a) Ábrázold őket az $[1; 7]$ intervallumon!

Az f abszolútérték-függvény esetében 5-öt kell jobbra és 4-et lefele transzformálni az $|x|$ függvényt. A kettes szorzó az abszolútérték előtt 2-es meredekséget kölcsönöz a függvénynek, így alakult ki a jobboldali ábra.

Az g függvény esetében teljes négyzetté alakítjuk a $x^2 - 8x + 14$ kifejezést:

$$x^2 - 8x + 14 = (x-4)^2 - 16 + 14 = (x-4)^2 - 2$$

Így az x^2 parabolát 4-gyel jobbra és 2-t lefele transzformáljuk. **Fontos, hogy a szaggatott vonal nem tartozik a rajzolandó függvénygrafikonokhoz, de ez nem jelenti azt, hogy a megadott intervallum a fenti függvények értelmezési tartománya; azokat később a c) feladatban majd az összes valós számok halmazán kell majd megoldani.**

(b) Add meg f zérushelyét és g minimumát!

f zérushelyei az x-tengely-metszetek, azaz $x_1 = 3$ és $x_2 = 7$.

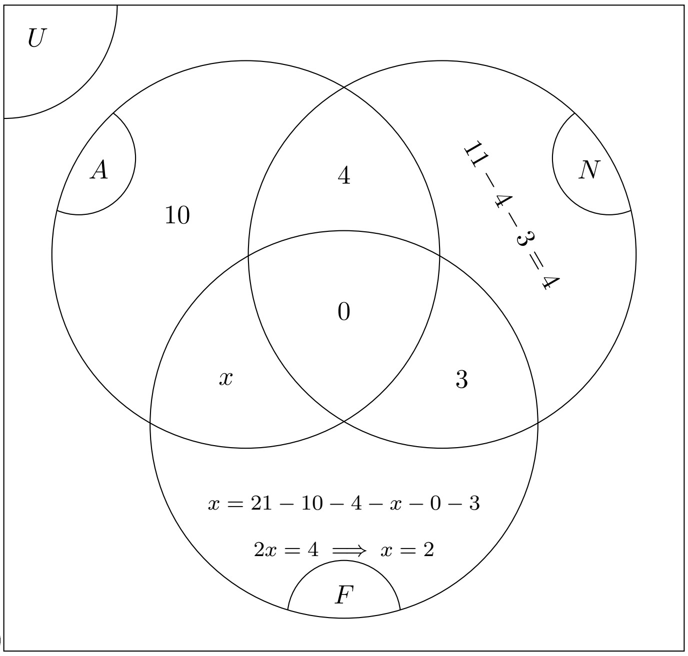
g minimuma az x-tengely $x = 4$ pontja alatt van, így g minimuma $x = 4$-nél van. (Fontos, hogy nem -2-nél, mivel nem az y-tengelyt kell nézni, hanem csak az x-tengelyt, mint általában a függvényeknél minden “Hol van…” kérdésre egy “$x = \ldots$” a válasz.)

(c) A grafikon alapján határozd meg az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

A kérdés az, hogy az x-tengelyen nézett értelmezési tartomány mely pontjai fölött van az f alacsonyabban, mint a g? (A szaggatott vonalat tehát nem szabad nézni.) A két grafikon az x-tengely $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ pontjai fölött metszi egymást, és az ezek közti rész az egyetlen olyan intervallum, ahol az állítás **nem** igaz. A megoldáshalmaz tehát: $\mathbb{R} \setminus]2; 4[\; = \;]-\infty; 2] \cup [4; \infty[$ (félig zárt intervallumok, mivel $\geq$ volt a kérdésben. Ha $f(x) > g(x)$ lett volna a kérdés, a megoldáshalmaz két nyílt intervallum uniója lett volna.)

/12

15. Egy 28 fős osztályban összeszámolták, kinek hány nyelvvizsgája van, és a következőket állapították meg: Angol és német 4 főnek, német és francia 3 főnek, csak angol 10 főnek van. A német nyelvvizsgával rendelkezők száma 11. Angolul vagy franciául 21 diák beszél. A csak francia nyelvvizsgával rendelkező diákok száma ugyanannyi, mint ahány diáknak angol és francia nyelvvizsgája is van. Nincs olyan tanuló, aki mindhárom nyelven beszél.



