1. ELŐADÁS

KAUZÁLIS STRUKTURÁK

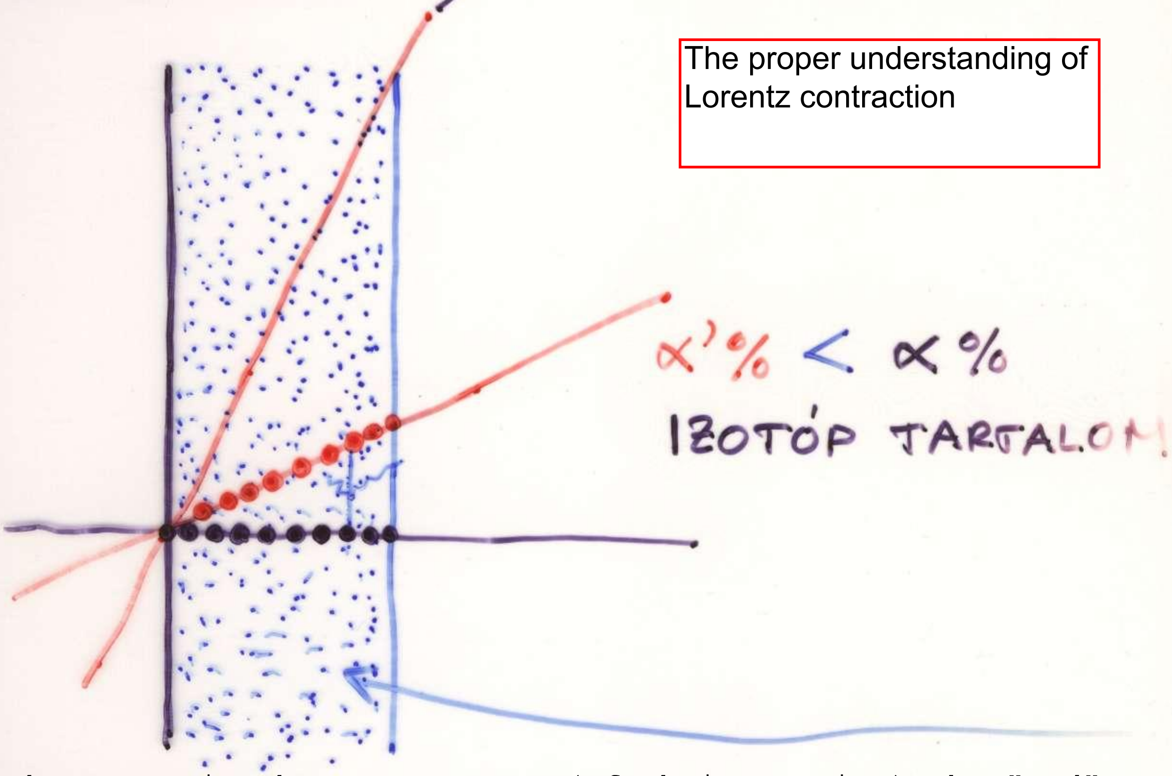
Causal Structures

A, A SPEC. REL. NÉHÁNY TANULSÁGA.

The lesson from SR

ALAP PÉLDA:
(A LORENTZ-KONTRAKCIÓ HELYES ÉRTELMEZÉSE:)

The proper understanding of Lorentz contraction



For the two observers in the same moment (of their meeting) the "rod" means diferent objects, in the sense that they are different sets of events.

A KÉT MEGFIGYELŐ SZÁMÁRA, UGYANABBAN A PILLANATBAN, UGYANOTT NEM UGYANAZON ESEMÉNYEK ÖSSZESSÉGE A "RÚD".

What is the "rod" then in relaity?

MI AKKOR A RÚD A VALÓSÁGBAN?

HÁT EZ!

It is this (a 4-dimensional object)

1, A TÉR ÉS IDŐ FOGALMA RELATÍV, AZAZ VONATKOZTATÁSI RENDSZERTŐL FÜGG...

Space and time are relative to the reference frame

2, AMI ABSZOLÚT, VAGYIS FÜGGETLEN A MEGFIGYELŐTŐL, AZ A 4-DIMENZIÓS TÉRIDŐ

What is absolute is the 4-dimensional spacetime

NEWTON	→	EINSTEIN
ABSZOLÚT TÉR (absolute space)	→	ABSZOLÚT TÉRIDŐ (absolute spacetime)
GEOMETRIAI PONT (geometrical point)	→	ESEMÉNY (event)

3, A TÉRIDŐ KOORDINÁTÁKNAK NINCS ABSZOLUT JELENTÉSE.

Spacetime coordinates have no absolute meanings

4, A FIZIKAI VILÁG ELEMEI TEHÁT A 4-DIMENZIÓS TÉRIDŐBEN VOLTAK-VANNAK-LESZNEK...

Physical objects exist in the 4-dimensional spacetime timelessly

5, ALAPFOGALOM: AZ ESEMÉNY

basic notion: event

A TÉRIDŐ AZ ESEMÉNYEK ÖSSZESSÉGE.

spacetime is the manifold of events

6, A TÉRIDŐ STRUKTÚRÁJÁNAK LEGFONTOSABB RÉSZE A KAUZÁLIS SZERKEZET:

the most essential part of the structure of spacetime is its causal structure

B. A MINKOWSKI-TÉRIDŐ KAUZÁLIS SZERKEZETE.

The causal structure of Minkowskian spacetime

Minkowski spacetime

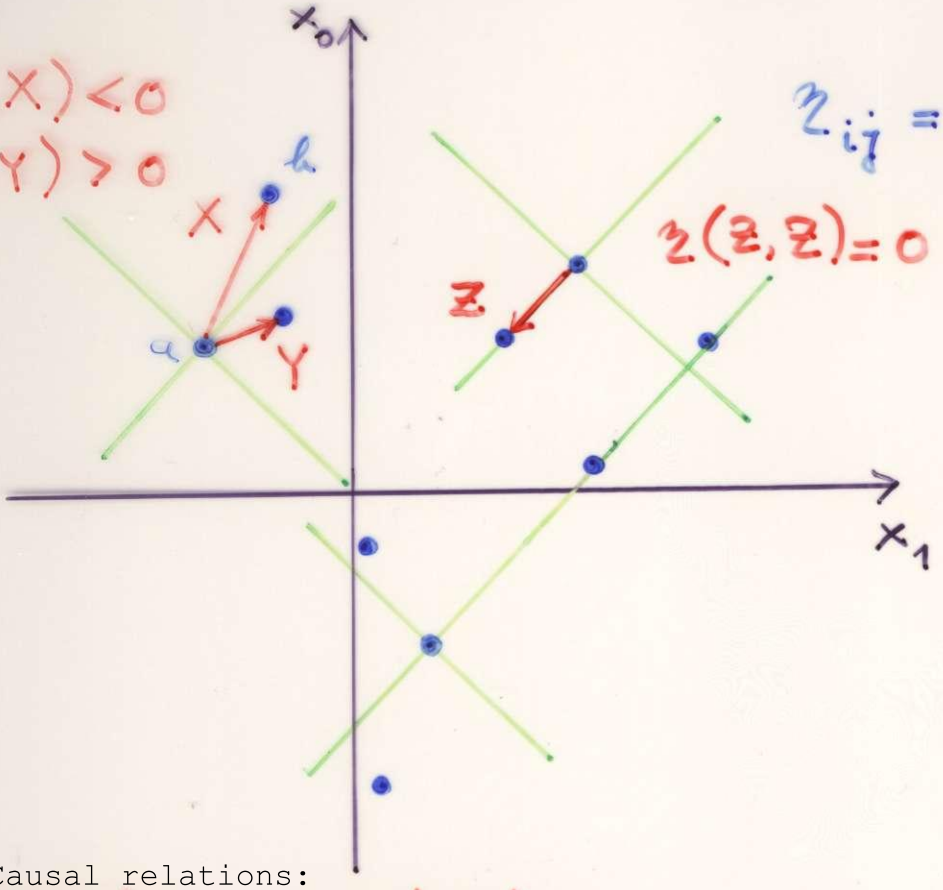
MINKOWSKI TÉRIDŐ $= (\mathbb{R}^4, \eta)$

$\boxed{c=1}$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\eta(X,X)<0$

$\eta(Y,Y)>0$



Causal relations:

KAUZÁLIS RELÁCIÓK:

$a <_c b \iff a \to b$ VEKTOR NEM TÉRSZERŰ.

vector is non-space-like

$a \ll b \iff a \to b$ VEKTOR IDŐSZERŰ.

vector is timelike

KAUZÁLISAN MEGELŐZI — causally precedes

KRONOLOGIAILAG MEGELŐZI — chronologically precedes

The causal structure of spacetime is determined by its metrical structure.

A TÉRIDŐ KAUZÁLIS SZERKEZETÉT TEHÁT A METRIKUS TENZOR HATÁROZZA MEG.

The opposite is almost true:

EZ MAJDNEM IGAZ FORDÍTVA IS:

Causal structure determines the metrical one, up too a scalar factor.

A KAUZÁLIS SZERKEZET, EGY SZORZÓ FAKTOR EREJÉIG, MEGHATÁROZZA A METRIKUS TENZORT.

The properties of the causal relations:

A KAUZÁLIS RELÁCIÓK TULAJDONSÁGAI:

1.) $a <_c a$

2.) $a <_c b$ & $b <_c c \Rightarrow a <_c c$.

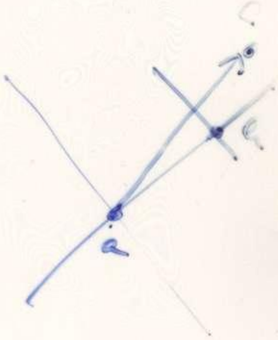
3.) $a <_c b$ & $b <_c a \Rightarrow a = b$

4.) $a \not\ll a$

5.) $a \ll b \Rightarrow a <_c b$

6.) $a <_c b$ & $b \ll c \Rightarrow a \ll c$

7.) $a \ll b$ & $b <_c c \Rightarrow a \ll c$.



Sometimes we also use:

SZOKÁS DEFINIÁLNI KAUZÁLIS JÖVŐ / MÚLT — causal future/past

$J^{\pm}(A) := \{ x \mid \exists\ a \in A$ OLYAN, HOGY (such that) $a <_c x$ / $x <_c a \}$

$I^{\pm}(A) := \{ x \mid \exists\ a \in A$ ~"~ $a \ll x$ / $x \ll a \}$

KRONOLOGIAI JÖVŐ / MÚLT — chronological future/past

C. KAUZÁLIS TEREK.

Causal space

Basic notion: event

ALAPFOGALOM: ELEMI ESEMÉNY

AZ ESEMÉNY FOGALMÁNAK KÖRÜLÍRÁSA:

Description of the concept of event:

Physical event = an (possible) outcome of a measurement performed on a physical system.

FIZIKAI ESEMÉNY = VALAMELY FIZIKAI RENDSZEREN VÉGREHAJTOTT VALAMILYEN MEGFIGYELÉS (MÉRÉS) EREDMÉNYE.

There is a one-one correspondence between the subsets of spacetime and the physical events.

A FIZIKAI ESEMÉNYEK ÉS A TÉRIDŐ RÉSZHALMAZAI KÖZÖTT EGY-EGY-ÉRTELMŰ MEGFELELTETÉS HOZHATÓ LÉTRE.

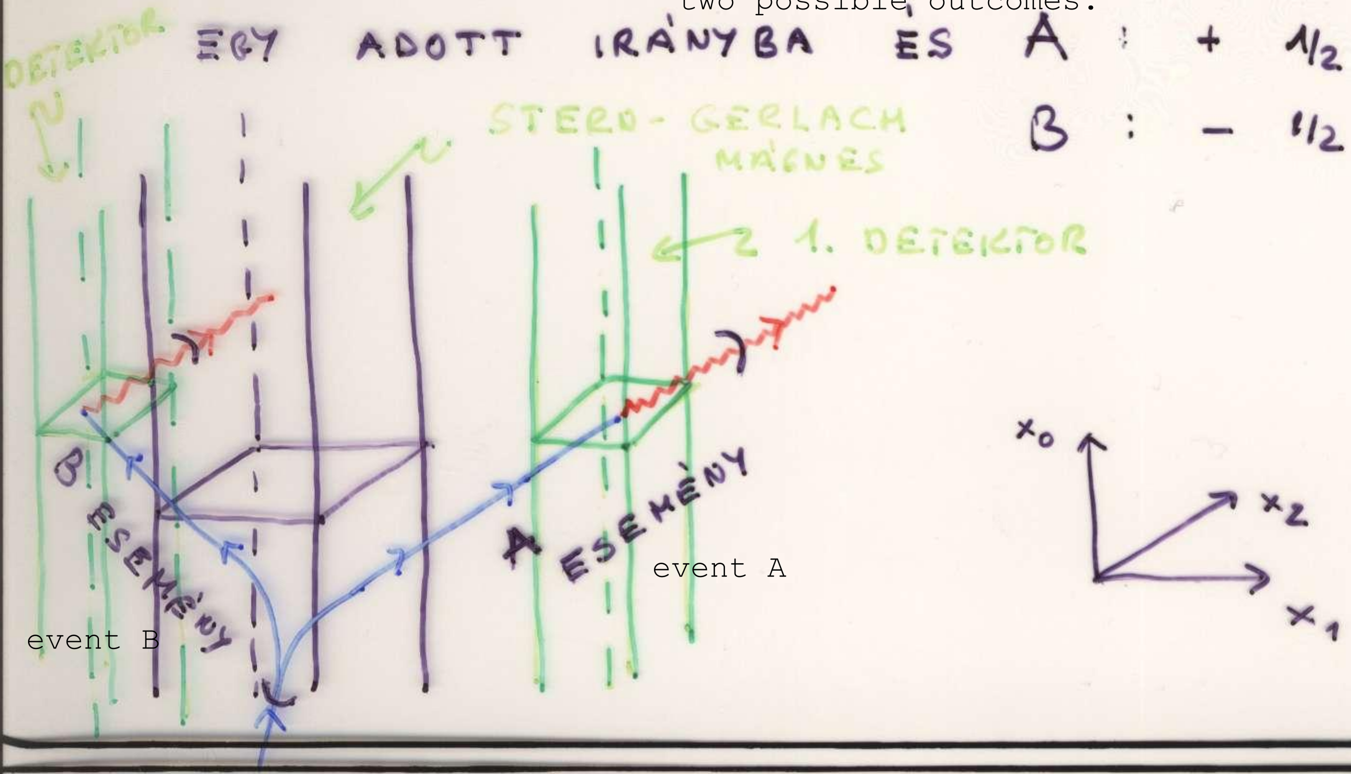
For example: we measure the spin of an electron

PL. EGY ADOTT ELEKTRON SPINJÉT MEGMÉRJÜK EGY ADOTT IRÁNYBA ÉS

two possible outcomes:

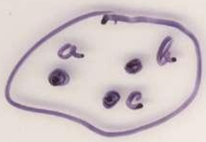
A : $+1/2$

B : $-1/2$.



A TÉRIDŐ EGY RÉSZHALMAZÁNAK LOGIKAI JELENTÉSE:

The logical meaning of a subset of spacetime

Z 

AND AND

$\tilde{Z} \Leftrightarrow \tilde{a}$ ÉS $\tilde{b}$ ÉS $\tilde{c}$

Z V

AND

$(\widetilde{Z \cup V}) \Leftrightarrow \tilde{Z}$ ÉS $\tilde{V}$

Z V

OR

$(\widetilde{Z \cap V}) \Leftrightarrow \tilde{Z}$ VAGY $\tilde{V}$

Boolean lattice of physical events

(A FIZIKAI ESEMÉNYEK BOOLE-HÁLÓJA)

the lattice of subsets of spacetime

(A TÉRIDŐ RÉSZHALMAZAINAK BOOLE-HÁLÓJA)

$\Leftrightarrow$

DUÁLIS HÁLÓ-IZOMORFIZMUS

dual lattice homomorphism

CSAK A KLASSZIKUS FIZIKÁBAN!

this "Boolean" is true only in classical physics!

