# Diszkrét analitikus függvények

**SZAKDOLGOZAT**

**Szabó Máté**
*ELTE*
*matematikus hallgató*

**Témavezető:**
**Lovász László**
*egyetemi tanár*
*ELTE Matematika Intézet*
*Számítógéptudományi Tanszék*

*Icusnak*
*Tóth Attilának*
*Zalánnak*
*Józsinak*
*Áronnak*
*Zsigának*
*Titkosnak*

# Tartalomjegyzék

**Bevezetés** **4**

**1. A klasszikus modell** **5**
1.1. Diszkrét analitikus függvények a négyzetrácson . . . . . . . . 5
1.2. Deriváltfüggvény . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
1.3. Polinomok és bipolinomok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

**2. A klasszikus és a Mercat-féle modell közti átmenet** **20**
2.1. Diszkrét analitikus függvények mint függvénypárok . . . . . . 20
2.2. Harmonikus függvények gráfokon . . . . . . . . . . . . . . . . 21
2.3. Gráfkonstrukciók . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
2.4. Áramok, Hodge-dekompozíció . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

**3. A Mercat-féle modell** **28**
3.1. Az analicitás kiterjesztett fogalma . . . . . . . . . . . . . . . 28
3.2. Topológiai tulajdonságok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
3.3. Integrálás és kritikus analitikus függvények . . . . . . . . . . 39

**4. A Novikov-féle modell** **44**
4.1. Elsőrendű háromszög-operátorok háromszögelt felületeken . . 44
4.2. Holomorf függvények az euklideszi síkon . . . . . . . . . . . . 45

**5. Irodalomjegyzék** **52**

## Bevezetés

A természettudományokban a múlt század folyamán természetessé vált, hogy a tudomány entitásai diszkrétek. Elég csak az atom modelljeinek alakulására vagy a részecskefizikára gondolnunk. Ugyanakkor ezen tudományok matematikai háttere folytonos elmélet maradt, ez persze szoros összefüggésben áll azzal, hogy a teret és az időt többnyire továbbra is folytonosnak tekintjük. Néha mégis úgy tűnik, hogy a tudományok tradicionálisan nagyobb folytonos matematikai apparátust használnak, mint az esetleg indokolt lenne. Ezzel párhuzamosan, a számítástechnika és a számítógéptudomány fejlődésével a folytonos elméletek konkrét, numerikus értékeit számítógépek segítségével számolják ki, azaz a folytonos elméletet diszkrét eszközökkel approximálják. Noha a diszkrét matematika és a számítógéptudomány fiataloknak számítanak a tudományok között, apparátusuk talán már duzzadt akkorára, hogy érdemes legyen kisérletet tenni a tudomány egyéb területeit is –amiket eddig hagyományosan folytonos matematika „szolgált ki"– diszkrét háttérrel ellátni.

A folytonos matematika talán legfontosabb eszközei a természettudományok számára a differenciálható és integrálható függvények. Így merült fel bennem, hogy dolgozatomban áttekintsem eddigi tudásunkat a diszkrét analitikus és harmonikus függvényekről. Ezek tanulmányozása igen korán megjelent a diszkrét matematikában, legelőször Ferrand foglalkozott velük az 1940-es évek derekán, majd Duffin ([2]) dolgozott ki alapvető eredményeket az 1950-es évek folyamán. A Duffin által kidolgozott diszkrét modellel –amelyet dolgozatomban „klaszikus modell"-nek nevezek– sokan foglalkoztak a későbbiekben. Ezek mind a síkon lévő egységnégyzetrácson értelmezett diszkrét függvényekkel foglalkoznak. Tulajdonképpen ezt a modellt fejlesztette tovább Mercat ([9]) a 2000-es években, kiterjesztve az analitikus függvények fogalmát a tetszőleges irányított felületekbe beágyazott gráfokon értelmezett függvényekre. Ezektől egy eltérő megközelítést alkalmaznak Novikov és kollégái ([3]), ám eredményeik analógok a korábbi modellekével, noha direkt átjárás nincs köztük.

Mindegyik modellről elmondható, hogy a folytonos elmélet „árnyékában" haladnak, azaz törekszenek nem csak a kiindulásnál alapul venni a már meglévő eredményeket, hanem szem előtt tartják, hogy analóg állításokat tudjanak megfogalmazni (Cauchy-Riemann egyenlőség, Reziduum tétel stb.), illetve hogy jól tudják diszkrét függvényekkel közelíteni az „eredetieket".

Köszönöm témavezetőmnek, Lovász Lászlónak a végtelen türelmet és a rengeteg időt, melyet rám fordított.

# 1. A klasszikus modell

## 1.1. Diszkrét analitikus függvények a négyzetrácson

A komplex síkon tekintsük a Gauss-egészek által meghatározott egységnégyzetrácsot, azaz a $\mathbb{Z}[i] = \{m + in : m, n\epsilon\mathbb{Z}\}$ ponthalmazt, jelöljük ezt $\mathcal{L}$-el. A négyzetrácson $a$ és $b$ közti útnak nevezzük a rácspontok egy olyan $(z_0, z_1, ..., z_\mathrm{n})$ sorozatát, melyre $z_0 = a$, $z_\mathrm{n} = b$ és $(z_{\mathrm{k}+1} - z_\mathrm{k}) \in \{1; -1; i; -i\}$ minden $k = 0, ..., n-1$ esetén. Tekintsünk most egy $f : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ függvényt, ekkor kézenfekvő a függvény $a$ és $b$ közti integrálját a $(z_0, z_1, ...z_\mathrm{n})$ út mentén a következőképpen definiálni:

$$\int_a^b f\delta z_0...z_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(z_{k+1}) + f(z_k)}{2}(z_{k+1} - z_k) \tag{1}$$

A komplex síkon értelmezett „valódi” analitikus függvények esetében megszoktuk, hogy az integrál független az úttól. Amennyiben $f$ egy a síkon értelmezett $g$ analitikus függvény megszorítása $\mathcal{L}$-re és integrálját (1) szerint számítjuk ki, úgy $f$ integrálja sajnos nem feltétlenül lesz független az úttól, azaz amennyiben $(q_0, q_1, ..., q_\mathrm{m})$ egy másik $a$ és $b$ közti út, úgy nem feltétlenül fog teljesülni, hogy

$$\int_a^b f\delta z_0...z_n = \int_a^b f\delta q_0...q_m$$

Természetesen az úttól való függés nem lesz nagy, hiszen a fenti integrál közelíti $g$ „valódi” integrálját. Ez a sikertelenség azonban azt sugallja, hogy máshogy próbáljuk meg diszkrét függvényekkel közelíteni az analitikus függvéneket, mégpedig úgy, hogy integráljuk független legyen az úttól.