A szövegben szereplő információk, előfordulási sorrendben:

$$
\begin{array}{lrcl}
(0) & |U| & = & 28 \\
(1) & |A \cap N| & = & 4 \\
(2) & |N \cap F| & = & 3 \\
(3) & |A \setminus (N \cup F)| & = & 10 \\
(4) & |N| & = & 11 \\
(5) & |A \cup F| & = & 21 \\
(6) & |F \setminus (N \cup A)| & = & |A \cap F| = x \\
(7) & |A \cap B \cap C| & = & 0
\end{array}
$$

Venn-diagram felrajzolásának egy lehetséges sorrendje: A (7) alapján a középső szektorba 0 kerül. Ez alapján az (1) és (2) információk alapján kitölthető az északi az $(A \cap N) \setminus F$ és $(N \cap F) \setminus A$ szektorok, ahova rendre 4 és 3 kerül. Ezek alapján a (4)-es információ felhasználható, hogy megkapjuk a csak németül tanulók számát. A (3)-as információ alapján beírhatjuk a 10-est. A (6)-os információ alapján a két hiányzó szektorba egy-egy x-et tehetünk. Az (5)-ös információ alapján $10 + 4 + x + 0 + 3 + x = 21$, ahonnan $x = 2$ adódik.

(a) Hányan vizsgáztak angolból, illetve franciából?

angolból 16-an, franciából 7-en.

(b) Hány főnek nincs nyelvvizsgája az osztályból?

Itt használjuk a (0) információt: $28 - 10 - 4 - 4 - 2 - 0 - 3 - 2 = 3$ embernek nincs nyelvvizsgája.

(c) Hány olyan tanuló van, akinek van angol, de nincs francia nyelvvizsgája?

$10 + 4 = 14$ főnek van angol de nincs francia nyelvvizsgája.

/12

16. Egy vállalkozó három fodrászüzletet üzemeltetett. Fejlesztési terveihez pontos adatokra volt szüksége, ezért egy héten (7 napon) keresztül felmérte az egyes üzletek forgalmát a vendégek kora és neme szerinti megoszlásban. Az eredményt az alábbi táblázat mutatja:

		1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet
Felnőttek	Nők	116	88	102
	Férfiak	98	64	72
Gyerekek	Lányok	34	36	48
	Fiúk	30	28	32

(a) A három üzlet teljes forgalmának hány százalékát teszik ki a nőnemű vendégek?

A három üzlet teljes forgalma $116 + 98 + 34 + 30 + 88 + 64 + 36 + 28 + 102 + 72 + 48 + 32 = 748$ fő.

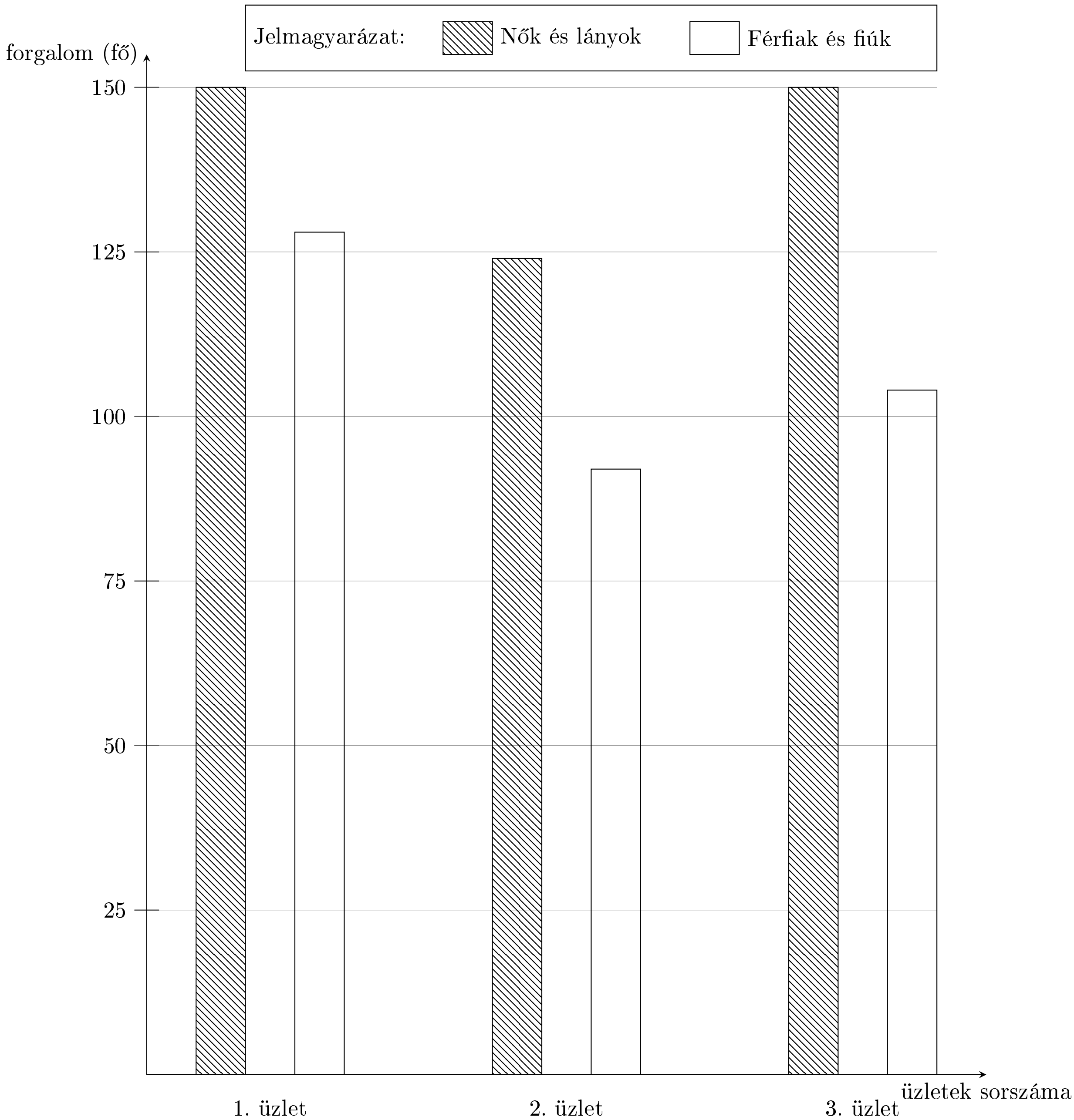
A nőnemű vendégek a nők és lányok: $116 + 88 + 102 + 34 + 36 + 48 = 424$ fő. Tehát a forgalom $\frac{424}{748}$ részét, $56,68\%$ százalékát teszik ki a nőnemű vendégek.