Causal space

A KAUZÁLIS TÉR $= (X, <_c, \ll)$

underlying set | the elements are the elementary events

X ALAPHALMAZ (ELEMEI AZ ELEMI ESEMÉNYEK.)

causal

$<_c$ KAUZÁLIS

relations

RELÁCIÓ

chronological

$\ll$ KRONOLÓGIAI

axioms:

KRONHEIMER – PENROSE AXIÓMÁK:

1.) $x <_c x$

2.) $x <_c y \;\&\; y <_c z \Rightarrow x <_c z$

3.) $x <_c y \;\&\; y <_c x \Rightarrow x = y$

4.) $x \not\ll x$

5.) $x \ll y \Rightarrow x <_c y$

6.) $x <_c y \;\&\; y \ll z \Rightarrow x \ll z$

7.) $x \ll y \;\&\; y <_c z \Rightarrow x \ll z$

D. ALEXANDROV – TOPOLÓGIA.
topology

Important!
FONTOS!
The causal structure on X determines a natural topology on X.
A KAUZÁLIS SZERKEZET X-EN EGY TERMÉSZETES TOPOLÓGIÁT TÜNTET KI!

Recall,
EMLÉKEZTETŐ.

Closure operation
LEZÁRÁSI OPERÁCIÓ:

$$\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$
$$A \mapsto \bar{A}$$

$\mathcal{P}(X) = X$ RÉSZHALMAZAINAK BOOLE-HÁLÓJA
the Boolean lattice of subsets of X

OLYAN, HOGY
1) $A < \bar{A}$
2) $\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$
3) $\bar{\emptyset} = \emptyset$
4) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

topological space
$(X, \overline{})$: TOPOLOGIKUS TÉR.

TOVÁBBI DEFINICIÓK: further definitions:

closed, if

a) $A \in \mathcal{P}(X)$ <u>ZÁRT</u>, HA $\overline{A} = A$.

open, if, is closed

b) $A \in \mathcal{P}(X)$ <u>NYILT</u>, HA $A^{\perp}$ ZÁRT

the complement of A

$\uparrow$ KOMPLEMENTERE A-NAK

the largets open subset of X

c) $\mathrm{Int}(A) =$ AZ A LEGBÖVEBB NYILT RÉSZHALMAZA X-NEK, AMELY KISEBB A.

which is smaller than A

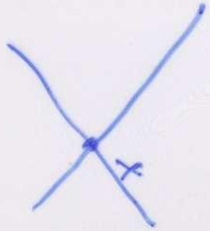
The boudary of A:

d) A HATÁRA: $\mathrm{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{A^{\perp}}$.

Def.

<u>DEFINICIÓ:</u> LEGYEN $(X, <_c, \ll)$ EGY KAUZÁLIS TÉR. <u>ALEXANDROV</u> - TOPOLÓGIÁNAK NEVEZZÜK AZT A LEGDURVÁBB TOPOLÓGIÁT X-EN, MELYBEN MINDEN $I^+(A)$ ÉS $I^-(A)$ NYILT.

Let, be a causal space, Alexandrov topology is the coarsest topology on X, in which all $I^+(A)$ and $I^-(A)$ are open



$I^+(x)$

RIEMANN – GEOMETRIA

Riemannian geometry

There are important results concerning the problem of whether and how the

A. FONTOS EREDMÉNYEK SZÜLETTEK AZ UTÓBBI 10-15 PÁR ÉVBEN, MELYEK ARRA VONATKOZNAK,

the structure of spacetime can be constructed from its causal structure

HOGY LEHET-E ÉS HOGYAN LEHET A TÉRIDŐ EGÉSZ SZERKEZETÉT A KAUZÁLIS STRUKTÚRÁBÓL LEVEZETNI. MI MOST EZT AZ UTAT ÁTUGORVA AZT TANULJUK MEG, HOGY MILYEN A TÉRIDŐ MATEMATIKAI MODELLJE A STANDARD ELMÉLET SZERINT.

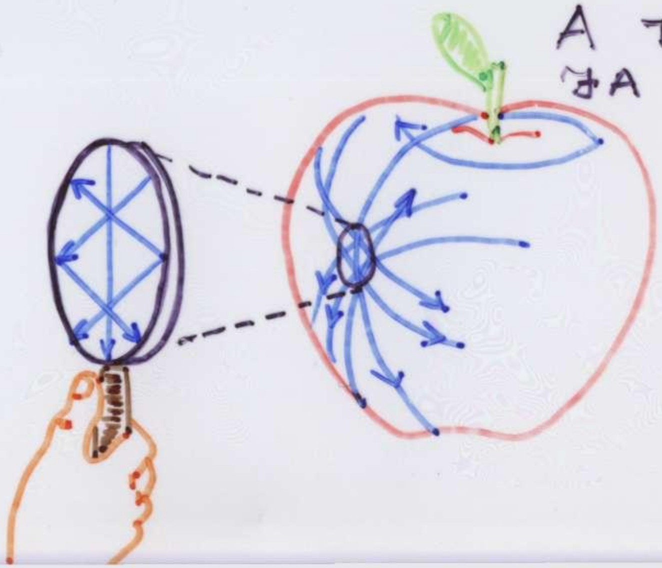
However, now we move on and discuss the mathematical model of spacetime as it is claimed in the standard theory.

Relationship between special and general theory of relativity

B. A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET VISZONYA AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETHEZ.

Geometry of spacetime is something

A TÉRIDŐ GEOMETRIÁJA VALAMI OLYASMI,



which locally looks like a Minkowski spacetime

AMI LOKÁLISAN OLYAN, MINT A MINKOWSKI – TÉR!

C, DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK.
Differentiable manifold

Let M be an arbitrary set.
M LEGYEN EGY TETSZŐLEGES HALMAZ.

Atlas:
ATLASZ:

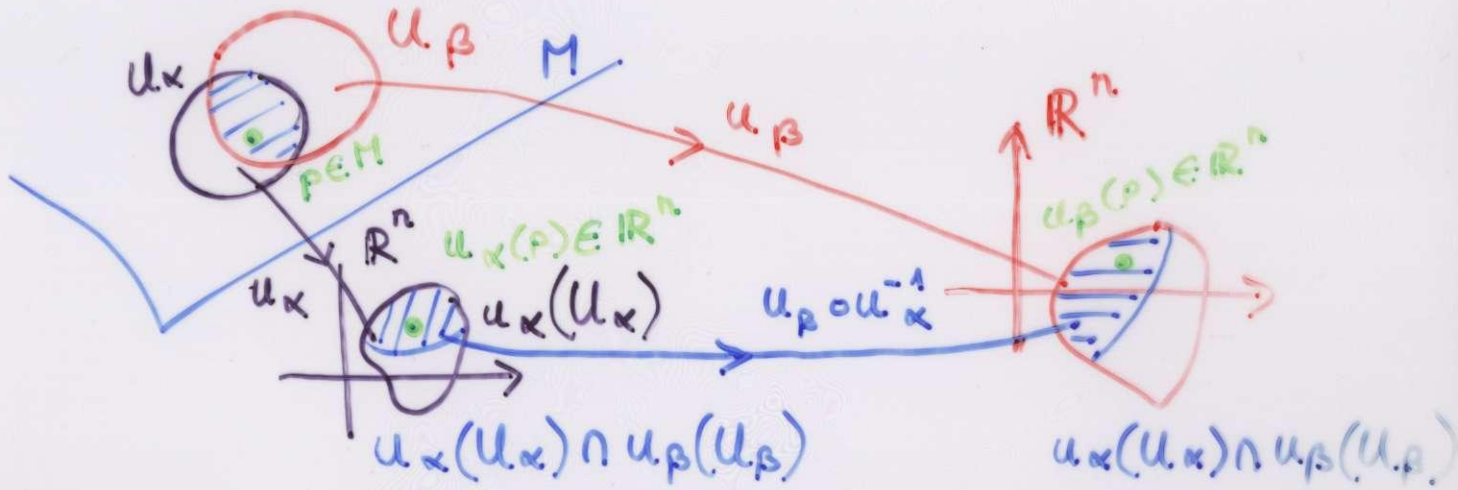
$$\mathcal{A} := \{U_\alpha, u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}},$$ where AMOL $u_\alpha : U_\alpha \subset M \to \mathbb{R}^n$ INVERTÁLHATÓ
is invertible

1, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} U_\alpha = M$

2, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{J}$ -RE

$$u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : \overset{u_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)}{\cancel{u_\alpha(U_\alpha)\cap u_\beta(U_\beta)}} \to \overset{u_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)}{\cancel{u_\alpha(U_\alpha)\cap u_\beta(U_\beta)}}$$

of class C^∞ OSZTÁLYÚ



Pair $(M, \mathcal{A})$ is called n-dimensional differentiable manifold.
$(M, \mathcal{A})$ PÁRT n-DIMENZIÓS DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGNAK NEVEZZÜK.

D. LOKÁLIS KOORDINÁTÁK: Local coordinates:

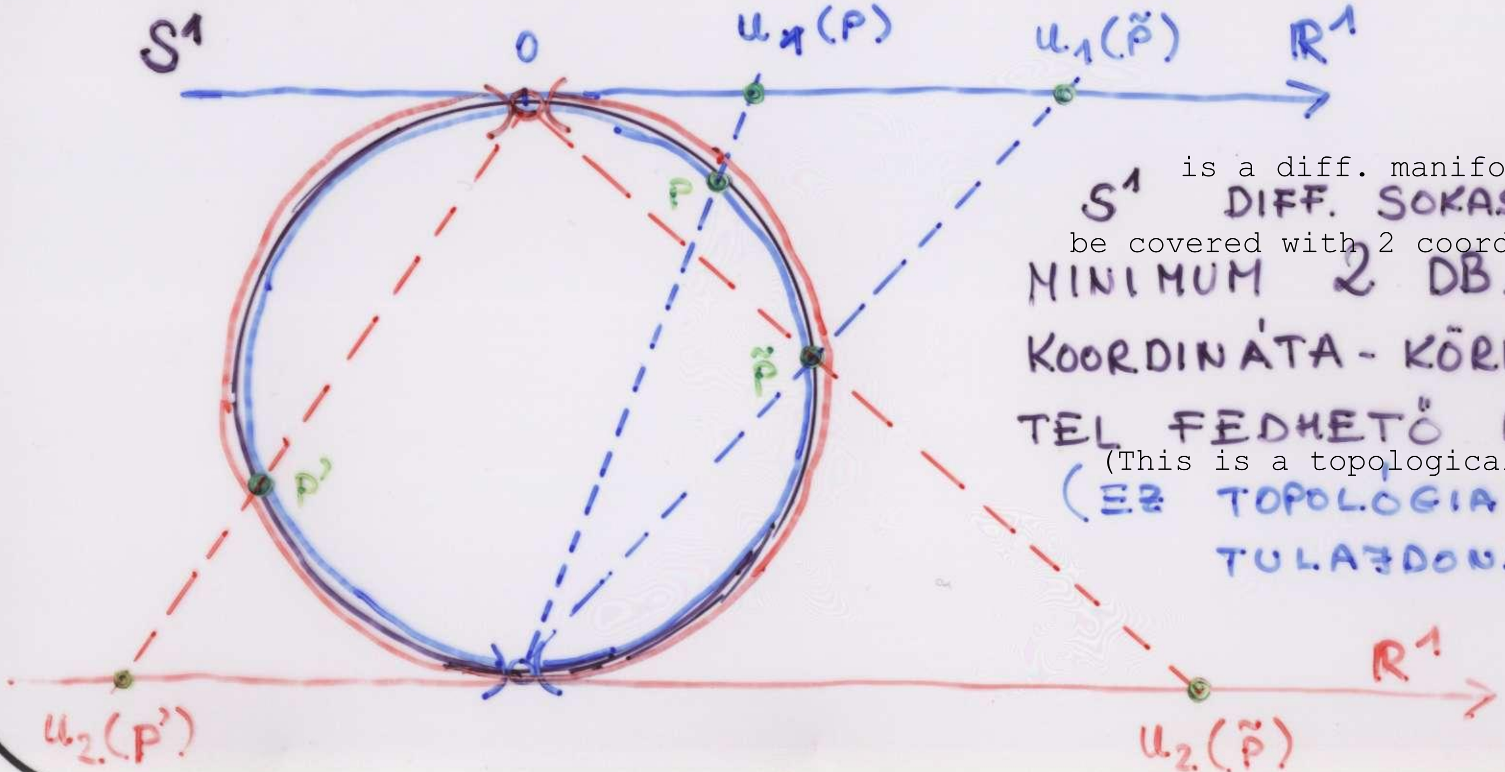
The local coordinates of point $p \in M$ PONT in coordinate patch $(\mathcal{U}_\alpha, u_\alpha)$: LOKÁLIS KOORDINÁTA KÖRNYEZETBEN ÉRTELMEZETT KOORDINÁTÁI:

$$p \mapsto u_\alpha(p) = (p_1 \; p_2 \; \dots \; p_n) \in \mathbb{R}^n$$

Function Az $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ of type TÍPUSÚ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is the so called coordiate LEKÉPEZÉSEK transformation. LOKÁLIS KOORDINÁTA - TRANSZFORMÁCIÓK.

A simple example for diff. manifold:

E. EGYSZERŰ PÉLDA DIFF. SOKASÁGRA:



S^1 is a diff. manifold which can DIFF. SOKASÁG be covered with 2 coordinate patches. MINIMUM 2 DB. KOORDINÁTA - KÖRNYEZET - TEL FEDHETŐ LE!

(This is a topological property!)
(EZ TOPOLÓGIAI TULAJDONSÁG!)