Próbáljuk meg megérteni azon $\mathcal{L}$-en értelmezett függvények struktúráját, amelyek integrálja független az úttól. Az integrál úttól való függetlensége ekvivalens azzal, hogy a függvény integrálja eltűnik minden zárt úton, ami pedig azzal ekvivalens, hogy a függvény integrálja eltűnik minden egységnégyzeten, azaz amennyiben egy négyzetet pozitív irányban járunk körbe és bal-alsó sarka $z$, úgy az út amelyen integrálunk $(z, z+1, z+1+i, z+i)$ lesz és azt követeljük meg, hogy

$$\frac{f(z+1)+f(z)}{2}+i\frac{f(z+1+i)+f(z+1)}{2}$$
$$+(-1)\frac{f(z+1+i)+f(z+i)}{2}+(-i)\frac{f(z+i)+f(z)}{2}=0$$

teljesüljön, amiből átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(z+1+i)-f(z)}{i+1}=\frac{f(z+1)-f(z+i)}{1-i}$$

amire úgy is tekinthetünk, mint a derivált egyértelműségének diszkrét alakja vagy akár mint a Cauchy-Riemann egyenlőség diszkrét megfelelője (elforgatás után).

**Definíció** *Legyen $\Omega \subseteq \mathcal{L}$ a sík egy olyan részhalmaza, amely egységnégyzetek uniója, egy $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvényt akkor hívunk **diszkrét analitikus függvény**nek $\Omega$-n, ha minden egységnégyzetre teljesül, hogy*

$$\frac{f(z+1+i)-f(z)}{i+1}=\frac{f(z+1)-f(z+i)}{1-i} \tag{2}$$

**Megjegyzés** Amennyiben $\Omega$ megegyezik $\mathcal{L}$-el, akkor $f$-et *egészfüggvény*nek nevezzük.

A definícióban lévő (2) képlet további átrendezése után kapjuk, hogy

$$f(z)+if(z+1)+i^2f(z+1+i)+i^3f(z+i)=0 \tag{3}$$

Vezessük be a következő eltolás operátorokat, $X$-et és $Y$-t

$$X^nf(z):=f(z+n) \text{ valamint } Y^nf(z):=f(z+in)$$

Az $X$,$Y$ és $I$ operátorok segítségével (ahol $I$ az identitást jelöli) definiáljuk az $L$ operátort a következőképpen

$$L:=I+iX+i^2XY+i^3Y$$

azaz korábbi jelöléseink alapján

$$Lf(z)=f(z)+if(z+1)+i^2f(z+1+i)+i^3f(z+i)$$

Jól látható, hogy egy $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor analitikus függvény $\Omega$-n, ha $Lf(z) = 0$ minden olyan $z$-re, ahol $z$ egy $\Omega$-beli egységnégyzet bal alsó sarka.

Írjuk fel az analicitás feltételét a (3) alakban az $f(z) = u(z) + iv(z)$ formában megadott $f$ függvényre, ahol tehát $u$ és $v$ valós értékű függvények, azaz $u : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ és $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$u(z+1+i) - u(z) = v(z+i) - v(z+1) \quad \text{illetve}$$

$$u(z+i) - u(z+1) = v(z) - v(z+1+i) \tag{4}$$

amit tekinthetünk a Cauchy-Riemann egyenlőség újabb alakjának.

Példaként arra, hogy a diszkrét analitikus függvények osztálya nem lett túl szűk, álljon itt egy konstrukció egészfüggvények előállítására:

**Állítás** *Amennyiben egy $f$ függvény értékeit tetszőlegesen előírjuk az $x$- és az $y$-tengelyen, úgy $f$ egyértelműen terjeszthető ki egészfüggvénnyé.*

*Bizonyítás.* Az állítás teljesen nyilvánvaló, nézzük csak az első síknegyedre: $f(0), f(1)$ és $f(i)$ egyértelműen meghatározzák $f(1+i)$ értékét, hogy $Lf(0) = 0$ teljesüljön. Ezután megadható $f(2+i), f(3+i)$...stb értéke majd $f(1+2i), f(2+2i)$...stb. ■

Nézzük hogyan állíthatunk elő további további analitikus függvényeket a már meglévőkből. Az analicitás természetesen megőrződik eltolás esetén. Legyen adott az $f$ analitikus függvény, forgassuk ezt el pozitív irányba 90°-al, így kapjuk az $\hat{f}(z) = f(-iz)$ függvényt, ekkor ha valamely egységnégyzetre $Lf(z) = \sigma$ teljesült, akkor $\hat{f}$-ra teljesül, hogy $L\hat{f}(z) = f(z+i) + if(z) - f(z+1) - if(z+1+i) = i\sigma$, azaz a 90°-al való forgatás is megőrzi az analicitást. Jelölje $\bar{z}$ a komplex konjugálást, azaz $z = m + in$ esetén $\bar{z} = m - in$, ami mint a sík transzformációja, az $x - tengely$re való tükrözésnek felel meg. Megmutatjuk, hogy a tükrözés és konjugálás egymás után való alkalmazása szintén megőrzi az analicitást, ugyanis $\check{f}(z) := \overline{f(\bar{z})}$ esetén $L\check{f}(z) = \overline{f(z+i)} + i\overline{f(z+1+i)} - \overline{f(z+1)} - i\overline{f(z)} = -i\bar{\sigma}$, ami valóban akkor és csak akkor 0, ha $Lf(z) = 0$.

A továbbiakban szükségünk lesz egy olyan operátorra is, amely egy egységnégyzet jobb-felső sarkából indulva végzi el az integrálást pozitív körüljárás szerint.

Eddigi jelöléseink alapján ez az $L'$ operátor a következő alakban írható:

$$L' = I + i^3X^{-1} + i^2Y^{-1}X^{-1} + iY^{-1}$$

azaz

$$L'f(z) = f(z) + i^3 f(z-1) + i^2 f(z-1-i) + if(z-i)$$

Írjuk fel ezen két operátor szorzatát és jelöljük ezt $-D$-vel:

$$-D = L'L = LL' = (I+i^3X^{-1}+i^2Y^{-1}X^{-1}+iY^{-1})(I+iX+i^2XY+i^3Y)$$
$$= 4 - YX - Y^{-1}X - YX^{-1} - Y^{-1}X^{-1}$$

vagyis
$Df(z) = f(z+1+i) + f(z-1+i) + f(z-1-i) + f(z+1-i) - 4f(z)$

azaz $D$ egy $2 \times 2$-es négyzet csúcsain összeadja a függvényértékeket és az összegből kivonja a középpontban felvett függvényértéket.