(b) Szemléltesd oszlopdiagramon az egyes üzletek forgalmát nemek szerinti bontásban!

A nemek szerinti bontáshoz talán nem haszontalan új táblázatot alkotni:

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet
Nők és lányok	$116+34=150$	$88+36=124$	$102+48=150$
Férfiak és fiúk	$98+30=128$	$64+28=92$	$72+32=104$

Legyen A a dolgozatlapon az erre a diagramra szánt méret magassága. Úgy alakítjuk majd a diagramunkat, hogy a legmagasabb oszlop, a 150-es oszlop ezt teljesen kitöltse. Háromszor két darab oszlopot fogunk rajzolni, ezekből kettőt-kettőt egymás mellé. A páros diagramok egyike a női, a másika a férfi vásárlók számát fogja mutatni. Az 1., 2. és 3. oszloppárjainak magassága:
1. üzlet oszlopai: $150 \cdot \frac{A}{150} = A$ és $128 \cdot \frac{A}{150}$.
2. üzlet oszlopai: $124 \cdot \frac{A}{150}$ és $92 \cdot \frac{A}{150}$.
3. üzlet oszlopai: $150 \cdot \frac{A}{150} = A$ és $104 \cdot \frac{A}{150}$.
Mellékelünk is egy illusztrációt, ahol A-t 15 cm-nek választottuk. (Azért 15 cm-t választottunk, mert így 1 fő 1 mm lesz, ami jelentősen megkönnyíti a diagram szerkesztését)



Mire kell figyelni? Mire kell pontot levonnunk?

- Egyenletes (lineáris) legyen a skálázás; jelen esetben a 25, 50, 75... vonások között egyenlő távolság legyen.
- Az oszlopok legyenek megcímkézve vagy legyenek valamilyen színnel, mintázattal megkülönböztetve, de ez esetben legyen jelmagyarázat, ami tisztázza, hogy melyik oszlop mit ábrázol!
- tengelyfeliratok, itt pl. az "üzletek sorszáma" és a "forgalom", ami mutatja, hogy miről szól a diagram. Lehetőleg a mértékegység is szerepeljen!

(c) Számítsd ki az üzletek átlagos forgalmát!

Az üzletek forgalmához összegezni kell az oszlopokat, majd az így keletkező 3 összeget kell átlagolni. Persze ez ugyanaz, mintha a fent kiszámolt 748 főt osztanánk 3 felé: Az üzletek átlagos forgalma $\frac{748}{3} = 249,\dot{3}$ fő.

(d) Az 1. üzlet a hét egy napján, a 2. üzlet a hét három napján, a 3. üzlet a hét két napján zárva tartott műszaki okok miatt. Ezt tudva melyik üzlet napi átlagos forgalma a legnagyobb?