F. GÖRBÉK SOKASÁGOKON.

Curve on a manifold

$\gamma: \mathbb{R} \to M$ — DIFF. HATÓ LEKÉPEZÉS

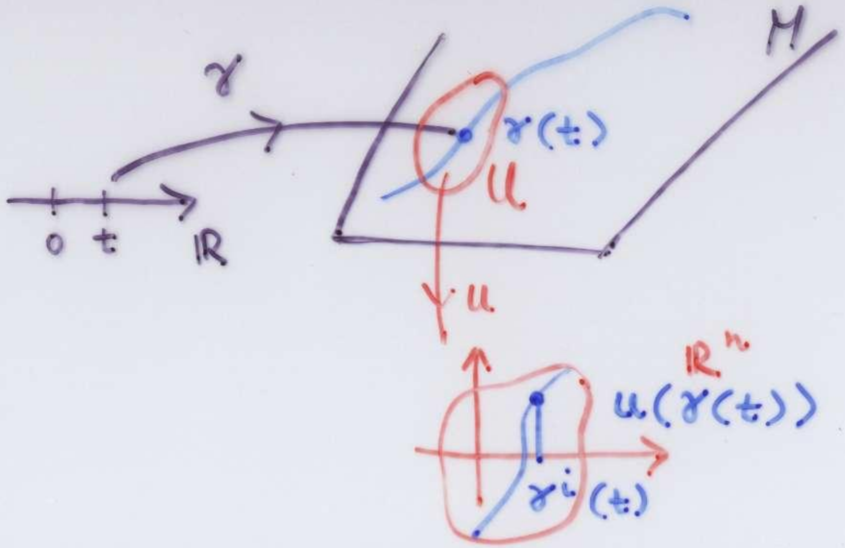
differentiable map

$t \mapsto \gamma(t) \in M$

$\Downarrow$

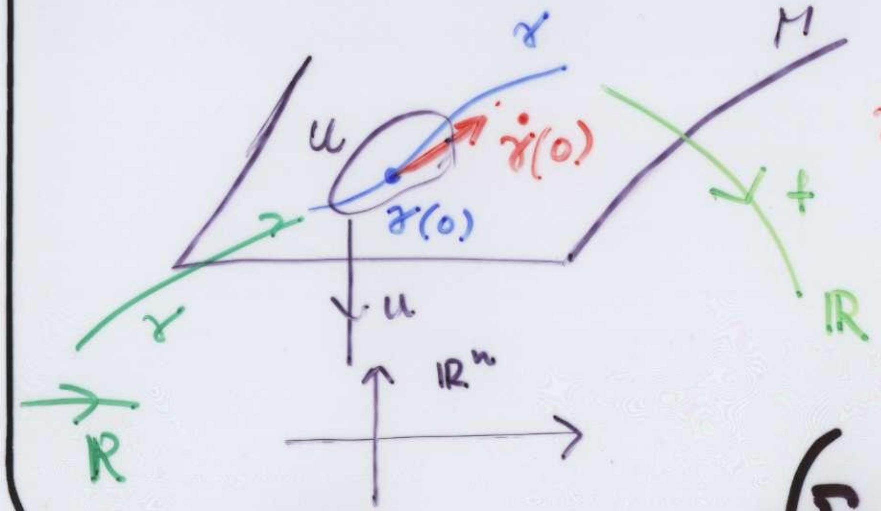
MINDEN $\gamma^i(t)$ FV. DIFF. HATÓ.

all ... are diff. functions



G. GÖRBE ÉRINTŐ-VEKTORA

Tangent vector of a curve



$$\dot{\gamma}(0)(f) := \left.\frac{d\left(f(\gamma(t))\right)}{dt}\right|_0 =$$

$$= \sum_i \left.\frac{d\gamma^i}{dt}\right|_{t=0} \cdot \left.\frac{\partial f_u}{\partial u_i}\right|_{u(\gamma(0))}$$

$$= \left(\sum \left.\frac{d\gamma^i}{dt}\right|_0 \cdot \frac{\partial}{\partial u_i}\right)(f)$$

H. TANGENS - TÉR

Tangent space

Tangent vector of a manifold at point

A SOKASÁG EGY ÉRINTŐ - VEKTORA EGY

is the following:

$p \in M$ PONTBAN:

$$X_p = X^i \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_p$$

That is, a tangent vector is a differential operator over the real functions on the manifold.

TEHÁT EGY ÉRINTŐ VEKTOR DIFF. OPERÁTORKÉNT HAT A SOKASÁGON ÉRTELMEZETT VALÓS FÜGGVÉNYEKEN.

$$X_p(f) = \overset{\sum_i}{\downarrow} X^i \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

(Following the usual notation in physics, the sum over the indexes will be omitted)

(EZENTÚL AZ ISMÉTLŐDŐ INDEXRE ÖSSZEGEZÉST KELL GONDOLNI!)

Obviously, the tangent vectors at a given point constitute a linear space:

VILÁGOS, HOGY EGY PONTBAN AZ ÉRINTŐ-VEKTOROK LINEÁRIS TERET ALKOTNAK:

$$(\alpha X_p + \beta Y_p)(f) = \alpha X_p(f) + \beta Y_p(f)$$

Tangent space at point

A SOKASÁG TANGENS-TERE A $p \in M$ PONTBAN:

$$T_p(M) := \left\{ X_p = X^i \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$$

obviously, it is an n-dimensional linear space

VILÁGOS, HOGY EZ EGY n- DIM. VEKTORTÉR.

I. A TANGENS-TÉR BÁZISA:

Basis in the tangent space:

$\{E_i\}_{i=1\ldots n}$ LIN. FÜGGETLEN V. RENDSZER.

system of linearly independent vectors

$$X_p = X^i E_i$$

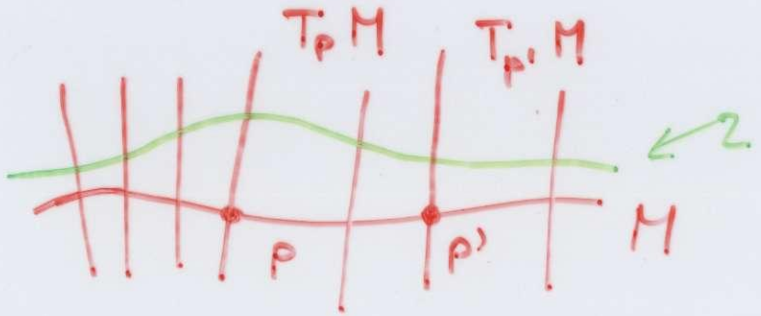
NATURÁLIS BÁZIS: $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\right\}_{i=1\ldots n}$.

Natural basis:

J. TANGENS-NYALÁB:

Tangent budle:

$$T(M) := \bigcup_{p\in M} T_p(M).$$



SZELÉS = VEKTOR-MEZŐ

a section is a vector field

K. VEKTORMEZŐ

Vector field

$$X : M \to T(M)$$
$$p \mapsto X_p \in T_p(M)$$

$$X = \underbrace{X^i}_{\text{FÜGGVÉNY}} \overbrace{\frac{\partial}{\partial u_i}}^{\text{BÁZIS-MEZŐ}}$$

Basis field

function

1-form at point p:

linear functional

$\alpha_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$ LINEÁRIS FUNKCIONÁL.

that is, $\alpha_p(X_p)$ is a real number.

$\alpha_p(X_p)$ TEHÁT EGY SZÁM.

1-forms also constitute a linear space:

AZ 1-FORMÁK MAGUK IS LIN. TERET ALKOTNAK:

$$(\lambda \cdot \alpha_p + \mu \cdot \beta_p)(X_p) = \lambda \, \alpha_p(X_p) + \mu \cdot \beta_p(X_p)$$

This linear space is called

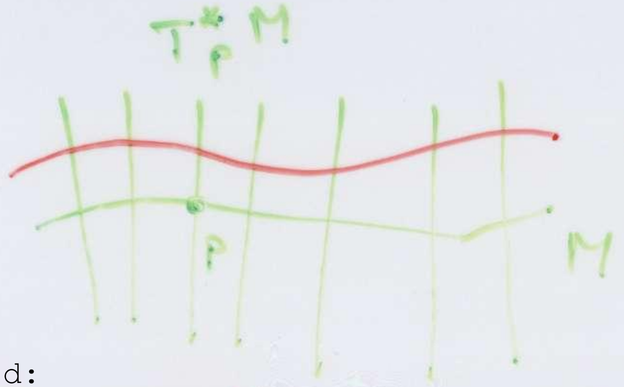
AZ 1-FORMÁK ALKOTTA LIN. TERET A $p \in M$ PONTBAN A SOKASÁG p PONTBAN VETT

the cotangent space of M at point p:

KOTANGENS-TERÉNEK HÍVJUK: $T_p^*(M)$

Cotangent bundle:

KOTANGENS-NYALÁB: $T^*(M) := \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$



SZELÉS: 1-FORMA-MEZŐ

a section: 1-form field

1-form field:

1-FORMA MEZŐ: $\alpha : M \to T^*(M)$

$p \mapsto \alpha_p \in T_p^* M$.

M. DUÁLIS BÁZIS
Dual basis

basis in

$\{E_i\}_{i=1\ldots n}$ BÁZIS $T_p(M)$-BEN.

the dual of ... in

$\{E^{*i}\}_{i=1\ldots n}$ AZ $\{E_i\}_{i=1\ldots n}$ DUÁLISA $T_p^*(M)$-BEN:

is, by definition, a basis satisfying:

A DEFINICIÓJA:

$$E^{*i}(E_j) = \delta_{ij}$$

Home work: Show that this really defines a basis in

HF: MUTASSUK MEG, HOGY EZ TÉNYLEG BÁZIS $T_p^*(M)$-BEN!

The dual of the natural basis:

A NATURÁLIS BÁZIS DUÁLISA:

$$\{du^i\}_{i=1\ldots n} \qquad du^i\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \delta_{ij}.$$

A 1-form can be given, for example, by means of the components:

EGY 1-FORMA-MEZŐT ÚGY ADHATUNK MEG PL:

$$\alpha = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FÜGGVÉNYEK.}}}{\alpha_i}\, du^i$$

functions

Pseudo-Riemannian manifold

N. RIEMANN - SOKASÁG.

Scalar product (metric):

SKALÁRIS SZORZAT (METRIKA):

$$\langle\,,\,\rangle : \Gamma(T(M)) \times \Gamma(T(M)) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$(X,Y) \mapsto \langle X,Y\rangle$$

0) SZIMMETRIKUS symmetric

1) BILINEÁRIS bilinear

2.) NEM-ELFAJULÓ non-degenerate

3.) LORENTZ - SZIGNATÚRÁJÚ. of Lorentz signature

A TÉRIDŐ PSZEUDO-RIEMANN SOKASÁG.

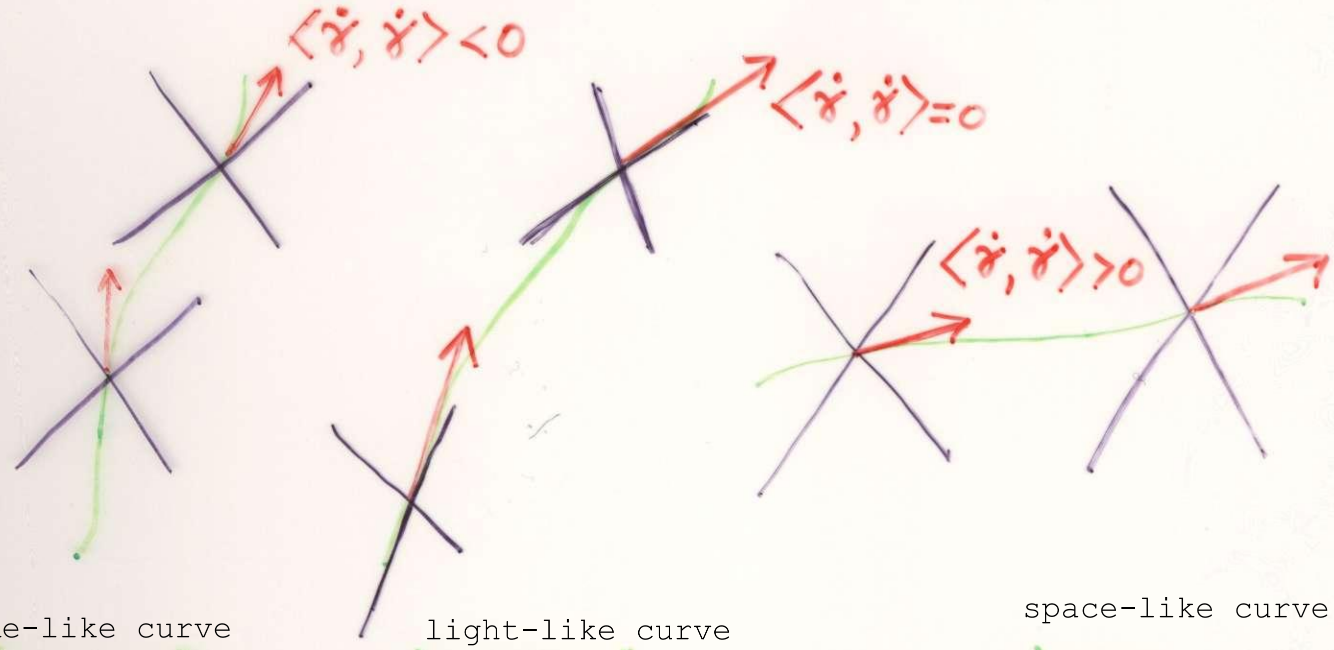
Spacetime is a pseudo-Riemannian manifold

3. ELŐADÁS

Identifying the distincts - connection

A KÜLÖNBÖZŐK AZONOSÍTÁSA

A,



time-like curve
IDŐSZERŰ GÖRBE

light-like curve
FÉNYSZERŰ GÖRBE

space-like curve
TÉRSZERŰ GÖRBE

B,

A TÉRIDŐ KÜLÖNBÖZŐ PONTJAIBAN LÉVŐ

The things in different spacetime points are *ab ovo* different.

DOLGOK ELEVE KÜLÖNBÖZŐK.

At the same time, physics uses such phrases as

A FIZIKA TELE VAN OLYAN KIJELENTÉSEKKEL MINT:

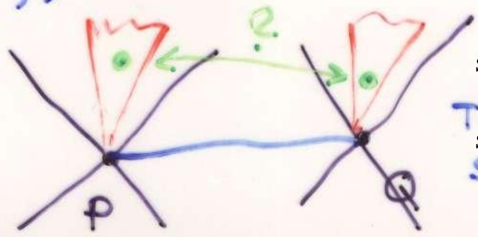
something is constant, changes, the gradient of ...

"VALAMI ÁLLANDÓ", "VÁLTOZIK", "GRADIENSE = ..."

etc.

"$\partial_\mu A = \dots$", "$L(\psi, \partial_\mu \psi, \}$" STB.

?



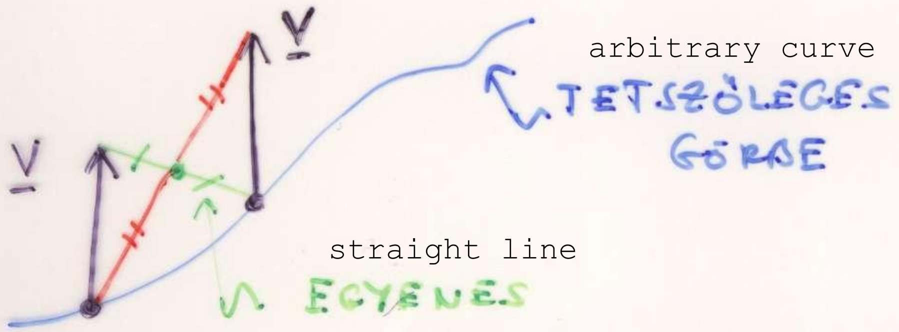
space-like
TÉRSZERŰEN
separated
SZEPARÁLTAK

Parallel transportation in Minkowski spacetime

C, PÁRHUZAMOS ELTOLÁS A MINKOWSKI - TÉRBEN.

We use the concept of straight line

FELHASZNÁLJUK AZ EGYENESEKET!



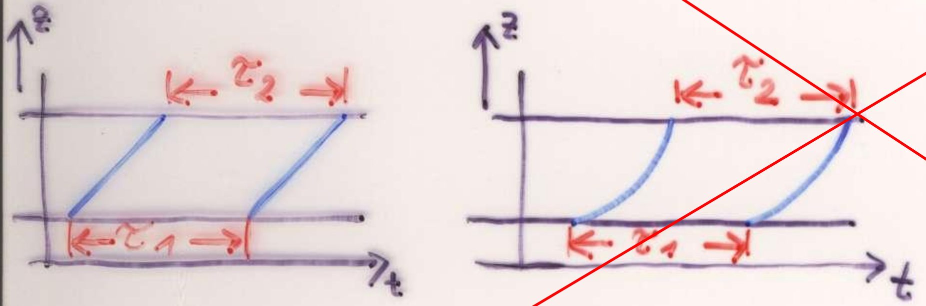
How to do the same in a pseudo-Riemannian space?