**Definíció** *Az $f$ függvényt **harmonikus**nak nevezzük a $z$ pontban, ha $Df(z) = 0$ teljesül.*

Ha $f$ egy $\Omega$-n értelmezett analitikus függvény, akkor $D = -L'L$ miatt jól látható, hogy $f$ harmonikus $\Omega$ belső pontjaiban ($\Omega$ belső pontjai értelemszerűen azok a $z$ Gauss-egészek, amelyekre a $\{z+1; z-1; z+i; z-i\}$ Gauss-egészek halmaza is $\Omega$-hoz tartozik). Mivel a $D$ operátor valós, ezért azt kapjuk, hogy az analitikus $f$ függvény valós és képzetes része is harmonikus.

Ennek a „fordítottja" is igaz, vagyis harmonikus függvényeket használhatunk analitikus függvények konstruálására is. Legyen ugyanis $h$ egy $\mathcal{L}$-en értelmezett függvény és $f$ legyen az $f = L'h$ képlettel definiálva. Ekkor mindkét oldalra alkalmazva $L$-et azt kapjuk, hogy $Lf = LL'h = -Dh$, azaz ha a $h$ függvény harmonikus $z$-ben, akkor $f$ analitikus a $z$-hez tartozó egységnégyzeten.

A harmonikus függvény elnevezés motivációjára szolgál az alábbi

**Állítás** *Ha $u : \Omega \to \mathbb{R}$ egy egyszeresen összefüggő halmaz rácspontjain értelmezett valós függvény amely harmonikus $\Omega$ belső pontjaiban, akkor $u$ egy $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analitikus függvény valós része.*

Térjünk most vissza a diszkrét analitikus függvények integrálásához. Tetszőleges $\mathcal{L}$-en értelmezett függvényre ez (1) szerint az $a$ és $b$ közti $(z_0, z_1, ...z_n)$ útra a következő volt

$$\int_a^b f\delta z_0 ... z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(z_{k+1}) + f(z_k)}{2} (z_{k+1} - z_k)$$

ami zárt görbe, azaz $a = b$ esetén a következőképpen módosul (ahol természetesen $z_{\text{-}1} = z_{\text{n-1}}$-t jelenti)

$$\int_a^b f\delta z_0 ... z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(z_k)}{2} (z_{k+1} - z_{k-1}) \tag{5}$$

Jelöljük most $\gamma$-val az egységnégyzet pozitív irányú körbejárását, ekkor (5) alapján azt kapjuk, hogy

$$2 \int_\gamma f\delta z = (1-i)f(z) + (1+i)f(z+1) + (-1+i)f(z+1+i) + (-1-i)f(z+i)$$

$$= (1-i)(f(z) + if(z+1) + i^2 f(z+1+i) + i^3 f(z+i) = (1-i)Lf(z)$$

Nyilvánvaló, hogy amennyiben véges sok egységnégyzet uniója egy egyszeresen összefüggő halmazt alkot, akkor a halmaz határán, mint görbén vett integrál megegyezik a halmazt alkotó egységnégyzetek határain vett integrálok összegével. Jelölje $\Omega$ egy egyszeresen összefüggő halmaz rácspontjait, határát pedig jelölje $\omega$, ekkor

$$\int_\omega f\delta z = \frac{(1-i)}{2} \sum_{\gamma\epsilon\Omega} Lf \tag{6}$$

ahol $\sum_{\gamma\epsilon\Omega} Lf$ a $\Omega$ egységnégyzetein vett integrálok összegét jelöli. Ha $f$ egy $\Omega$-n értelmezett analitikus függvény, akkor (6) jobboldalán természetesen 0 áll, vagyis azt kaptuk, hogy

$$\int_\omega f\delta z = 0 \tag{7}$$

Legyen $a$ és $u$ két tetszőleges pontja $\Omega$-nak, ekkor $f$ *integrálfüggvény*e a következő alakú

$$F(u) = \int_a^u f\delta z$$

jól látszik (7)-ből, hogy $F(u)$ valóban független az úttól.

**Állítás** *Ha $f$ egy diszkrét analitikus függvény az egyszeresen összefüggő $\Omega$-n, akkor integrálfüggvénye, $F$ szintén diszkrét analitikus függvény $\Omega$-n.*

*Bizonyítás.* Legyen $p$ és $q$ két egymást követő pont az $a$ és $u$ közti úton, ekkor az integrálás (1)-beli definíciója szerint

$$F(p) - F(q) = \frac{f(p) + f(q)}{2}(p - q) \quad \text{azaz}$$

$$\frac{F(p) - F(q)}{p - q} = \frac{f(p) + f(q)}{2} \tag{8}$$

utóbbit egy egységnégyzetre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$2(F(z + 1 + i) - F(z)) = f(z) + f(z + 1) + if(z + 1) + if(z + 1 + i)$$

valamint

$$2i(F(z+i) - F(z+1)) = -f(z+1) + i^2 f(z+1+i) - if(z+1+i) + i^3 f(z+i)$$

jól látható, hogy a két egyenlőség összege a $-2LF = Lf$ egyenlőséget adja, így $LF = 0$ teljesül minden $\Omega$-beli egységnégyzetre.■

## 1.2. Deriváltfüggvény

A művelet „megfordításához”, azaz a derivált bevezetéséhez szükségünk lesz a duális függvény fogalmára.

**Definíció** *Legyen $f$ egy tetszőleges $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvény, ekkor $f$ **duális függvénye** az az $f^* : \Omega \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $f^*(m + in) = (-1)^{m+n}\overline{f(m + in)}$ teljesül.*

**<u>Állítás</u>** *Ha $f$ analitikus függvény $\Omega$-n, akkor $f^*$ is analitikus függvény $\Omega$-n.*

*Bizonyítás.* Legyen $z = m + in$ alakú. Megmutatjuk, hogy fennáll az alábbi

$$\overline{Lf(z)} = (-1)^{m+n} Lf^*(z) \tag{9}$$

Ennek igazolása nyilván elegendő az állítás belátásához. (9) baloldala a következőképpen írható

$$\overline{Lf(z)} = \overline{Lf(m+in)} =$$

$$= \overline{f(m+in)} - i\overline{f(m+1+in)} + i^2\overline{f(m+1+in+i)} - i^3\overline{f(m+in+i)}$$

míg (9) jobboldala ezt az alakot ölti

$$(-1)^{m+n} Lf^*(m+in) =$$

$$= (-1)^{m+n}(-1)^{m+n}\overline{f(m+in)} +$$

$$+ (-1)^{m+n}(-1)^{m+1+n} i\overline{f(m+1+in)} +$$

$$+ (-1)^{m+n}(-1)^{m+1+n+1} i^2\overline{f(m+1+in+i)} +$$

$$+ (-1)^{m+n}(-1)^{m+n+1} i^3\overline{f(m+in+i)}$$

jól látható, hogy a második és negyedik tag együtthatója negatív, ami igazolja (9)-et. ■