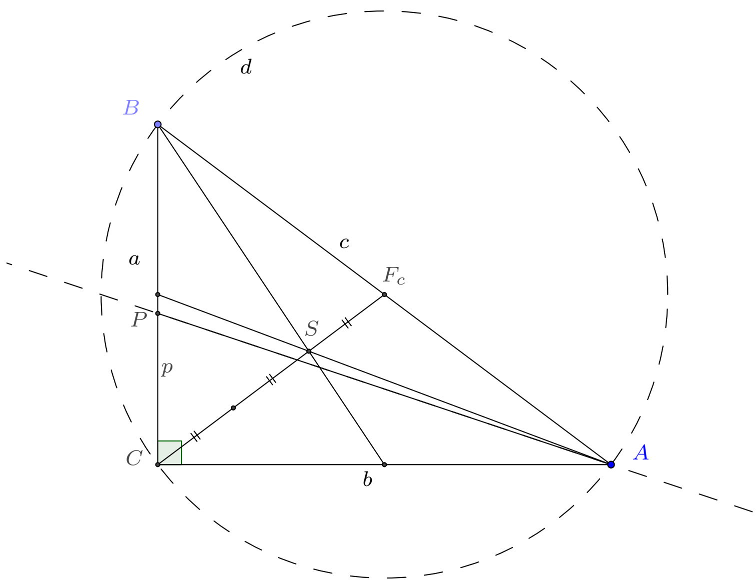
Az első üzlet forgalma $118 + 98 + 34 + 30 = 280$ fő, ami 6 napra oszlik el, így az első üzlet napi átlagos forgalma $\frac{280}{6} = 46,\dot{6}$ fő.
A második üzlet forgalma $88 + 64 + 36 + 28 = 216$ fő, ami 4 napra oszlik el, így a második üzlet napi átlagos forgalma $\frac{216}{4} = 54$ fő.
A harmadik üzlet forgalma $102 + 72 + 48 + 32 = 254$ fő, ami 5 napra oszlik el, így a harmadik üzlet napi átlagos forgalma $\frac{254}{5} = 50,8$ fő.
Tehát a második üzlet napi átlagos forgalma a legnagyobb.

/17

17. Derékszögű háromszög magasságpontjának és súlypontjának távolsága 5 egység.

(a) Milyen messze van a köré írható kör középpontja a súlyponttól?

A feladat lényegesen egyszerűbb, mint amilyennek tűnik: Mivel egy derékszögű háromszögben a magasságvonalak valójában a befogók, a magasságpont is a befogók metszéspontja, azaz a derékszögnél lévő C csúcs. A keresett pont, azaz a köré írható kör középpontja, szintén mivel derékszögű háromszögről van szó, Thálesz tételének megfordítása értelmében az átfogó F_c felezőpontja. A súlyvonalak a csúcsokat a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszok, amelyeknek az S súlypont a csúcsoktól távolabbi harmadolópontja. Ez alapján a válasz egyszerű: $2,5$ egység, lásd az ábrát.



(b) A háromszög legkisebb oldala 9 egység. Milyen hosszú a legkisebb szög szögfelezőjének a háromszögbe eső szakasza?

Jelölje a legkisebb oldalt a. Ekkor, mivel kisebb oldallal szemben kisebb szög van, a vele szemben lévő α szög kell legyen a legkisebb szög. Jelölje P a szögfelező a oldallal vett metszéspontját. Jelölje p a PC szakaszt. Az $APC\triangle$ szintén derékszögű háromszög, így a b és p szakaszok ismeretében Pitagorasz-tétellel kiszámítható a keresett szögfelező. A b szakasz most is kiszámítható: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, ahol c a Thálesz tétel megfordítása értelmében a köré írható kör átmérője is egyben, a kör sugarát pedig már az előző feladatban lényegében kiszámítottuk: 7,5 egység, így $c = 15$ egység. Mivel $a = 9$, Pitagorasz tétel alapján $b = 12$ egység (Pitagoraszi számhármas).

Keressük tehát a p szakasz hosszát. Először is a P pont az a oldalt p és $9 - p$ hosszú szakaszokra bontja. A szögfelezőtétel szerint a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, tehát

$$\begin{aligned}\frac{p}{b} &= \frac{9-p}{c}\\ \frac{p}{12} &= \frac{9-p}{15}\\ 15p &= 12(9-p)\\ 15p &= 108 - 12p\\ 27p &= 108\\ p &= 4\end{aligned}$$

És így a keresett szögfelező hossza $x = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \approx 12,6491$ egység

$\boxed{\quad / 17}$