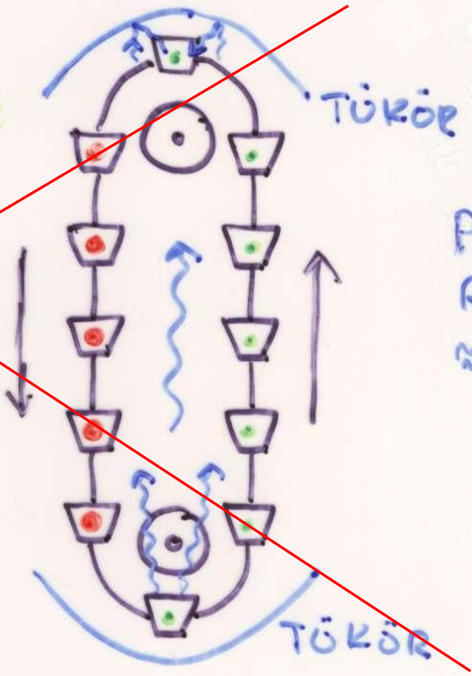
HOGYAN MEGY EZ EGY PSZUDO-RIEMANN TÉRBEN?

Why complicate life? Isn't it possible that spacetime is also globally Minkwoskian?

D, MIELŐTT TOVÁBB BONYOLÍTJUK AZ ÉLETET EGY KÉRDÉS: NEM LEHET, HOGY A TÉRIDŐ GLOBÁLISAN IS MINKOWSKI?

~~GRAVITÁCIÓS VÖRÖSELTOLÓDÁS~~





POUND REBKA ≈ 1960

$$N = \nu_1 \tau_1 = \nu_2 \tau_2$$

$$\nu_1 > \nu_2 \Rightarrow \tau_2 > \tau_1$$

SCHILD ~1960

IN THE LECTURE, INSTEAD, I GAVE THE EXAMPLE OF THE GPS SYSTEM.

Geodesics

E. GEODETIKUS GÖRBÉK

In Minkowski spacetime, a straight line between two pints is the curve of extremal length.

MINKOWSKI-TÉRBEN AZ EGYENES KÉT PONT KÖZÖTT AZ EXTREMÁLIS ÍVHOSSZÚSÁGÚ GÖRBE.

$$\Downarrow$$

Similaly, in a pseudo-Riemannian spacetime, a "straight line" is defined as a curve of exremal length:

PSZEUDO-RIEMANN TÉRIDŐBEN AZ „EGYENES" LEGYEN A GEODETIKUS GÖRBE, AZAZ AZ EXTREMÁLIS ÍVHOSSZÚSÁGÚ GÖRBE:

$$S_{12} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle \dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau) \rangle^{1/2} d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij} \frac{d\gamma^i}{d\tau} \frac{d\gamma^j}{d\tau}}\, d\tau$$

AHOL $\quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle$

From the Euler-Lagrange equations:

EULER-LAGRANGE EGYENLETEK:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\gamma^\alpha}\right) = 0$$

$$L(\gamma, \dot\gamma) = g_{ij}\, \dot\gamma^i \dot\gamma^j$$

Exercise: the derivation

HF. INNEN LEVEZETNI A GEODETIKUS EGYENLETÉT:

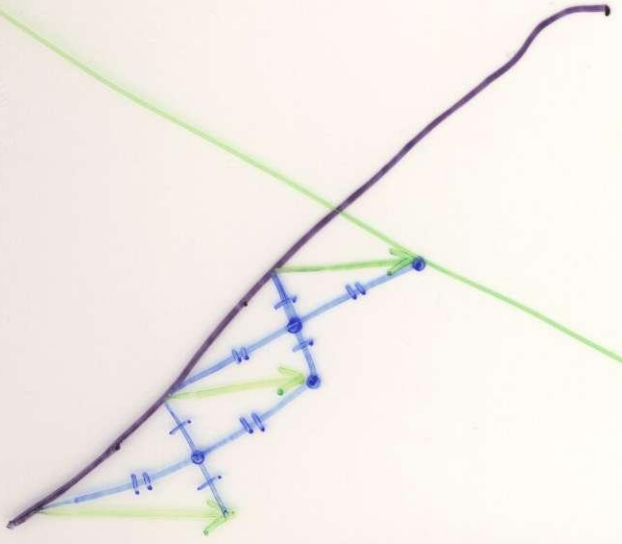
$$\boxed{\frac{d^2\gamma^s}{d\tau^2} + \frac{1}{2}(g^{-1})^{ls}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_l}\right)\frac{d\gamma^i}{d\tau}\frac{d\gamma^k}{d\tau} = 0}$$

$$-\underbrace{\frac{d\gamma^s}{d\tau}\,\frac{\frac{d^2\tau}{ds^2}}{\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2}}_{=0} = 0.$$

This term is zero if \tau is chosen to be a linear function of the length of the curve (affine parameter)

HA τ PARAMÉTERNEK AZ ÍVHOSSZAT VAGY ANNAK LINEÁRIS FÜGGVÉNYÉT (AFFIN PARAMÉTER) HASZNÁLJUK, AKKOR AZ UTOLSÓ TAG ELTŰNIK!

PÁRHUZAMOS ELTOLÁS A PSZUDO-RIEMANN TÉREN.



SCHILD-FÉLE LÉPCSŐ

The close relationship between the concepts of directional derivative and parallel transportation

E. AZ IRÁNYMENTI DERIVÁLÁS ÉS A PÁRHUZAMOS ELTOLÁS SZOROS ROKONSÁGA

In Minkowski spacetime

MINKOWSKI-TÉRBEN:

$$(\nabla_{\underline{u}}\underline{v})(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{d v^1(\underline{x}+t\underline{u})}{dt}\right|_{t=0} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Obviously, a vector field is parallel along a curve \gamma if

VILÁGOS, HOGY $\underline{v}(\underline{x})$ VEKTORMEZŐ PÁRHUZAMOS EGY γ GÖRBE MENTÉN, HA

$$\nabla_{\dot{\underline{\gamma}}}\underline{v} = 0$$

Also, a curve is a straight line if

TOVÁBBÁ EGY GÖRBE EGYENES, HA

$$\nabla_{\dot{\underline{\gamma}}}\dot{\underline{\gamma}} = 0 .$$

In view of these facts:

TRIVIÁLISAN KIOLVASHATÓK AZ IRÁNYMENTI DERIVÁLÁS BIZONYOS ELEMI TULAJDONSÁGAI.

Abstract definition of covariant derivative:

6. A KOVARIÁNS DERIVÁLT ABSZTRAKT DEFINICIÓJA:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

geodesic

1) $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0 \iff \gamma$ GEODETIKUS

2) $\nabla_X (fY) = X(f)\overset{Y}{\cancel{\nabla_X Y}} + f \cdot \nabla_X Y$

3) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

4) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

5) $\nabla_{fX} Z = f \nabla_X Z$.

the components of a connenction

7. A KONNEKCIÓ KOMPONENSEI.

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^j \frac{\partial}{\partial u_j}} \left(Y^m \frac{\partial}{\partial u_m} \right) = X^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_j}} \left(Y^m \frac{\partial}{\partial u_m} \right)$$

$$= X^j \left(\frac{\partial Y^m}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_m} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_j}} \frac{\partial}{\partial u_m} Y^m \right) =$$

$$= X^s \left(\frac{\partial Y^r}{\partial u_s} + \Gamma^r_{sm} Y^m \right) \frac{\partial}{\partial u_r}$$

where we introduce:

AHOL BEVEZETTÜK

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_s}} \frac{\partial}{\partial u_m} = \boxed{\Gamma^r_{sm}} \frac{\partial}{\partial u_r}$$

so called Christoffel symbols

CHRISTOFFEL - SZIMBÓLUMOK A

It follows from the definition that parallel transportation moves the tangent vector of a geodesic curve into a tangent vector of the curve.

A PÁRHUZAMOS ELTOLÁS DEFINICIÓJÁBÓL KÖVETKEZIK, HOGY EGY GEODETIKUS ÉRINTŐJÉNEK PÁRHUZAMOS ELTOLTJA A GEODETIKUS MENTÉN ÉRINTŐ VEKTORA A GÖRBÉNEK. $\Longrightarrow$ That is,

for a geodesic:

GEODETIKUSRA:

$$\boxed{\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0}$$

In components:

KOMPONENSEKBEN: $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = \nabla_{\frac{d\gamma^s}{d\tau}\frac{\partial}{\partial u_s}} \frac{d\gamma^r}{d\tau} \frac{\partial}{\partial u_r} =$

$$= \frac{d\gamma^s}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial u_s} \frac{d\gamma^m}{d\tau} + \Gamma^m_{sr} \frac{d\gamma^r}{d\tau} \right) \frac{\partial}{\partial u_m} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_s}\left(\frac{d\gamma^m}{d\tau}\right)\frac{d\gamma^s}{d\tau} + \Gamma^m_{sr}\frac{d\gamma^r}{d\tau}\frac{d\gamma^s}{d\tau}$$

$$\boxed{\frac{d^2\gamma^m}{d\tau^2} + \Gamma^m_{sr}\frac{d\gamma^r}{d\tau}\frac{d\gamma^s}{d\tau} = 0}$$

Comparing this with the equation of geodesic,

ÖSSZEHASONLÍTVA EZT A KORÁBBAN LEVEZETETT

$$\frac{d^2\gamma^m}{d\tau^2} + \frac{1}{2}(g^{-1})^{lm}\left(\frac{\partial g_{rl}}{\partial u_s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial u_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial u_l}\right)\frac{d\gamma^r}{d\tau}\frac{d\gamma^s}{d\tau} =$$

we have:

EGYENLETTEL AZT KAPJUK, HOGY:

$$\boxed{\Gamma^m_{sr} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{lm}\left(\frac{\partial g_{rl}}{\partial u_s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial u_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial u_l}\right)}$$

Notice that

VEGYÜK ÉSZRE, HOGY $\Gamma^s_{mr} = \Gamma^s_{rm}$.

Therefore,

Hf. INNEN AZONNAL KÖVETKEZIK, HOGY

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

In this case we say:
it is an affine connection

Commutator of vector fields

11. VEKTORMEZŐK KOMMUTÁTORA

$$X, Y \in \Gamma(TM) \quad , \quad f \in \mathcal{F}(M)$$

$$[X, Y] \in \Gamma(TM)$$

$$\boxed{[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))}$$

In components:

KOMPONENSEKBEN:

$$[X, Y](f) = X^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(Y^\beta \frac{\partial f}{\partial u_\beta}\right) - Y^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(X^\beta \frac{\partial f}{\partial u_\beta}\right) =$$

$$= X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u_\alpha} \frac{\partial f}{\partial u_\beta} + \cancel{X^\alpha Y^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}} - Y^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial u_\alpha} \frac{\partial f}{\partial u_\beta} -$$

$$- \cancel{Y^\alpha X^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial u_\beta \partial u_\alpha}} = \left(X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u_\alpha} - Y^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial u_\alpha}\right) \frac{\partial f}{\partial u_\beta}$$

$$\boxed{[X, Y] = \left(X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u_\alpha} - Y^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial u_\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial u_\beta}}$$

Hf: MUTASSUK MEG, HOGY $X(Y(\ldots))$ NEM V. MEZŐ!

Exercise: Show that is NOT a vector field.

4. ELŐADÁS

TENZOROK.

Tensors

The definition of type-(p,q) tensor (p times covariant, q times contravariant)

P-SZER KOVARIÁNS Q-SZOR KONTRAVARIÁNS TÍPUSÚ TENZOR DEFINICIÓJA:

cotangent space at point x

$T_x^* M$ KOTANGENS-TÉR AZ $x \in M$ PONTBAN

$T_x M$ TANGENS-TÉR -"-

tangent space at point x

type-(p,q) tensor at point x

$T \in T_x^{(p,q)} M$ (P,Q)-TÍPUSÚ TENZOR -"-

$$T: \underbrace{T_x^* M \times T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{p \text{ DARAB}} \times \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{q \text{ DB}} \to \mathbb{R}$$

$T(X_1, \dots X_p, \omega_1 \dots \omega_q) \in \mathbb{R}$ $\quad X_1, \dots X_p \in T_x M$

multi-linear

MULTI-LINEÁRIS: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \omega_1 \dots \omega_q \in T_x^* M$.

$$T(X_1, \dots \lambda X_r' + \mu X_r'', \dots X_p, \omega_1 \dots \omega_q) =$$

$$= \lambda T(X_1, \dots X_r' \dots X_p, \omega_1 \dots \omega_q) + \mu T(X_1 \dots X_r'' \dots X_p, \omega_1 \dots \omega_q)$$

similarly for all arguments

HASONLÓAN MINDEN VÁLTOZÓRA!

(p,q) - TÍPUSÚ TENZOROK NYALÁBJA:
bundle of tensors of type-(p,q)

$$T^{(p,q)}M := \bigcup_{x\in M} T_x^{(p,q)}M \,.$$

A section of this bundle is called tensorfield

ENNEK SZELÉSEI A TENZORMEZŐK.

The tensor product of two co-vector (1-form) fields:

KÉT KOVEKTOR -MEZŐ, (1- FORMA) TENZORIÁLIS SZORZATA.

$$\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$$

$$\alpha \otimes \beta \in \Gamma(T^{2,0}M)$$

$$(\alpha\otimes\beta)(X,Y) := \alpha(X)\,\beta(Y).$$

It is obviously multi-linear.

VILÁGOS, HOGY EZ MULTILINEÁRIS! $\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)$-EN

Similarly:

HASONLÓAN: $(\alpha\otimes X)(Y,\omega) := \alpha(Y)\cdot\omega(X)$

$$(X\otimes Y)(\alpha,\beta) = \alpha(X)\,\beta(Y)$$

$$(\alpha\otimes\beta\otimes X)(U,V,\omega) = \alpha(U)\cdot\beta(V)\,\omega(X).$$

STB. etc.

A (p,q)-TÍPUSÚ TENZOROK MAGUK IS LINEÁRIS TERET ALKOTNAK. The tensors themselve constitute a linear space.

$$T_1, T_2 \in T_x^{(p,q)} M$$

$$(\lambda T_1 + \mu T_2)(X_1 \dots X_p, \omega_1 \dots \omega_q) =$$

$$= \lambda T_1(X_1 \dots \omega_q) + \mu T_2(X_1 \dots \omega_q).$$

Let be a basis in and be the dual basis.

LEGYEN $\{E_i\}$ BÁZIS $\Gamma(TM)$-BEN ÉS $\{E_i^*\}$ A DUÁLISA.

$\left\{ E^{*i_1} \otimes \dots \otimes E^{*i_p} \otimes E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_q} \right\}$ is a basis in BÁZIS

$\Gamma(T^{(p,q)}M)$-BEN.