A duális függvény fogalmának segítségével definiálhatjuk az $F : \Omega \to \mathbb{C}$ függvény deriváltját, ahol $\Omega$ egyszeresen összefüggő, $a$ és $b$ az $\Omega$ két tetszőleges pontja, $k$ pedig egy tetszőleges konstans, ekkor

$$f(u) := \left\{ 4 \int_b^u F^*(z) \delta z + k \right\}^* \tag{10}$$

**Állítás** *Ha $F$ analitikus függvény az egyszeresen összefüggő $\Omega$-n, akkor $f$ is analitikus $\Omega$-n és $F(u)$ előáll*

$$F(u) = \int_a^u f(z)\delta z + F(a) \tag{11}$$

*alakban.*

*Bizonyítás.* Vegyük a duálisát (10) mindkét oldalának, így azt kapjuk, hogy

$$f^* = 4\int_b^u F^*\delta z + k$$

ekkor (8)-t felírva két szomszédos $\Omega$-beli $p, q$ pontra

$$\frac{f^*(p) - f^*(q)}{p-q} = \frac{4(F^*(p) + F^*(q))}{2}$$

$$f^*(p) - f^*(q) = 2(p-q)(F^*(p) + F^*(q)) \tag{12}$$

mivel $(p-q) \in \{1; -1; i; -i\}$, így $\overline{(p-q)} = 1/(p-q)$, így (12) mindkét oldalának konjugáltját véve kapjuk, hogy

$$(f(p) - f(q))(p-q) = 2(F(p) - F(q))$$

ez maga (8), amelynek (11) a következménye. ■

**Megjegyzés** Jól látszik, hogy a derivált csak $k^*$, azaz csak egy $c \cdot (-1)^{m+n}$ erejéig lehet egyértelmű.

Természetesen más, kényelmesebbnek tűnő módon is megpróbálhatjuk a deriváltfüggvény analogonját előállítani. Legyen $f$ egészfüggvény, legyen $\sigma$ egy tetszőleges Gauss-egész és tekintsük a következő függyvényt

$$(\partial_\sigma f)(z) := \frac{f(z+\sigma) - f(z)}{\sigma}$$

<u>**Állítás**</u> *Ha $f$ egészfüggvény, akkor tetszőleges $\sigma$ Gauss-egészre a $\partial_\sigma f$ függvény is az.*

*Bizonyítás.* $L(\partial_\sigma f)(z) = \dfrac{Lf(z+\sigma)}{\sigma} - \dfrac{Lf(z)}{\sigma}$ ■

Amennyiben most $F(u) = \displaystyle\int_a^u f\delta z$ és $\sigma \in \{1; -1; i; -i\}$, akkor

$$(\partial_\sigma F)(z) := \frac{f(z+\sigma)+f(z)}{2}$$

Jól látszik, hogy ha $f$-et minden $m+in$ alakú pontaban eltoljuk $c \cdot (-1)^{m+n}$-el, akkor az integrál nem változik meg, azaz az integrálfüggvény nem határozza meg $f$-et, csak $c \cdot (-1)^{m+n}$ erejéig. Azonban ha valamely pontban rögzítjük $f$ értékét úgy $\sigma \in \{1; -1; i; -i\}$ esetén visszakaphatjuk $f$ értékeit egyenként.

Vegyük szemügyre, hogy mit ad nekünk (6) egy olyan függvényre, aminek esetleg nem minden egységnégyzeten tűnik el az integrálja. A formális hasonlóság kedvéért mindkét oldalt szorozzuk meg $1/2\pi i$-vel, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\omega f\delta z = \frac{-1-i}{4\pi}\sum_{\gamma\epsilon\Omega} Lf$$

ami formálisan teljesen analóg a folytonos elméletből ismert *Reziduum tétel*lel.

## 1.3. Polinomok és bipolinomok

A folytonos elméletben a differenciálási szabály megértése után azonnal szembeötlik, hogy a síkon értelmezett összes polinom differenciálható. Jogosan vetődik fel a kérdés, hogy mit tudunk a diszkrét esetben mondani a polinomokról? Sajnos nem minden polinom[1] lesz analitikus, de érdeklődésünk középpontjában természetesen a diszkrét analitikus polinomok fognak állni.

Ezen kérdések vizsgálatához szükségünk lesz az úgynevezett bipolinomok fogalmára. A bipolinomok bevezetéséhez először vegyük észre, hogy a Gauss-egészek által meghatározott négyzetrács pontjait szétoszthajuk „páros” és

[1]A síkon értelmezett polinomokat kétváltozós polinomnak fogjuk tekinteni, noha sokszor az egyváltozós írásmódot követjük. Tehát $f(z)$ nem feltétlenül lesz $z$ polinomja.

„páratlan” pontok halmazára, az adott $m+in$ pontra $m+n$ paritását tekintve. Így már érthető lesz a bipolinomok következő értelmezése

**Definíció** *Egy $\mathcal{L}$-en értelmezett $f$ függvényt **bipolinomnak** nevezünk, ha $f$ a négyzetrács páros illetve páratlan pontjain egy-egy polinom értékeit veszi fel.*

A polinomokkal való bánást nagyban megkönnyíti az alábbi alapvető észrevétel

**Állítás** *Ha az $f$ függvényre teljesül, hogy mind $f(m+1+in)-f(m+in)$ mind $f(m+in+i)-f(m+in)$ polinomok, akkor $f$ is polinom.*

*Bizonyítás.* $f(m+1+in)-f(m+in)$-ből következik, hogy $n$ minden értékére $f$ polinomja $m$-nek, amelynek az együtthatói csak $n$-nek a függvényei. $f(m+in+i)-f(m+in)$-ből pedig az következik, hogy az együthatók függvényei $n$ polinomjai. ■

Az állításból az egységnégyzetrács 45°-os negatív irányú forgatása után közvetlenül adódik az alábbi

**Állítás** *Ha az $f$ függvényre teljesül, hogy mind $f(m+1+in+i)$ $-f(m+in)$ mind $f(m+1+in-i)-f(m+in)$ bipolinomok, akkor $f$ is bipolinom.*

**Következmény** *Ha $f$ egy diszkrét analitikus polinom (bipolinom), akkor integrálfüggvénye, $F$ is diszkrét analitikus polinom (bipolinom).*

*Bizonyítás.* Az integrálfüggvényről tudjuk, hogy ha az integrálás során $p$ és $q$ két egymást követő pont, akkor (8), azaz $\dfrac{F(p)-F(q)}{p-q}=\dfrac{f(p)+f(q)}{2}$ teljesül, így a polinomságra (bipolinomságra) tett kikötések nyilván teljesülnek. ■

Szükségünk lesz az alábbi módon definiált függvények sorozatára:

$$\rho_{n+1}(z) := (n+1)\int_0^z \rho_n(u)\delta u \tag{13}$$

$$\rho_0 := 1$$

Az előbbi *következmény*ből azt kapjuk, hogy a $\rho_i$ függvények valóban diszkrét analitikus polinomok, hiszen minden $i$-re $\rho_{i+1}$ a $\rho_i$ integrálfüggvénye. Megmutatjuk, hogy a $\rho_i$ polinomokkal jól közelíthetőek $z$ hatványai, mint polinomok, pontosabban igaz a következő