For example

PL. $T \in \Gamma(T^{(1,1)}M)$

$$T(X,\omega) = T(X^s E_s, \omega_r E^{*r}) = X^s \omega_r T(E_s, E^{*r})$$

$$= T(E_s, E^{*r}) E^{*s}(X) \cdot E_r(\omega) = \left(T(E_s, E^{*r}) \cdot E^{*s} \otimes E_r\right)(X,\omega)$$

ÁLTALÁBAN TEHÁT Thus, in genera:

$$T = T(E_{i_1} \dots E_{i_p}, E^{*j_1} \dots E^{*j_q}) \cdot E^{*i_1} \otimes \dots \otimes E^{*i_p} \otimes E_{j_1} \otimes \dots \otimes E_{j_q}$$

Extending covarian derivation for tensors:

KOVARIÁNS DERIVÁLÁS KITERJESZTÉSE:

$$\alpha \in \Gamma(T^*M), \quad X, Y, \in \Gamma(TM)$$

$$\nabla_X(\alpha(Y)) = X(\alpha(Y)) =$$

$$= (\nabla_X \alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y)$$

which implies:

INNEN

$$\boxed{(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)}$$

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} du^j)(Y) = \frac{\partial}{\partial u_i}(du^j(Y)) - du^j(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} Y) =$$

$$= \frac{\partial Y^j}{\partial u_i} - du^j\left(\left(\frac{\partial Y^l}{\partial u_i} + \Gamma^l_{im} Y^m\right)\frac{\partial}{\partial u^l}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial Y^j}{\partial u_i}} - \cancel{\frac{\partial Y^j}{\partial u_i}} - \Gamma^j_{im} Y^m = -\Gamma^j_{im}\, du^m(Y)$$

$$\boxed{\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} du^j = -\Gamma^j_{im}\, du^m}$$

$$T \in \Gamma(T^{(1,1)}M)$$

$$\nabla_X(T(Y,\omega)) = X(T(Y,\omega)) =$$

$$= (\nabla_X T)(Y,\omega) + T(\nabla_X Y,\omega) + T(Y,\nabla_X \omega)$$

Therefore,

INNEN

$$(\nabla_X T)(Y,\omega) = X(T(Y,\omega)) - T(\nabla_X Y,\omega) - T(Y,\nabla_X \omega)$$

Example:

PL.. $T = \alpha \otimes Z$

$$(\nabla_X T)(Y,\omega) = X(\alpha(Y)\,\omega(Z)) - \alpha(\nabla_X Y)\,\omega(Z) -$$

$$- \alpha(Y)(\nabla_X \omega)(Z) =$$

$$X(\alpha(Y))\,\omega(Z) + \cancel{\alpha(Y)\,X(\omega(Z))} - \alpha(\nabla_X Y)\,\omega(Z)$$

$$- \alpha(Y)\left(\cancel{X(\omega(Z))} - \omega(\nabla_X Z)\right) =$$

$$= \left[X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)\right]\omega(Z) + \omega(\nabla_X Z)\cdot\alpha(Y)$$

$$= (\nabla_X \alpha)(Y)\cdot\omega(Z) + \alpha(Y)\,\omega(\nabla_X Z) =$$

$$= \left[(\nabla_X \alpha) \otimes Z + \alpha \otimes \nabla_X Z \right](Y, \omega)$$

So,

Tehát

$$\boxed{\nabla_X (\alpha \otimes Z) = (\nabla_X \alpha) \otimes Z + \alpha \otimes \nabla_X Z}$$

Consider an arbitrary type-(p,q) tensor:

(p,q) típusú tenzort $T \in \Gamma(T^{(p,q)} M)$

$$(\nabla_X T)(Y_1 \dots Y_p, \omega_1 \dots \omega_q) =$$

$$= X(T(Y_1 \dots Y_p, \omega_1 \dots \omega_q)) -$$

$$- T(\nabla_X Y_1 \dots\dots) - T(Y_1, \nabla_X Y_2 \dots \omega_q) -$$

$$- \dots - T(Y_1 \dots \nabla_X \omega_q)$$

In coordinates:

$$T = T_{i_1 \dots i_q}{}^{j_1 \dots j_p} \, E^{*i_1} \otimes \dots E^{*i_q} \otimes E_{j_1} \otimes \dots E_{j_p}$$

$$\nabla_X T = X\left(T_{i_1 \ldots}{}^{\ldots j_p}\right) E^* \otimes \ldots E \; +$$

$$T_{i_1 \ldots}{}^{\ldots j_p} \; \nabla_X E^{* i_1} \otimes \ldots \ldots E \; + \ldots \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

$$= X^s \boxed{\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_s}} T}$$

$$\frac{\partial T_{i_1 \ldots}{}^{i_1 \ldots j_p}}{\partial u_s} + T_{i_1 \ldots}{}^{\ldots j_p}$$

H.f.

Exercise: to continue

5. ELOADÁS

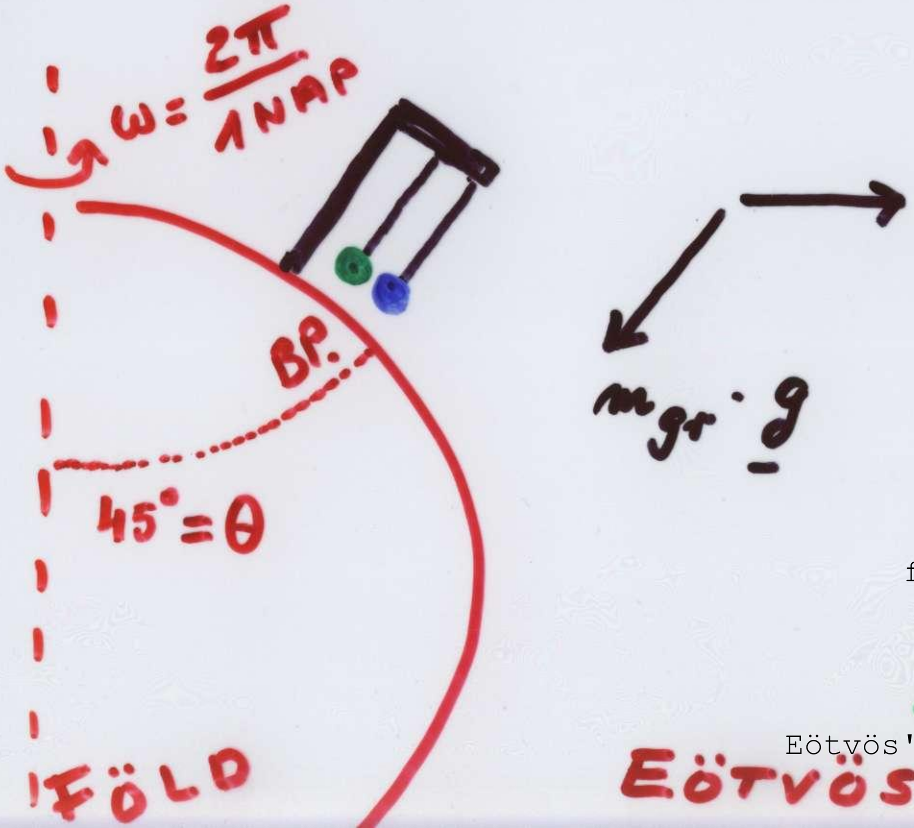
Curvature -- what remains of gravitational field?

GÖRBÜLET, AVAGY HOVÁ TÜNT A GRAVITÁCIÓS MEZŐ?

Is gravitational force a real force or a pseudo-force?

A, ERŐ VAGY PSZEUDÓ-ERŐ A GRAVITÁCIÓ?

$$m_{grav.} = m_{inerc.}$$



$R\omega^2 \sin\theta \cdot m_{in}$

If $\frac{m_{in}}{m_{gr}}$ is not identical for all materials, then the "vertical" direction must be different for different materials!

HA $\frac{m_{in}}{m_{gr}}$ NEM AZONOS MINDEN ANYAGRA, AKKOR A FÜGGŐLEGES IRÁNY IS KÜLÖNBÖZŐ!

Eötvös' experiment says: this is not the case

EÖTVÖS L. 1889

One can observe gravitational force only in an

GRAVITÁCIÓS ERŐT CSAK GYORSULÓ

accelerating reference frame, but not in an inertial frame

VONATKOZTATÁSI RENDSZERBEN LÁTUNK.

INERCIARENDSZERBEN NEM!

Consequently: there is no such a thing as gravitational force!

TEHÁT GRAVITÁCIÓS ERŐ NINCS.

What the inertial observer can detect is

EGY INERCIÁLIS MEGFIGYELŐ CSAK

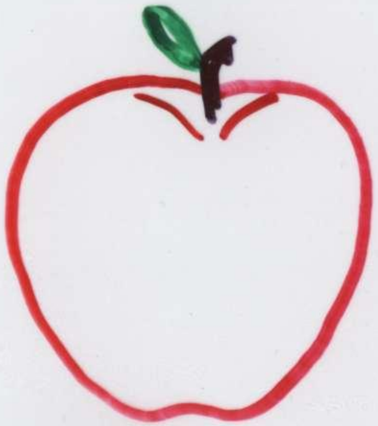
the tidal force, that is the "gradient of the gravitational force field", that is

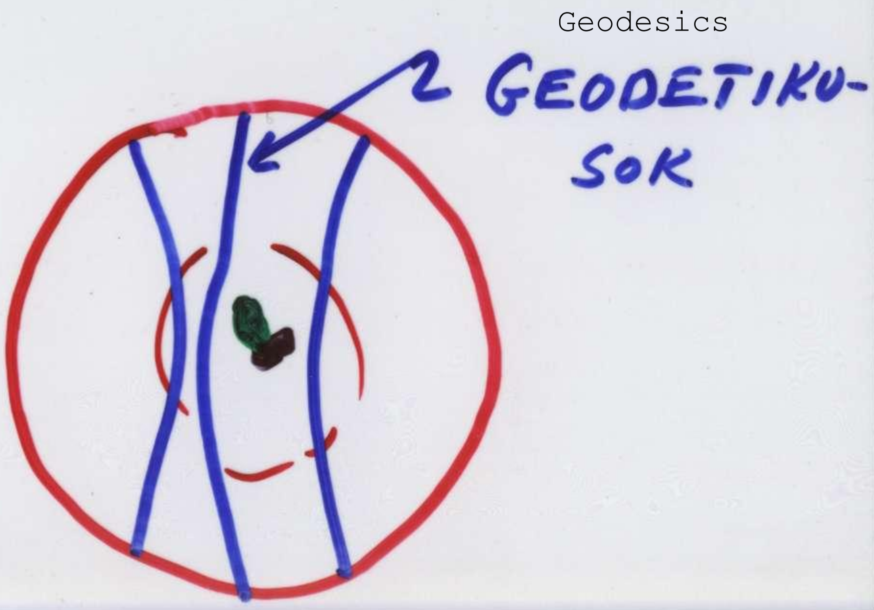
AZ ÁR-APÁLY-ERŐKET, VAGYIS A

GRAVITÁCIÓS ERŐ GRADIENSEIT

the relative acceleration of the neighboring inertial bodies.

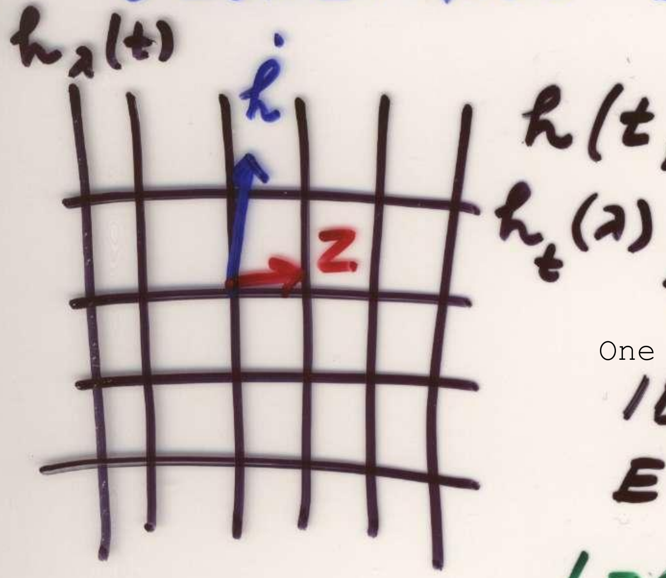
ÉSZLELI. VAGYIS AZT, HOGY A SZOMSZÉDOS INERCIÁLIS MOZGÁST VÉGZŐ TESTEKNEK VAN RELATÍV GYORSULÁSA.





Geodesic deviation

3. GEODETIKUS-DEVIÁCIÓ



$$V = \dot{h}_\lambda(t)$$

$$h(t,\lambda)$$

$$h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to M$$

One parameter family of time-like geodesics

IDŐ-SZERŰ GEODETIKUSOK EGYPARAMÉTERES SEREGE

Let

LEGYEN $\langle \dot{h}_\lambda(t), \dot{h}_\lambda(t) \rangle = -1$

Consider

$$Z(h(t,\lambda)) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\bigg|_{t,\lambda} h(t,\lambda) = \dot{h}_t(\lambda)$$

Notice that

VEGYÜK ÉSZRE, HOGY

a) $[Z,V] = 0$ because ui. $[Z,V]^i =$

$$= Z^j \frac{\partial V^i}{\partial x_j} - \frac{\partial Z^i}{\partial x^j} V^j = \frac{\partial h^j}{\partial\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial h^i}{\partial t} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial h^i}{\partial\lambda} \cdot \frac{\partial h^j}{\partial t} = \frac{\partial^2 h^i}{\partial\lambda\,\partial t} - \frac{\partial^2 h^i}{\partial t\,\partial\lambda} = 0.$$

b, $[Z, V] = 0 \Longrightarrow \nabla_V Z = \nabla_Z V$

because

ui. $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0.$

c, $\boxed{\langle V, u\rangle = 0} \Longrightarrow \underbrace{\nabla_V(\langle V, u\rangle)} = 0$

$$\langle \underbrace{\nabla_V V}_{0}, u\rangle + \langle V, \nabla_V u\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle V, \nabla_V u\rangle = 0}$$

$\perp Z := Z + \langle V, Z\rangle V.$ V-RE MERŐ-LEGES RÉSZ.

separation vector

SZEPARÁCIÓ VEKTOR

the part of Z that is orthogonal to V

Relative acceleration:

RELATIV GYORSULÁS:

$$a_R = \perp \nabla_V \perp \nabla_V \perp Z \overset{c)}{=} \nabla_V \nabla_V \perp Z$$

But,

DE

$$[\perp Z, V] = [Z + \langle Z, V\rangle V, V] =$$

$$= \underbrace{[Z, V]}_{0} + V(\langle Z, V\rangle) V + \langle Z, V\rangle \underbrace{[V, V]}_{0}$$

$$= \langle \nabla_V Z, V\rangle V + \langle Z, \underbrace{\nabla_V V}_{0}\rangle \cdot V =$$

$$= \langle \nabla_Z V, V\rangle \cdot V = \underbrace{\frac{1}{2} Z(\underbrace{\langle V, V\rangle}_{-1}) \cdot V}_{0} = 0.$$

Therefore,

ÍGY $\nabla_V \perp Z = \nabla_{\perp Z} V.$

Thus,

TEHÁT

$$a_R = \nabla_V \nabla_{\perp Z} V$$

We define the curvature operator

BEVEZETJÜK A GÖRBÜLETI OPERÁTORT

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

ÍGY by means of which

$$a_R = -R(\perp Z, V)V$$

No garvitational field!

GRAVITÁCIÓS MEZŐ NINCS!

Gravitation

Manifestation of the curvature of spacetime

GRAVITÁCIÓ = A TÉRIDŐ GÖRBÜLETÉNEK A MEGNYILVÁNULÁSA.

Theory of gravitation

Theory of the structur (geometry) of spacetime

GRAVITÁCIÓS KÖLCSÖNHATÁS ELMÉLETE $\equiv$ A TÉRIDŐ STRUKTÚRÁJÁNAK ELMÉLETE

SÁGVÁRI SZITA NYOMDA

6. ELŐADÁS

A TÉRIDŐ TOPOLÓGIÁJA

Topology of Spacetime

A

4-dimensional manifold

(M, g) $\quad M$ 4-DIM. SOKASÁG

type-(2,0) symmetric tensor field

g (2,0) TÍPUSÚ SZIMM. .... TENZOR.

so far we have been concerned with g

g -VEL MÁR FOGLALKOZTUNK

LOKÁLISAN MINKOWSKI

Locally Minkowskian

GRAVITÁCIÓ

gravitation

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Uparrow$

EKV. ELV.

ekvivalence principle

geodesics

GEODETIKUSOK

deviations

DEVIÁCIÓK

$$g \Longrightarrow \nabla_X Y \Longrightarrow R(X,Y)Z$$

KOV. DERIV.

covariant derivation

GÖRBÜLET

curvature

Now we turn to the manifold itself: What does it look like?

MOST AZZAL FOGLALKOZZUNK, HOGY MILYEN LEGYEN AZ M SOKASÁG!

PL: $M \cong$ $\mathbb{R}^4$ $\qquad S^2 \times S^2$

$S^3 \times \mathbb{R}$ $\qquad ?$

$S^1 \times S^2 \times \mathbb{R}$

S^4

B. INTEGRÁLÁS PSEUDO-RIEMANN SOKASÁGON.

Integral on a pseudo-Riemannian manifold

$$f: M \to \mathbb{R} \qquad N \subset M$$

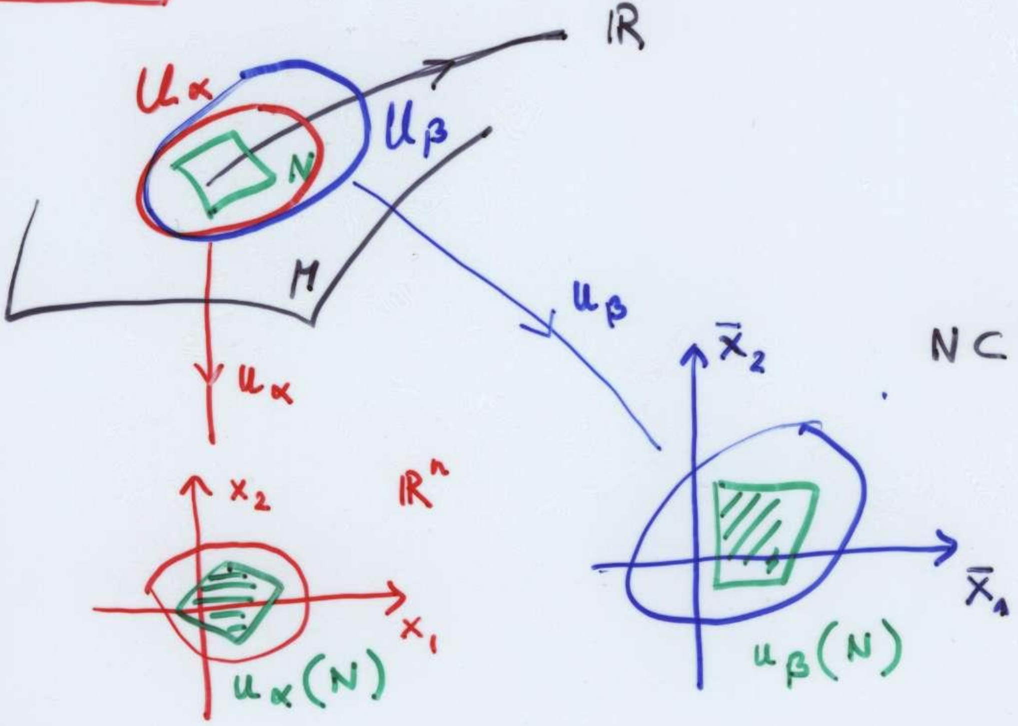
$$\dim N = \dim M$$

$$\int_{(N)} f\, dv = ?$$

Let

(1) LEGYEN $N \subset U_\alpha$ $\quad (U_\alpha, u_\alpha)$

$$\boxed{\int_{(N)} f\, dv} := \int_{u_\alpha(N)} f \circ u_\alpha^{-1}\, dx_1 \dots dx_n$$



$N \subset U_\beta$

$$\boxed{\int_{(N)} f\, dv} := \int_{u_\beta(N)} f \circ u_\beta^{-1}\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2 \dots d\bar{x}_n =$$

$$= \int_{u_\alpha(N)} f \circ u_\alpha^{-1} \boxed{\det \frac{\partial (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^i}{\partial x_j}}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

determinant of the partial derivative matrix (Jacobian determinant)

$$\boxed{\int_{(N)} f\, dv} \neq \boxed{\int_{(N)} f\, dv}$$

EZÉRT Therefore,

$$\int_{(N)} f\,dv := \int_{u_\alpha(N)} f \circ u_\alpha^{-1} \underbrace{|\det g|^{1/2}} dx_1 \dots dx_n$$

The transformation of this factor

ENNEK A TRANSFORMÁCIÓJA

against the coordinate changes

KOMPENZÁLJA A JAKOBI

compensates the Jacobian determinant

DETERMINÁNST.

ÍGY AZ INT. DEFINÍCIÓJA FÜGGETLEN A KOORDINÁTÁTÓL. In this tricky way integral becomes independent of the coordinate system

(2) If reagion N is large:

N TARTOMÁNY NAGY (PL. $N = M$)

partition of unity

EGYSÉGPARTÍCIÓ M PARAKOMPAKT

M needs to be paracompact

$$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1,2,\dots} \quad \varphi_\alpha : M \to \mathbb{R}$$

a) $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$

b) $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_{\alpha'}$, VALAMILYEN α'-RE. for some

c) $\operatorname{supp} \varphi_\alpha$ KOMPAKT is compact

d) $(\forall x \in M)$ $\exists$ X-NEK OLYAN KÖRNYEZETE, there exists a neighbourhood of x, such that

HOGY AZ CSAK VÉGES SOK $\operatorname{supp} \varphi_\alpha$-VAL VAN ÁTFEDÉSBEN. it overlaps only a finite number of

e) $(\forall x \in M)$ $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1.$

$$\int_{(M)} f\,dv := \sum_\alpha \int_{\operatorname{supp} \varphi_\alpha} \varphi_\alpha \cdot f\,dv$$

HA EZ A $\sum$ VÉGES!

given that the sum is finite!

EZ A DEFINICIÓ FÜGGETLEN AZ EGYSÉGPARTICIÓ-TÓL. This definition is independent of the partition of unity

Indeed, if is another partition

HA UGYANIS $\{\overline{\varphi}_\beta\}_{\beta=1,2,\dots}$ EGY MÁSIK

then also is a partition

EGYSÉGPARTICIÓ, AKKOR $\{\varphi_\alpha \overline{\varphi}_\beta\}_{\substack{\alpha=1,2\dots\\ \beta=1,2\dots}}$ IS AZ.

hence

ÍGY

$$\int_M f\,d\sigma = \sum_\alpha{}' \int_{\operatorname{supp}\varphi_\alpha} \varphi_\alpha f\,d\sigma = \sum_\alpha{}' \sum_\beta{}' \int_{\operatorname{supp}(\varphi_\alpha\overline{\varphi}_\beta)} \varphi_\alpha \overline{\varphi}_\beta f\,d\sigma =$$

$$= \sum_\beta{}' \int_{\operatorname{supp}\overline{\varphi}_\beta} \overline{\varphi}_\beta f\,d\sigma.$$

C. ORIENTÁCIÓ Orientation

It must be clear that the volume integral is meaningful only if

VILÁGOS, HOGY A TÉRFOGATI INTEGRÁLNAK CSAK AKKOR VAN ÉRTELME, HA A

Jacobian determinant

$$\det\left(\frac{\partial(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})}{\partial x}\right)$$

is positive everywhere in

JACOBI DETERMINÁNS $U_\alpha \cap V_\beta$ EGÉSZÉN POZITIV.

A manifold is said to be oriantable if it has an atlas such that

EGY SOKASÁGOT ORIENTÁLHATÓNAK NEVEZZÜNK, HA LÉTEZIK OLYAN ATLASZA, HOGY B.MELY

for all

α, β ESETÉN

$$\det\left(\frac{\partial u_\beta \circ u_\alpha^{-1}}{\partial x}\right)\Bigg|_{u_\alpha(U_\alpha)\cap u_\beta(U_\beta)} > 0 .$$

For example, a Möbius strip is NOT orientable

PÉLDÁUL A MÖBIUS-SZALAG NEM ORIENTÁLHATÓ.

But,

ORIENTÁLHATÓ : $\mathbb{R}^n$, S^n, $S^1 \times \mathbb{R}$ ... are orientable

Spacetime must be an orientable manifold!

* A TÉRIDŐ ORIENTÁLHATÓ SOKASÁG.

A manifold is connected if any two points can be connected

D, EGY SOKASÁG ÖSSZEFÜGGŐ, HA B.MELY KÉT PONTJA ÖSSZEKÖTHETŐ EGY FOLYTONOS GÖRBÉVEL. by a smooth curve.

(*) A TÉRIDŐ ÖSSZEFÜGGŐ. Spacetime is connected!

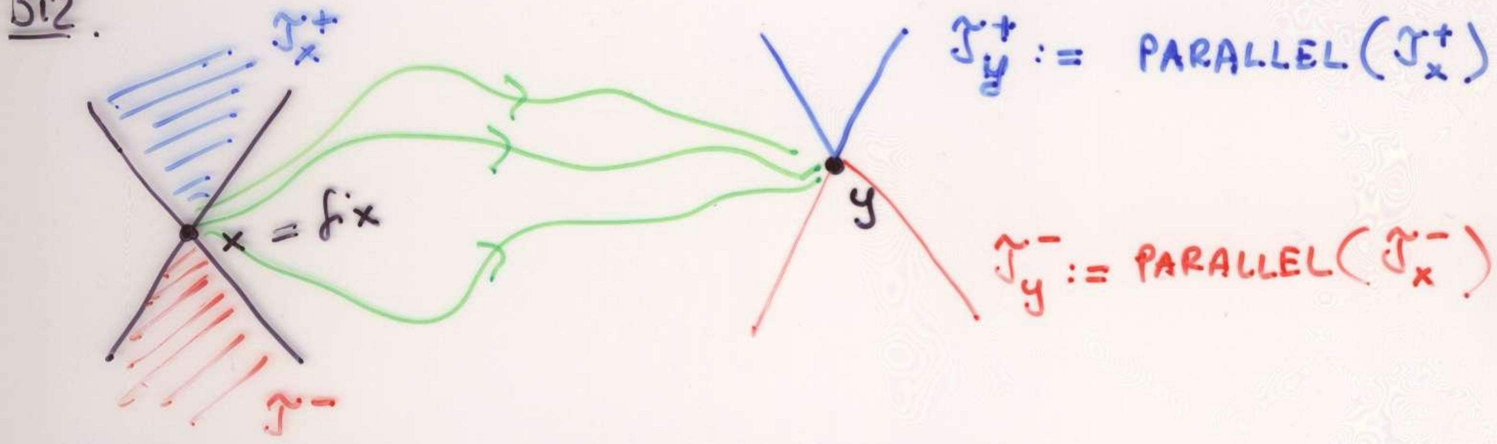
Let be the union of time-like vectors

E, LEGYEN $\mathcal{T} \subset TM$ AZ IDŐ-SZERŰ VEKTOROK UNIÓJA.

consists either or connected components

$\mathcal{T}$ VAGY 1 VAGY 2 ÖSSZEFÜGGŐ KOMPONENS-BŐL ÁLL.

BIZ.



$$\mathcal{A}^+ := \bigcup_{y \in M} \mathcal{T}_y^+ \qquad \mathcal{A}^- := \bigcup_{y \in M} \mathcal{T}_y^-$$

VILÁGOS, HOGY $\mathcal{A}^\pm$ ÖSSZEFÜGGŐ ÉS $\mathcal{T} = \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^-$.

A connected Pseudo-Riemannian manifold is time-oriented

E EGY ÖSSZEFÜGGŐ P. R. SOKASÁG

if has two conncted comonents

IDŐ-ORIENTÁLT HA $\mathcal{T}$-NEK KÉT ÖSSZE-FÜGGŐ KOMPONENSE VAN.

Spcetime is a time-oriented manifold

(***) A TÉRIDŐ IDŐ-ORIENTÁLT.

Obviously, if there exist a non-degenerate time-like vector field on the manifold

VILÁGOS, HOGY HA A SOKASÁGON MEGADHATÓ EGY SEHOL EL-NEM-TŰNŐ IDŐSZERŰ

then it is time-oriented.

VEKTORMEZŐ, AKKOR IDŐ-ORIENTÁLHATÓ.

Proof: If X is such a v. field, then

UGYANIS: HA X EGY ILYEN V. MEZŐ

$$\Psi: TM \to \mathbb{R}$$

$$(x, W) \mapsto g(W, X)$$

is a function, which is a surjective mapping of type

EZ EGY C^∞ FÜGGVÉNY, AMELY EGY

$\mathcal{T} \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ RÁKÉPEZÉS. $\Rightarrow$ therefore

$$\mathcal{T} = \Psi^{-1}(-\infty, 0) \cup \Psi^{-1}(0, \infty)$$

MEGMUTATHATÓ, HOGY
One can show that

if a simply connected Lorentzian manifold must be time orientable too
- HA A SOKASÁG EGYSZERESEN ÖSSZEFÜGGŐ
AKKOR IDŐ-ORIENTÁLT IS.

There exist orientable and not time-orientable
- LÉTEZIK ORIENTÁLHATÓ ÉS NEM IDŐ-ORIENTÁLHATÓ
NEM —〃— —〃— —〃—
but time-orientable
NEM —〃— DE IDŐ-ORIENTÁLHATÓ.

manifolds
P.R. SOKASÁG.

Example: Orientable but not time-orientable manifold
PÉLDA: ORIENTÁLHATÓ DE NEM IDŐORIENTÁLHATÓ

$M = S^1 \times \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^2 \quad (u^1, u^2) \leftrightarrow (u^1, u^2 + \pi)$

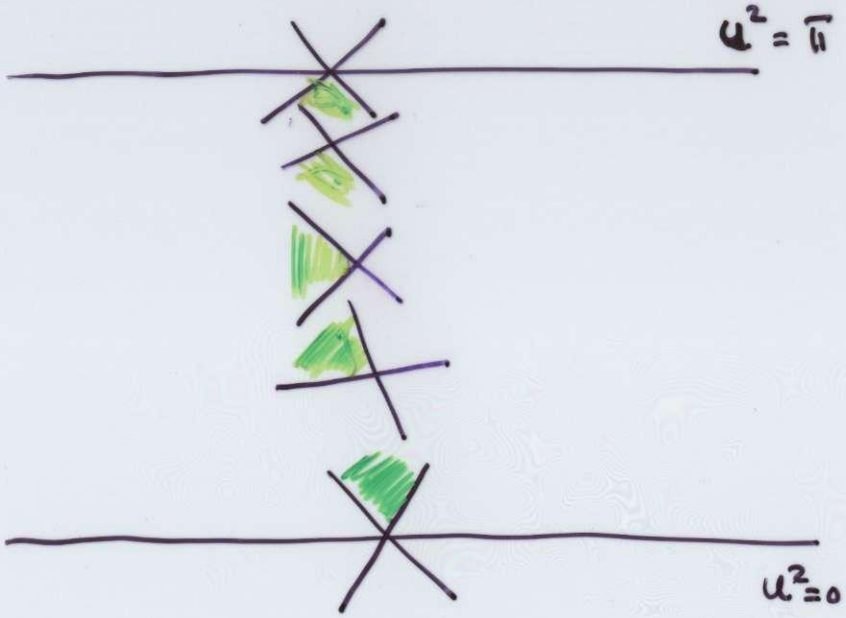
$$\omega = \cos(u^2)\,du^1 + \sin(u^2)\,du^2$$

$$\chi = -\sin(u^2)\,du^1 + \cos(u^2)\,du^2$$

$$\hat{g} = \omega \otimes \omega - \chi \otimes \chi$$

is invariant for
EZ INVARIÁNS $(u^1, u^2) \longrightarrow (u^1, (u^2 + \pi))$ -RE $\Longrightarrow$

therefore it is a metric on M
TEHÁT METRIKA M-EN.



But, for example,

DE PL. M-EN $\hat{g} = du^1 \otimes du^1 - du^2 \otimes du^2$

defines a time-orientable structure

IDŐ-ORIENTÁLHATÓ STRUCTURA.

A TÉRIDŐ TEHÁT EGY ÖSSZEFÜGGŐ 4-DIMENZIÓS ORIENTÁLT ÉS IDŐ-ORIENTÁLT PSEUDO-RIEMANN DIFF. SOKASÁG AFFIN ÖSSZEFÜGGÉSSEL.