**Állítás** *$\rho_n(z) = z^n + h_n$ teljesül minden $n$-re, ahol $h_n$ egy legfeljebb $n-2$ fokú polinom.*

*Bizonyítás.* $n$-re történő indukcióval. $n = 0$-ra az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n = k$, ekkor (8) miatt

$$\rho_{k+1}(z+\epsilon) - \rho_{k+1}(z) = \frac{\epsilon(k+1)(\rho_k(z+\epsilon)+\rho_k(z))}{2} \tag{14}$$

ahol $\epsilon$ az $\{1; -1; i; -i\}$ halmaz elemeinek valamelyikét jelöli. Jelölje $\delta f$ az $f(z+\epsilon) - f(z)$ különbséget, ekkor (14)-t alkalmazva

$$\delta h_{k+1} = \delta\rho_{k+1} - \delta z^{k+1} = \frac{\epsilon(k+1)((z+\epsilon)^k + z^k)}{2} + \epsilon(h_k(z+\epsilon) + h_k(z)) - \delta z^{k+1}$$

az indukciós feltevés szerint $\epsilon(h_k(z+\epsilon) + h_k(z)) = O(|z|^{k-2})$. A másik két tagban pedig a $k+1$-edik, $k$-adik és $k-1$-edik kitevőjű hatványok pont kiejtik egymást, így azt kapjuk, hogy $\delta h_{k+1} = O(|z|^{k-2})$. Ebből következik, hogy $h_{k+1} = O(|z|^{k-1})$, azaz $h_{k+1}$ foka legfeljebb $k-1$, ahogyan azt állítottuk. $\blacksquare$

**Következmény** *A $\rho_i$ polinomok lineárisan függetlenek.*

**Megjegyzés** Könnyen igazolható, hogy $|\rho_n(z) - z^n| \leq n!2^n|z|^{n-2}$

A továbbiakban egy $p$ polinom fokát jelöljük $deg(p)$-vel. Egy bipolinom fokán pedig értsük a páros és páratlan részhálókon értelmezett polinomok fokainak a maximumát.

A diszkrét analitikus függvények esetében egy függvényt tetszőlegesen előírhattunk a tengelyek mentén és ki tudtuk terjeszteni egészfüggvénnyé. A következő állítás azt mutatja, hogy a diszkrét analitikus polinomok nem tűnhetnek el tetszőlegesen a tengelyek mentén.

**Állítás** *Tegyük fel, hogy $p(m,n)$ egy analitikus polinom, ami eltűnik a $(0,0), (1,0), ..., (a,0)$ és $(0,1), (0,2), ..., (0,b)$ pontokon, ahol $a$ és $b$ tetszőleges nemnegatív egészek. Ekkor ha $a + b \geq deg(p)$, akkor $p$ az egész síkon eltűnik.*

*Bizonyítás.* $deg(p)$-re vonatkozó indukcióval. Jelölje $Q$ az azon $(m, n)$ pontokból álló téglalapot a síkon, melyekre $0 \leq m \leq a$ és $0 \leq n \leq b$ teljesül. $p$ mint diszkrét analitikus függvény egyértelműen terjed ki $Q$ pontjaira, mégpedig azonosan 0-ként $Lp = 0$ miatt. Az állítás $deg(p) = 0$ esetén nyilvánvalóan teljesül. Rögzítsük $p$ fokát, ekkor az indukció szerint a $p$-nél kisebb fokú polinomokra teljesül az állítás. Legyen $a \geq 1$ és tegyük fel, hogy $a \geq b$, a fordított eset szimmetriai okok miatt ugyanúgy végigvihető. Legyen $p_m = p(m+1, n) - p(m, n)$, ami tehát egy olyan diszkrét analitikus polinom, amely eltűnik a $(0,0), (1,0), ..., (a-1, 0)$ és $(0,1), (0,2), ..., (0, b)$ pontokon, továbbá $deg(p_m) < deg(p)$, azaz $deg(p_m) \leq a - 1 + b$. Az indukció szerint $p_m$ eltűnik az egész síkon, amiből következik, hogy $p$ értékei csak $y$-tól függnek. Ám mivel $Lp = 0$, így $p$ csak konstans lehet, míg $p(0,0) = 0$ miatt $p \equiv 0$, amivel az állítást beláttuk. ■

Az állítás segítségével igazolható az alábbi, diszkrét analitikus függvények polinomokkal való közelíthetőségéről szóló tétel.

**Tétel** *Legyen $R$ az egységnégyzetrács egy téglalap alakú részhalmaza, melynek oldalhosszai $a$ illetve $b$. Legyen $f$ egy $R$-en értelmezett diszkrét analitikus függvény. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $R$-en értelmezett, legfeljebb $a + b$ fokú $p$ diszkrét analitikus polinom, amely megegyezik $f$-el $R$-en.*

*Bizonyítás.* Világos, hogy az általánosság megsértése nélkül $R$-t tekinthetjük egy olyan téglalapnak, melynek bal-alsó sarka $(0,0)$.
$k := a + b$, legyenek $c_0, c_1, ..., c_k$ konstansok, legyen továbbá $p$ egy olyan polinom, amely

$$p = c_0\rho_0 + c_1\rho_1 + ... + c_k\rho_k \tag{15}$$

alakú.
Látható, hogy $p$ egy diszkrét analitikus polinom, melyre $deg(p) \leq k$. Az előző állítás miatt ha $p$ eltűnik a $(0,0), (1,0), ..., (a, 0)$ és $(0,1), (0,2), ..., (0, b)$ pontokon, akkor $p$ azonosan nulla. $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_k$ függetlenségéből következik, hogy ekkor $c_0 = c_1 = ... = c_k = 0$. A $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_k$ függvények által a $(0,0), (1,0), ..., (a, 0)$, $(0,1), (0,2), ..., (0, b)$ pontokban, azaz összesen $k + 1$ darab pontban felvett értékek meghatározzák egy mátrix sorait, amelyről az imént láttuk be, hogy nemszinguláris. Mivel a mátrix determinánsa nem nulla, így a $c_0, c_1, ..., c_k$ konstansok megválaszthatóak úgy, hogy

a $(0,0),(1,0),...,(a,0)$,$(0,1),(0,2),...,(0,b)$ pontokban $f-p=0$ teljesüljön. Ám ekkor $L(f-p)=0$ miatt $f-p$ eltűnik $R$ egészén. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

A tétel egy speciális esetéből adódik a diszkrét analitikus polinomok által alkotott vektortérre vonatkozó fontos tétel.