Thus, spacetime is a connected 4-diemsional oriented and time-oriented pseudo-Riemannian differentiable manifold with an affine connection.

7. ELŐADÁS

Killing vectors

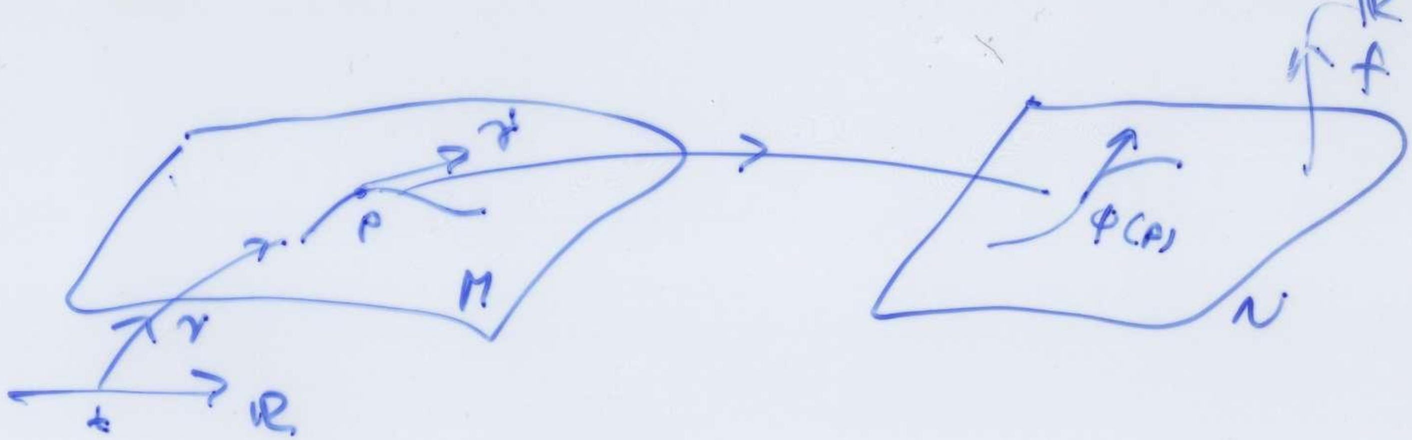
A KILLING-VEKTOROK

Equivalence of two models of spacetime

[A] A TÉRIDŐ KÉT MATEMATIKAI MODELLJÉNEK EKVIVALENCIÁJA.

mapping

$\phi : M \to N$ $\quad C^\infty$ LEKÉPEZÉS



$$\phi_*(\dot{\gamma}) := (\phi \circ \gamma)^{\boldsymbol{\cdot}}$$

that is,

AZAZ

$$\phi_*(X_p)(f) = X_p(f \circ \phi).$$

"push-forward"

Fgy.

KOMPONENSBEN.

Exercise: express it in components

EGY KOVEKTOR "PULL-BACK"-JE:

Pull-back of a covector field:

$$\alpha \in \Gamma(T^*N)$$

$$(\phi^*\alpha)(X) = \alpha(\phi_* X)$$

$$X \in \Gamma(TM)$$

In components:

KOMPONENSEKBEN:

HF Ex.

Obviously,

VILÁGOS, HOGY $\alpha(X) \overset{\phi}{=} (\phi^*\alpha)(\phi_*^{-1} X)$ $\alpha \in \Gamma(T^*M)$

By definition:

DEFINÍCIÓ SZERINT: $\phi^* X = \phi_*^{-1} X$. $\phi_* \alpha = \phi^{-1*} \alpha$

Pull-back of a tensor:

ÍGY EGY TENZOR "PULL-BACK"-JE:

$$(\phi^* T^{(r,s)})(X \ldots Z, \alpha \ldots \gamma) = T^{(r,s)}(\phi_* X, \ldots \phi_* Z, \phi^{-1*}\alpha \ldots \phi^{-1*}\gamma).$$

HF. KOMP. Ex.: in components

Two spacetime models are equivalent if

KÉT TÉRIDÖ MODELL EKVIVALENS, HA

$$(M, g) \sim (\tilde{M}, \tilde{g})$$

there exists a diffeomorphism

DIFFEOMORFIZMUS

LÉTEZIK OLYAN $\phi: M \to \tilde{M}$, HOGY

such that

Hf?

$$\phi^* \tilde{g} = g .$$

By spacetime symmetry we mean a diffeomorphism

A TÉRIDÖ SZIMMETRIÁJA ALATT OLYAN

$$\phi: M \to M$$

such that

DIFFEOMORFIZMUSOKAT ÉRTÜNK, HOGY

$$\phi^* g = g .$$

B)

One parameter group of transformations:

EGYPARAMÉTERES TRANSZFORMÁCIÓ CSOPORT:

$$\phi_t : M \to M$$

differentiable in "t"

t-TŐL DIFF.-HATÓAN FÜGG.

$$\phi_0 = id_M$$

$$\phi_t : \mathbb{R} \times M \to M \quad C^\infty$$

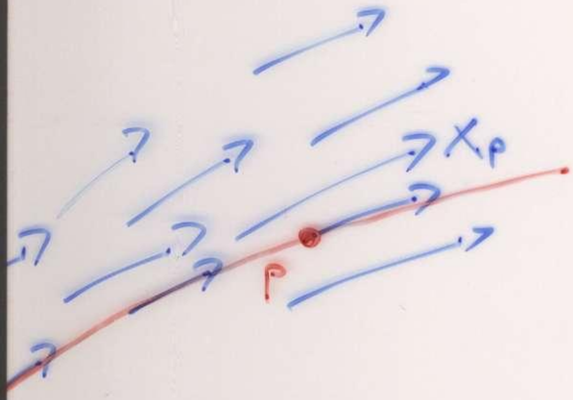
$$(t, p) \mapsto \phi_t(p) \quad \text{LEKÉP.}$$

$$\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}$$

$$\phi_{t+s} = \phi_s \circ \phi_t$$

Integral curve

INTEGRÁL-GÖRBE: $X \in \Gamma(TM)$



$$\gamma : \mathbb{R} \to M$$

$$X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) \quad \text{ily. KOMP.}$$

by the existence and uniqueness theorem

EGZISZTENCIA ÉS UNICITÁS.

Local one-parameter flow, generated by a vector field:

VEKTORMEZŐ ÁLTAL GENERÁLT LOKÁLIS EGYPARAMÉTERES FOLYAM:

$$X \in \Gamma(TM) \implies \phi_t : M \to M$$

$$X(p) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \phi_t(p)$$

[C.] Lie derivative

LIE-DERIVÁLÁS

$$T \in \Gamma(T^{(r,s)} M)$$

$$X \in \Gamma(TM)$$

$$L_X T\Big|_p := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{(\phi_t^* T)_p - T(p)\right\}$$

Obvious properties:

NYILVÁNVALÓ TULAJDONSÁGOK:

Preserves the type of a tensor

1) MEGŐRZI A TENZOR TÍPUSÁT

Linear and preserves the contraction

2) LINEÁRIS ÉS MEGŐRZI A KONTRAKCIÓT.

Satisfies the Leibniz rule:

3) TUDJA A LEIBNIZ-SZABÁLYT:

$$L_X(T\otimes S) = (L_X T)\otimes S + T\otimes(L_X S).$$

In particular cases:

KONKRÉT ESETEKBEN:

$$T = f \in \mathfrak{F}(M)$$

$$L_X f = X(f).$$

$T = Y \in \Gamma(TM)$.

$$(L_X Y)^i = \frac{d}{dt}\left(\phi_t^* Y\right)^i\Big|_{t=0} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j$$ Hf

Hf Show that

$$L_X [Y, Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$$

$$L_X Y = [X, Y]$$

From prop. 3 and 2

3 TUL. + 2 TUL. $\Longrightarrow$

$$L_X(\omega(Y)) = L_X\omega(Y) + \omega(L_X Y)$$

$$\Downarrow$$

$$(L_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]).$$

LEGYEN

Let

a local one-parameter transformation gropup

$\phi_t : M \to M$ LOK. EGY PARAM. DIFF. CSOP.

and

ÉS $X = \frac{d}{dt}\phi_t$

Obviously,

VILÁGOS, HOGY $\phi_t^*(T) = T \iff L_X T = 0$.

Killing vectorfield

2, KILLING - VEKTORMEZŐ.

is a Killing vector filed if

$X \in \Gamma(TM)$ K. V.M., HA

$$\boxed{L_X g = 0}$$

It can be easily proved that

KÖNNYEN BEBIZONYÍTHATÓK AZ ALÁBBI TÉTELEK:

is a local isometry

) X KILLING $\Leftrightarrow$ ϕ_t - JE LOK. IZOMETRIA.

) X —"— $\Leftrightarrow$ $\langle [X,W], Z\rangle + \langle W, [X,Z]\rangle = X(\langle W,Z\rangle)$

) X —"— $\Leftrightarrow$ $\boxed{\langle \nabla_W X, Z\rangle + \langle W, \nabla_Z X\rangle = 0}$ $\forall W, Z$

parallel vector field

) X PÁRHUZAMOS MEZŐ $\Rightarrow$ X KILLING.

geodesic and is Killing

) $\gamma: \mathbb{R} \to M$ GEODETIKUS ÉS X KILLING

$\Rightarrow \langle \dot{\gamma}, X\rangle = \text{const}.$

If vector fields then

) HA X, Y KILLING MEZŐK, AKKOR

is also a K. vector field

$[X,Y]$ IS AZ. $\alpha \in \Gamma(T^*M)$

LEMMA

$$L_X(L_Y\alpha) - L_Y(L_X\alpha) = L_{[X,Y]}\alpha.$$

8. ELŐADÁS

Einstein equations

EINSTEIN - EGYENLETEK

"sharp" operator "flat" operator

A. $\#$ OPERÁTOR, $\flat$ OPERÁTOR

$$\#: \Gamma(T^*M) \to \Gamma(TM)$$

$$\langle \# \omega, Y \rangle = \omega(Y).$$

$$\flat: \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M)$$

$$(\flat X)(Y) = \langle X, Y \rangle$$

TENZOROKON:

Two tensors are physically equivalent if they are connected through sharp of flat operations

KÉT TENZORT FIZIKAILAG EKVIVALENS-NEK TEKINTÜNK HA EGYMÁSBA $\sharp$ ÉS $\flat$ OPERÁTOROKKAL ÁTVIHETŐK.

Elementari properties of curvature (operator):

B, A GÖRBÜLET ELEMI TULAJDONSÁGAI:

1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ /TRIV./

2) $R(\varphi X,Y)Z = \varphi R(X,Y)Z$ /TRIV./

3) $R(X,Y)(\varphi Z) = \varphi R(X,Y)Z$ /HF./

Curvature tensor:

C, GÖRBÜLETI TENZOR:

$$R \in \Gamma(T^{(3,1)}M)$$

$$R(X,Y,Z,\omega) := \omega(R(X,Y)Z)$$

SÁGVÁRI SZITA NYOMDA

TANÉRT

Ricci tensor is

D. RICCI TENZOR

a symmetric type-(2,0) tensor,

EGY SZIMMETRIKUS 2-SZER KOVARIÁNS

which is a contraction of R:

TENZOR: R KONTRAHÁLTJA

$$RIC(X,Y) = \sum_A R(X, E_A, Y, E^A)$$

Ricci scalar:

E. RICCI SKALÁR:

$$S := C_1^1 \# RIC . \qquad / \, S = g^{ij} Ric_{ij} \, /$$

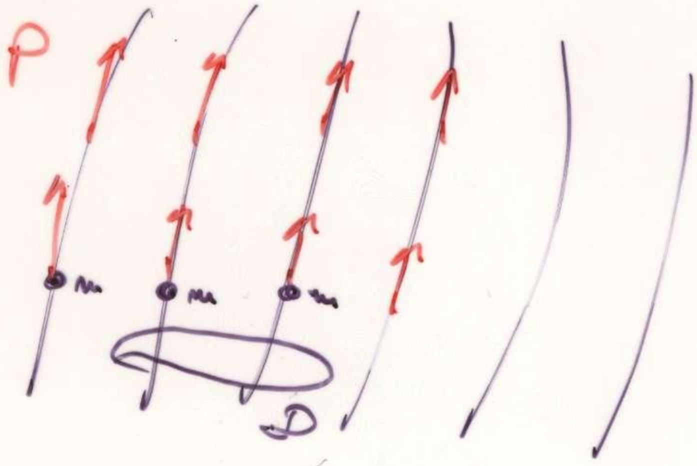
Einstein tensor

F. EINSTEIN-TENZOR

$$G = RIC - \frac{1}{2} S \cdot g$$

Particle flow

G. RÉSZECSKE FOLYAM:



$\langle P, P \rangle = -m^2$

density of particles

η A RÉSZECSKÉK SŰRŰSÉGE.

where D is a space-like region

D EGY TÉRSZERŰ TARTOMÁNY

the number of particles

$\int_D \eta(x)\,dg^{(3)}$ A RÉSZEK SZÁMA.

(P, η) particle flow

Energy-momentum tensor

ENERGIA-IMPULZUS TENZOR.

H

$$E \in \Gamma(T^{(2,0)}M)$$

symmetric

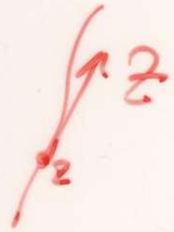
SZIMMETRIKUS

time-like vector field

$E(Z,Z) \geq 0 \quad \forall\ Z$ IDŐ-SZERŰ MEZŐRE.

Physical meaning:

FIZIKAILAG:



Local observer

LOK. MEGFIGYELŐ

the energy measured by the local observer

$E(Z,Z) =$ A LOK. MEGFIGYELŐ RENDSZERÉBEN MÉRT ENERGIA.

Theorem Let be two type-(2,0) symmetric tensors,

1. TÉTEL. E, E' KÉT $T^{(2,0)}$ TÍPUSÚ

such that

TENZOR, SZIMM. ÉS $E(Z,Z) = E'(Z,Z)$

for all observers, then

$\forall$ MEGFIGYELŐRE $\Longrightarrow E = E'$.

H.f. BIZ. BE.

For examples, for a particle flow:

PÉLDÁUL EGY RÉSZECSKE FOLYAMRA

$$\# \quad E = \rho \cdot P \otimes P .$$

Einstein equations

EINSTEIN EGYENLETEK.

$$\boxed{G = 8\pi E}$$

INDOKLÁS Justification:

Newtonian limit

1) NEWTONI LIMESZ.

2) Jó. simply works

3) $\mathrm{div}\, G = 0 \iff \mathrm{div}\, T = 0$

of second order in the metric tensor

4) MÁSODRENDŰ g-BEN.

5) $G = 0 \Rightarrow$ MINKOWSKI.

A SCHWARZSCHILD - TÉRIDŐ

Schwarzschild spacetime

(S^2, h)

$I: S^2 \to \mathbb{R}^3$

$h = I^*\left(\sum_\alpha dx^\alpha \otimes dx^\alpha\right)$

induced metric on

INDUKÁLT METRIKA S^2-N.

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{U} = (u_1)^{-1}\left[(0, 2\mu) \cup (2\mu, \infty)\right]$

$M := S^2 \times \mathcal{U}$

$P: M \to S^2$

$Q: M \to \mathcal{U}$

$r = u^1 \circ Q : M \to (0, 2\mu) \cup (2\mu, \infty)$

$t = u^2 \circ Q : M \to \mathbb{R}$

So,

ÍGY

$1 - \frac{2\mu}{r} : M \to (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

$$g = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 \underbrace{P^* h}_{d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta \, d\phi \otimes d\phi} - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt \otimes dt$$

Properties

TULAJDONSÁGOK

① ~~$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_B$ IDŐ-SZERŰ.~~

Gravitation becomes more and more strong with r --> 0

② GRAVITÁCIÓ $r \to 0$ EGYRE ERŐSEBB.

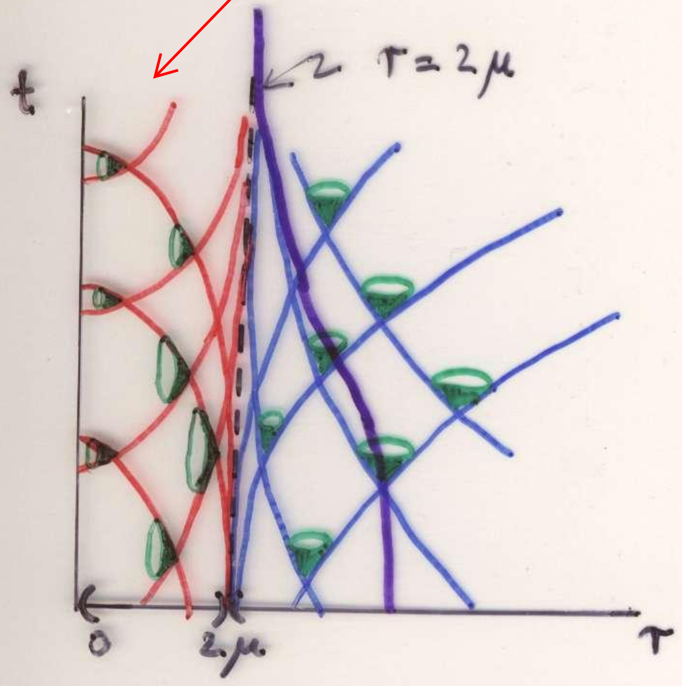
$$R^{ijkl}R_{ijkl} \sim \frac{1}{r^6}$$

it is a vacuum solution but not flat

③ VAKUUM DE NEM LAPOS.

No escape!

④ NINCS MENEKVÉS.



~~HF. MUTASSUK MEG, HOGY EGY ŰRHAJÓ BEJUTVA A SCHW. GÖMB ALÁ, $\tau \le \pi\mu$ SAJÁTIDŐ ALATT BEESIK AZ $r=0$ SZINGULARITÁSBA, FÜGGETLENÜL ATTÓL MEKKORA A RAKÉTA TOLÓEREJE.~~

$$\cancel{1 = -\langle u,u\rangle = \underbrace{\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}_{<0} - \left(1-\frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \underbrace{r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2}_{<0}}$$

Further properties

TULAJDONSÁGOK

(1) constant — are space-like 2-dimensional spheres

$\{t, r$ KONSTANS$\}$ TÉRSZERŰ 2-DIM. GÖMBÖK

of surface

$4\pi r^2$ A FELÜLETÜK.

(2) it is asymptotically flat

ASZIMPTOTIKUSAN LAPOS.

$$r \to \infty \quad g = \eta + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

(3) In Newtonian limit: — gravitational mass

NEWTONI LIMESZBEN: μ = GRAV. TÖMEG

from far distance

TÁVOLRÓL NÉZVE.

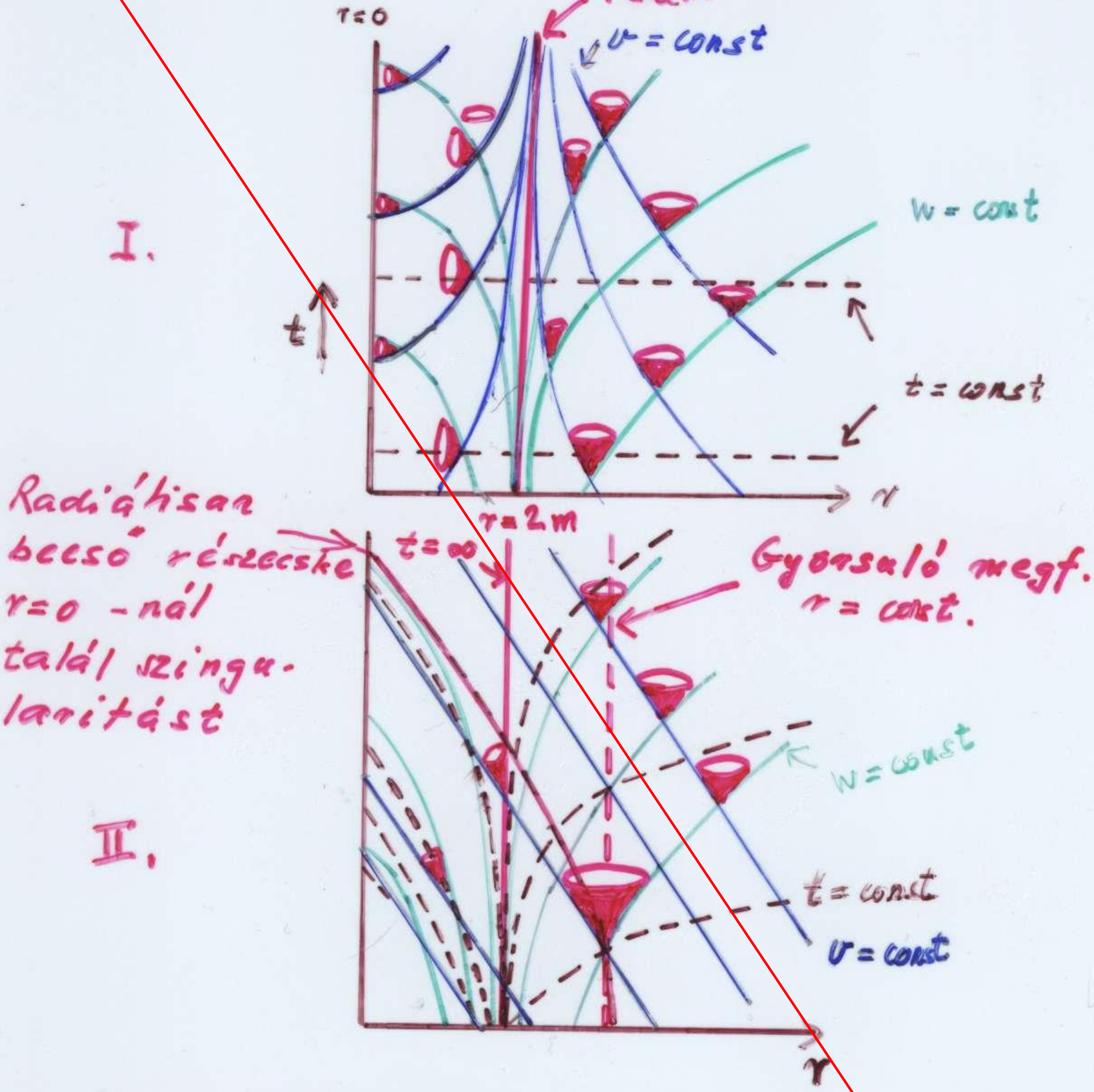
(4) ~~UNIQUE: BÁRMELY GÖMBSZIMMETRIKUS VÁKUUM MEGOLDÁS LOKÁLISAN IZOMETRIKUS A SCHW. MEGOLDÁSSAL.~~

(5) static, that is — is a time-like Killing v. field

$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_N$ IDŐSZERŰ KILLING

(6) ~~VÁKUUM DE NEM LAPOS.~~

A SCHWARZSCHILD MEGOLDÁS
(θ, φ) metszete



I. (t, r) diagram

II. Finkelstein diagram (v, r) koordinátákban. r=2m null felület a t=∞ -nen.

Extension of a specetime

TÉRIDŐ KITERJESZTÉSE:

spacetime

(M, g) TÉRIDŐ

spacetime

(M', g') TÉRIDŐ

is an extension of

if ther exists an

(M', g') (M, g) KITERJESZTÉSE, HA LÉTEZIK

embedding

such that

OLYAN $\varphi: M \to M'$ BEÁGYAZÁS, HOGY

$$\varphi^* g' = g.$$

THE END

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2\mu}{r}} = r + 2\mu \log(r - 2\mu)$$

$$v = t + r^*$$

$$w = t - r^*$$

I. (v, r, θ, φ) Eddington-Finkelstein.

$$\overset{I}{g} = -\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dv \otimes dv + 2\, dv \otimes dr +$$

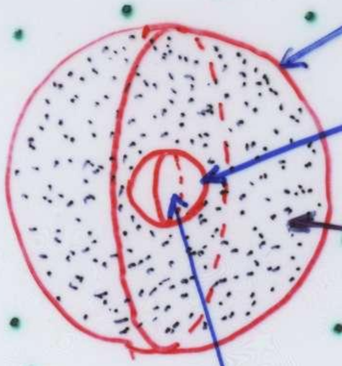
$$+ r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta \, d\varphi \otimes d\varphi\right)$$

$(0 < r < \infty)$!

$P(N) \times \tau(N)$

NORMAL

SCHW



$r = 2\mu \notin P(M) \times r(M)$

$r = 0 \notin P(M) \times r(M)$

$P(B) \times r(B)$

BLACK HOLE

$\notin P(M) \times r(M)$

TEKINTSÜK MOST $B \subset M$; $B = \tau^{-1}(0, 2\mu)$.

SCHWARZSCHILD BLACK HOLE.

$(B, g|_B)$ TÉRIDŐ

TEKINTSÜK A dt ÉS dr BÁZIS KOVEKTOROK DUÁLISAIT.

$$P_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = P_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = 0$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u_2} \qquad Q_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial u_1}$$

$N \subset M \qquad N = r^{-1}(2\mu, \infty)$

$g|_N$ EGY LORENTZ-METRIKA N-EN.

$\boxed{(N, g|_N) \quad \text{NORMÁLIS SCHWARZSCHILD-TÉRIDŐ}}$

$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_N$ IDŐ-SZERŰ

$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_N$ TÉR-SZERŰ

GÖMBSZIMMETRIKUS VÁKUUM TÉRIDŐ EGY GÖMBSZIMMETRIKUS μ TÖMEGŰ TEST <u>KÖRÜL</u>.

SŐT,

$$\frac{1}{2}(v-w) = r + 4\mu \log(r-2\mu)$$

$$v' = e^{v/4\mu}$$

$$w' = -e^{-w/4\mu}$$

$$F^2 = e^{-\frac{r}{2\mu}} \cdot 16\mu \frac{1}{r}$$

$$x' = \frac{1}{2}(v' - w')$$

$$t' = \frac{1}{2}(v' + w')$$

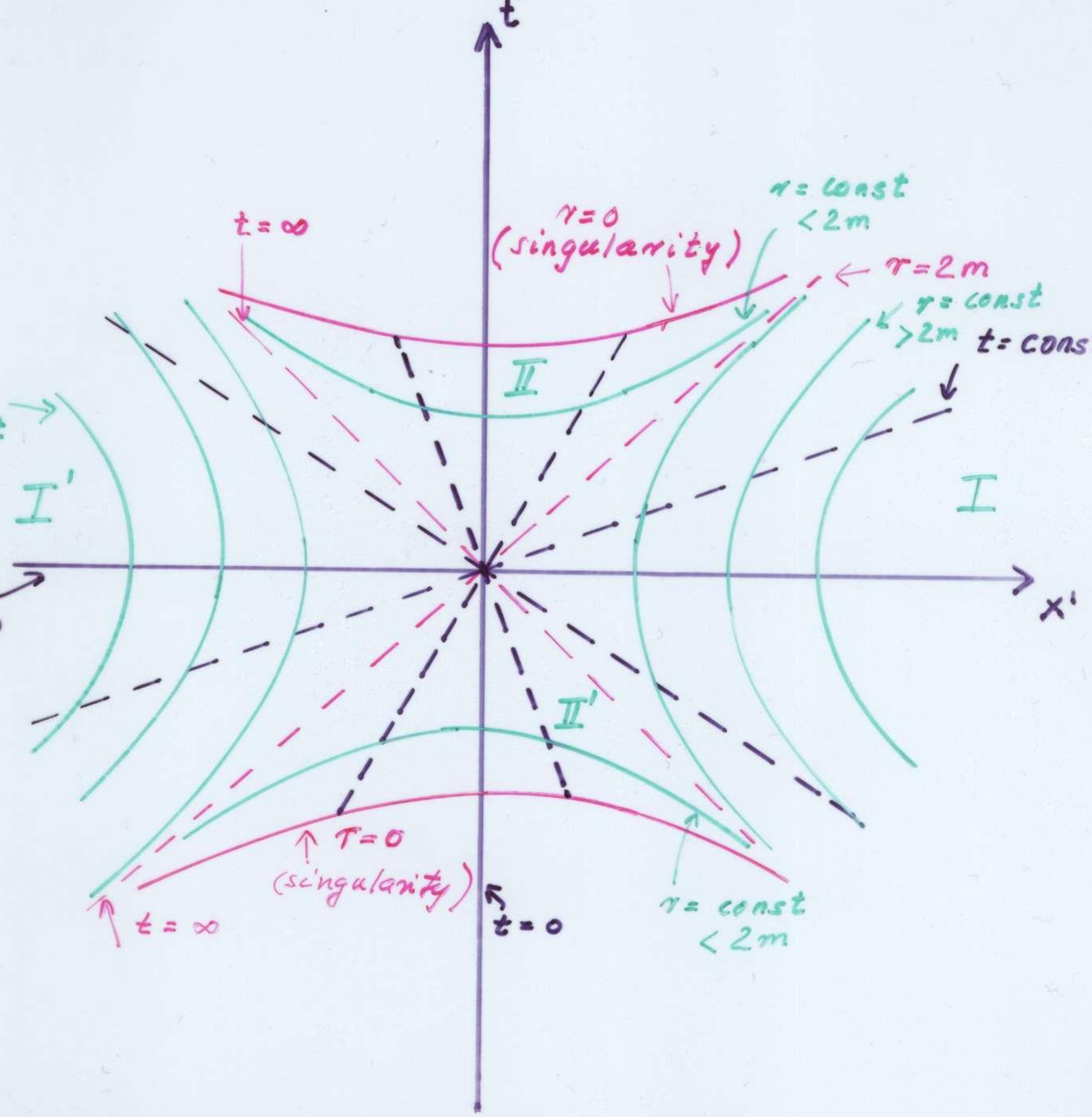
$$\boxed{(t', x', \theta, \varphi) \qquad (t')^2 - (x')^2 < 2\mu}$$

$$\mathcal{M}^*$$

$$g^* = F^2(t', x')(-dt' \otimes dt' + dx' \otimes dx') + r^2(t', x')(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta \, d\varphi \otimes d\varphi)$$

$(\mathcal{M}^*, g^*)$ KRUSKAL - SZEKERES TÉRIDŐ

The maximal analytic Schwarzschild extension



I $\quad x' > |t'| \sim$ SCHW. $\quad r > 2\mu$.

$\underline{I \cup II}$ $\quad x' > -t' \quad (M', g')$

$\underline{I \cup II'}$ $\quad x' > t' \quad (M'', g'')$

I' $\quad x' < -|t'| \sim$ SCHW. $\quad r > 2\mu$.

$\mathcal{A}^{I} = (u^1)^{-1}[(0,\infty)]$

$M^{I} = S^2 \times \mathcal{A}$

(M^I, g^I) TÉRIDŐ. KITERJESZTÉSE

$(N, g|_N)$ ÉS $(B\ g|_B)$-NEK EGYSZERRE.

$r = 2m \subset (M^I, g^I)$ FÉNY-SZERŰ FELÜLET.

HASONLÓAN (w, r, θ, φ)

$\mathcal{A}^{II} = (u^1)^{-1}[(0,\infty)]$

$M^{II} = S^2 \times \mathcal{A}$

(M^{II}, g^{II}) AHOL

$$g^{II} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw \otimes dw - 2\, dw \otimes dr + r^2 \underbrace{\rho^* h}_{(d\theta\otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi\otimes d\varphi)}$$