**Tétel** *A legfeljebb $k$-ad fokú diszkrét analitikus polinomok $\mathcal{P}_k$ vektortere $k+1$ dimenziós.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az előző tételt abban az esetben, amikor $a=k$ és $b=0$, valamint legyen $p$ egy diszkrét analitikus polinom, melyre $deg(p) \leq k$. Ekkor a $c_0, c_1, ..., c_k$ konstansok megválaszthatóak úgy, hogy $p = c_0\rho_0 + c_1\rho_1 + ... + c_k\rho_k$ teljesüljön a $(0,0),(1,0),...,(k,0)$ pontokban. A tételt megelőző állítás miatt ekkor $p = c_0\rho_0 + c_1\rho_1 + ... + c_k\rho_k$ a teljes $\mathcal{L}$-en teljesül. Azt kaptuk, hogy a $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_k$ függvények a vektortér bázisát alkotják, s mivel lineárisan függetlenek, ezért a tér dimenziója valóban $k+1$. ■

Legyen most $p$ egy $n$-ed fokú diszkrét analitikus polinom, ekkor (13) és (15) miatt

$$p = \int_0^z \hat{p}\delta u + c$$

ahol $\hat{p}$ egy $n-1$-ed fokú polinom, $c$ pedig konstans.

Szintén (15) felhasználásával, továbbá a $\rho_i$-k nagyságrendjére tett megállapítás alapján $p$ a következő alakban is írható

$$p = az^n + bz^{n-1} + h \tag{16}$$

ahol $h$ egy legfeljebb $n-2$-ed fokú polinom, $a$ és $b$ konstansok.

Térjünk most át a bipolinomok tanulmányozására. Szeretnénk hasonlóan felbontani őket, mint a polinomokat, valamint áttekinteni az általuk alkotott vektorteret. Ezek mindegyikéhez elengedhetetlen lesz az alábbi

**Állítás** *Egy $p_b$ diszkrét analitikus bipolinom egyértelműen előállítható $p_b = s + t^*$ alakban, ahol $s$ és $t$ egyértelműen meghatározott diszkrét analitikus polinomok, melyekre $deg(s), deg(t) \leq deg(p_b)$ teljesül.*

*Bizonyítás.* Jelölje $j$ és $k$ a következő függvényeket

$$j := \frac{p_b + p_b^*}{2} \text{ és } k := \frac{p_b - p_b^*}{2i}$$

Jól látható, hogy $j = j^*$ és $k = k^*$, azaz $j$ és $k$ önmaguk duálisai, továbbá hogy a $p_b$ bipolinom $j$ és $k$ segítségével felírható $p_b = j + ik$ alakban. Nyilvánvaló, hogy mivel $p_b$ bipolinom, ezért $j$ és $k$ is azok és fokuk nem haladja meg $p_b$-ét. Léteznek olyan $u$ és $v$ valós értékű polinomok, melyekre $j = u$ a páros pontokon és $j = iv$ a páratlanokon, hiszen $p_b + p_b^*$ valós értékű a páros pontokon és $i$ többszöröseit veszi fel a páratlanokon. Írjuk fel $u$-ra és $v$-re a Cauchy-Riemann egyenlőséget a (4) alakban

$$u(m+1+in+i) - u(m+in) - v(m+in+i) + v(m+1+in) = 0$$

$$u(m+in) - u(m-1+in+i) - v(m+in+i) + v(m-1+in) = 0$$

amelyek csak a páros $m + in$ pontokra teljesülnek. Ám ha egy polinom eltűnik a páros pontok részhálóján, akkor az egész négyzetrácson eltűnik, így azt kapjuk, hogy a fenti egyenlőségek az egész $\mathcal{L}$-en fennállnak. Nevezzük $j$ *kiterjesztés*ének a

$$J = u + iv$$

függvényt, ahol $J$ valójában egy polinom. $J$-ből visszakaphatjuk a $j$ bipolinomot a

$$j = \frac{J + J^*}{2}$$

képlet segítségével. A $k$ bipolinom kiterjesztését jelöljük $K$-val. Ekkor $p_b = j + ik$ miatt $2p = J + iK + (J - iK)^*$, azaz $p_b$-t valóban előállítottuk a kívánt alakban, már csak a tagok egyértelműségének megmutatása van hátra. Tekintsük a $p_b \equiv 0$ esetet. Azt kapjuk, hogy $s + t^* = 0$ a páros pontokon, valamint $s - t^* = 0$ a páratlan pontokon. Mivel $s$ és $t$ polinomok, ezért ezek az egyenlőségek a teljes $\mathcal{L}$-en teljesülnek, így összegezve őket azt kapjuk, hogy $s \equiv 0$ és $t \equiv 0$, ami igazolja az egyértelműséget. ■

Az állítás alapján világos, hogy a $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_k$ és $\rho_0^*, \rho_1^*, ..., \rho_k^*$ polinomok páronként lineárisan függetlenek, amiből azonnal adódik az alábbi

**Tétel** *A legfeljebb $k$-ad fokú diszkrét analitikus bipolinomok $\mathcal{P}_k^b$ vektortere $2k+2$ dimenziós.*

Legyen $p_b$ egy $n$-ed fokú bipolinom, ekkor a $p_b = s + t^*$ felbontás alapján $p_b$ a (16)-hoz hasonló alakban írható a következőképpen

$$p_b = a_1 z^n + a_2 (z^n)^* + \textit{ alacsonyabb fokú tagok}$$

ahol $a_1$ és $a_2$ közül legalább az egyik nem 0. Rögtön látszik az is, hogy a valós és képzetes részek foka azonos.

# 2. A klasszikus és a Mercat-féle modell közti átmenet

A Mercat-féle modell kiterjeszti az analitikus függvények értelmezési körét és bevezeti a holomorf formák fogalmát. Nem csak a síkon vett egységnégyzetrácson értelmezett diszkrét függvényekkel foglalkozik, hanem magasabb génuszú irányított felületekbe beágyazott véges gráfokon értelmezett függvényekkel is. Ahhoz, hogy a Mercat-féle modell könnyen érthető legyen, újra kell értelmezni a „klasszikus" elméletét a diszkrét analitikus függvényeknek, valamint bevezetni számos olyan fogalmat, amelyet a modell alapul vesz.

## 2.1. Diszkrét analitikus függvények mint függvénypárok

A polinomok és bipolinomok vizsgálatánál láttuk, hogy hasznos a Gauss-egészek „páros" és „páratlan" részhálóiról beszélni.Vegyük észre, hogy az analitikusság definíciójában használt (2) feltétel egy-egy oldalán is mindig azonos paritású csúcsokon felvett függvényértékek állnak. Arra is láttunk példát a polinomok tanulmányozásakor, hogy hasznunkra válhat, ha bizonyos esetekben $\mathcal{L}$-nek a 45°-al való elforgatottját tekintjük. Tegyünk most is így: forgassuk el $\mathcal{L}$-et 45°-al negatív irányba, majd skálázzuk is újra úgy, hogy ismét egy egységnégyzetrácsot kapjunk. Mit ad nekünk így az analitikusság (2) alakú feltétele?

Azt kapjuk, hogy egy diszkrét analitikus függvényre úgy is gondolhatunk mint két komplex értékű $f_1$ illetve $f_2$ függvényre, ahol $f_1$ a rács csúcsain van definiálva míg, $f_2$ az egységnégyzeteken veszi fel értékeit. Most $f_1$-re és $f_2$-re felírva (2)-t kapjuk

**Diszkrét Cauchy-Riemann egyenlőség (komplex változat)** *Legyen $a$ és $b$ két csúcsa $\mathcal{L}$-nek, melyekre vagy $b = a + 1$ vagy $b = a + i$ teljesül, jelölje $p$ és $q$ azokat az egységnégyzeteket, amelyek balról illetve jobbról határolják $ab$-t. Ekkor*

$$f_1(b) - f_1(a) = i(f_2(p) - f_2(q)) \tag{17}$$

*Egy ilyen $(f_1, f_2)$ párt* ***komplex diszkrét analitikus pár****nak nevezünk.*

Az (17) egyenlőség csak $f_1$ valós és $f_2$ képzetes részének kapcsolatát írja le, valamint $f_1$ képzetes és $f_2$ valós részével teszi ugyanezt. Természetesen adódik, hogy a diszkrét analitikus függvények tanulmányozásakor így csupán rácspontokon és a rács egységnégyzetein értelmezett valós függvények párjaira szorítkozzunk. Így adódik a valós értékű $g_1, g_2$ függvénypárra a következő

**Diszkrét Cauchy-Riemann egyenlőség (valós változat)** *Legyen $a$ és $b$ két csúcsa $\mathcal{L}$-nek, melyekre vagy $b = a + 1$ vagy $b = a + i$ teljesül, jelölje $p$ és $q$ azokat az egységnégyzeteket, amelyek balról illetve jobbról határolják $ab$-t. Ekkor*

$$g_1(b) - g_1(a) = (g_2(p) - g_2(q))$$

*Egy ilyen $(g_1, g_2)$ párt **valós diszkrét analitikus pár**nak nevezünk.*

Az elforgatás előtti, $\mathcal{L}$-en értelmezett $f$ analitikus függvényről tudtuk, hogy harmonikus is. Mit jelent ez az elfrgatott és újraskálázott egységrácson? Az $f$ függvény $z$-beli harmonikussága azt jelentette, hogy $f(z)$ értéke megegyezett $f(z+1+i), f(z-1+i), f(z-1-i), f(z+1-i)$ függvényértékek átlagával, másképp fogalmazva $f(z)$ értéke megegyezett a legközelebbi azonos paritású rácspontokon felvett függvényértékek átlagával. Így azt kaptuk, hogy $\mathcal{L}$ elforgatása után a rácspontokon értelmezett $f_1$ függvény adott csúcson felvett értéke megegyezik a szomszédos rácspontokban felvett értékek átlagával, míg az egységnégyzeteken értelmezett $f_2$ függvény adott egységnégyzeten felvett értéke megegyezik a szomszédos egységnégyzeteken felvett függvényértékek átlagával. Így talán már indokoltabbnak, sőt kézenfekvőbbnek tűnik a harmonicitás értelmezése.

Korábban azt is megállapítottuk, hogy az $f : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ analitikus függvény valós és képzetes részei külön-külön is harmonikusak, azaz azt kapjuk, hogy a harmonikusság „új értelmezése" szerint a valós $g_1, g_2$ függvények is harmonikusak.

Amennyiben továbbra is minden négyzetet „azonosítunk" a bal-alsó sarkával, úgy azt is gondolhatjuk, hogy az $f_1, f_2$ illetve $g_1, g_2$ függvénypárok ugyanazon az egységrácson vannak értelmezve.

Azt kaptuk tehát, hogy egy diszkrét analitikus függvényt azonosíthatunk egy komplex értékű, csupán a páros rácspontokon értelmezett harmonikus függvénnyel, ami pedig akár egy az ugyanezen részrácson értelmezett valós értékű, harmonikus függvénypárral is azonosítható.

## 2.2. Harmonikus függvények gráfokon

Természetesen adódik a harmonikus függvény fogalmának tetszőleges egyszerű véges gráfra történő kiterjesztése. Az előző fejezetben láttuk, hogy a harmonicitás klasszikus értelmezése $\mathcal{L}$ elforgatása után azt jelenti, hogy az adott rácspontbeli függvényértéket meghatározzák a szomszédos csúcsokban felvett függvényértékek. Ez könnyen átörökíthető a gráfokra is. Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf esetén egy $v$ csúcs szomszédainak halmazát szokás szerint jelölje $N(v)$, a $v$ szomszédainak számát -ami nem más mint $v$ fokszáma- pedig $d_v$.

**Definíció** *Egy $G = (V, E)$ gráfon értelmezett $f : V \to \mathbb{C}$ függvényt harmonikusnak nevezünk a $v \in V$ csúcsban, ha*

$$\frac{1}{d_v} \sum_{u \in N(v)} f(u) = f(v) \tag{18}$$

*Ha $f$ nem harmonikus egy $v \in V$ csúcsban, akkor azt mondjuk, hogy pólusa van $v$-ben.*

A definícióban szereplő (18)-t átrendezés után úgy is írhatjuk, hogy

$$\sum_{u \in N(v)} (f(u) - f(v)) = 0 \tag{19}$$

Irányítsuk meg a gráf éleit tetszőlegesen. Készítsünk a csúcsokon értelmezett $f : V \to \mathbb{C}$ függvényből egy az éleken értelmezett olyan $\pi_f : E \to \mathbb{C}$ függvényt, amely egy $\overrightarrow{xy} \in E$ élre (ahol $x, y \in V$) a

$$\pi_f(\overrightarrow{xy}) = f(y) - f(x) \text{ értéket veszi fel.}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\pi_f$ pontosan akkor teljesíti a *folyam feltétel*t a $v$ csúcsban, ha (19) fennáll, azaz ha az $f$ függvény harmonikus $v$-ben.

Ha az élek a hosszát is szeretnénk figyelembe venni, akkor a gráfot egy $G = (V, E, \lambda)$ hármassal jellemezhetjük, ahol $\lambda$ az élek hosszát megadó, $\lambda : E \to \mathbb{R}^+$ függvény és $\lambda_{uv}$ jelöli az $uv$ él hosszát. Ekkor a harmonikusság (19) feltétele a

$$\sum_{u \in N(v)} \frac{(f(u) - f(v))}{\lambda_{uv}} = 0$$

alakba megy át.

Ha $f$ nem konstans függvény a $G$ gráfon, akkor az a két csúcs, ahol $f$ minimuma és maximuma vétetik fel nyilvánvalóan pólusok lesznek, azaz azt kaptuk, hogy

**Állítás** *Minden nem konstans $f : V \to \mathbb{C}$ függvénynek legalább két pólusa van.*

**Következmény** *Nem minden folyam kapható meg harmonikus függvényekből. (Gondoljunk egy forrás és nyelő nélküli, nem azonosan* 0 *folyamra, azaz egy áramra)*

Jelöljük $P$-vel az $f$ függvény pólusainak a halmazát. Ekkor egy gráf csúcsainak tetszőleges $P$ részhalmazát rögzítve találunk olyan függvényt, amely $P$-n kívül harmonikus, pontosabban

**Állítás** *Egy $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy tetszőleges, nemüres, $P \subseteq V$ részhalmazán értelmezett tetszőleges $f_0 : P \to \mathbb{C}$ függvény egyértelműen kiterjeszthető egy a $V \setminus P$ csúcshalmazon harmonikus $f : V \to \mathbb{C}$ függvénnyé.*

**Megjegyzés** $|S| = 1$ természetesen nem mond ellent a korábbi állításnak, az éppen a konstans függvények esete.

## 2.3. Gráfkonstrukciók

Ahhoz, hogy magasabb génuszú felületekbe beágyazott gráfokkal is foglalkozni tudjunk, nélkülözhetetlen a térkép fogalma. A későbbiekben szükségünk lesz a vizsgált gráfból előállítható újabb gráfokra mint például a duális vagy a gyémánt gráf. Az alábbiakban ezek a fogalmak kerülnek bevezetésre.

**Definíció** *Legyen $S$ egy 2-dimenziós irányítható felület. Egy $S$-be beágyazott $G = (V, E)$ gráfot* ***térkép****nek nevezünk, ha a következők teljesülnek*

*(i) $G$ minden lapja homeomorf egy nyílt körlappal, aminek a lezártja kompakt*
*(ii) $S$ minden kompakt részhalmaza csak véges sok élet metsz*

A definícióban nem kötöttük ki, hogy a $G$ gráf egyszerű legyen, azaz előfordulhatnak hurokélek és többszörös élek is. Vegyük észre, hogy ha $S$ a sík, akkor a gráf szükségszerűen végtelen, míg ha $S$ kompakt, akkor véges.

Azokban az esetekben, amikor a $G$ gráf egy térkép, mindig tudjuk egy $(V, E, \mathcal{F})$ hármassal jellemezni, ahol $\mathcal{F}$ a gráf lapjainak a halmazát jelöli. Tekintettel a későbbiekre, legyen $|V| = n$, $|E| = m$ és $|\mathcal{F}| = f$.

A síkon jól ismert az *Euler-formula*, amely egy a csúcsok, élek és lapok száma közti összefüggés. Ennek más, magasabb génuszú irányított felületekre való általánosítása a következő tétel

**<u>Tétel</u> (Euler-formula)** *Legyen $S$ egy 2-dimenziós irányítható felület $g$ génusszal, $G = (V, E, \mathcal{F})$ pedig egy az $S$-be beágyazott térkép, ekkor fennáll a következő*

$$\chi(S) = n - m + f = 2 - 2g$$

*ahol $\chi(S)$ az úgynevezett Euler-karakterisztika.*

### A duális gráf

Legyen $G = (V, E, \mathcal{F})$ egy az $S$ felületbe beágyazott térkép. $G$ duálisa egy olyan $G^* = (V^*, E^*, \mathcal{F}^*)$ gráf, amelyet úgy kapunk, hogy $G$ minden lapjában felveszünk egy új csúcsot ($G$ külső lapjában is), így kapjuk $V^*$-ot. Két $u, v \in V^*$ csúcsot akkor kötünk össze, ha élszomszédosak azok a $G$-beli lapok, amelyekben $u$-t és $v$-t felvettük (ha két lapnak $k$ közös éle van, akkor a megfelelő csúcsok közé $k$ párhuzamos élet illesztünk, illetve ha van olyan $e$ él, amelynek mindkét oldalán ugyanaz a lap található, akkor $e$ duálisa egy hurokél lesz). Jól látható, hogy így egy bijekció keletkezik az $e \in E$ élek és a duálisaik, $e^* \in E^*$ között, emiatt $|E| = |E^*|$. A duális gráfra úgy is gondolhatunk, mintha a „csúcsokat" a „lapokra" cseréltük volna, azaz $G^* = (\mathcal{F}, E, V)$ formában. Ebből következik, hogy $(G^*)^* = G$. $G^*$ elkészítése közben nem nehéz figyelni arra, hogy a duális gráf is egy $S$-be ágyazott térkép legyen.

A duális gráf fogalmát az irányított gráfokra is kiterjeszthetjük. Egy $e$ irányított él esetében jelölje $h_e$ illetve $t_e$ az $e$ él „fejét" illetve „talpát", azaz ha $e = \overrightarrow{xy}$, akkor $h_e = y$ és $t_e = x$. Az $e$ éltől jobbra illetve balra található lapokat pedig jelölje $r_e$ illetve $l_e$. Ekkor a duális gráfra úgy is gondolhatunk, mintha a „csúcsokat" a „lapokra" valamint az „élek talpait" az „éltől jobbra lévő lapra" cseréltük volna. Az irányított esetben tehát $(G^*)^*$ már nem lesz azonos $G$-vel, de az igaz lesz, hogy $(G^*)^* = \overleftarrow{G}$, ahol $\overleftarrow{G}$ azt a gráfot jelöli, ahol $G$ élei mind az eredeti irányítással ellentétes irányba vannak irányítva.

Síkbarajzolható gráfok síkbeli reprezentációjáról szól az alábbi

**Tétel** *Ha $G$ egy 3-szorosan összefüggő síkgráf, akkor $G$ és $G^*$ beágyazhatók úgy a síkba, hogy minden él egy egyenes szakasz a síkon, a duális élek merőlegesek egymásra, a lapok konvexek (a külső lapoknak a komplementerei konvexek), továbbá $G^*$külső pontja a végtelenben van.*

#### A $G_\Diamond$ gráf

A $G_\Diamond$ vagy más néven *gyémánt gráf* konstrukciójához szükségünk lesz a $G^*$ duális gráfra. $G_\Diamond$ csúcshalmaza legyen $V_\Diamond = V \cup V^*$. Definiáljuk ezen a következő páros gráfot: $v \in V$ és $u \in V^*$ esetén $uv$ akkor legyen éle $G_\Diamond$-nak, ha $v$ csúcsa annak az $F \in \mathcal{F}$ lapnak, amelyben $u$-t felvettük. Nyilvánvaló, hogy így valóban páros gráfot kapunk. Vegyük észre, hogy $G_\Diamond$ minden lapját 4 él határolja.

#### Az univerzális fedőgráf

Univerzális fedőgráf alatt egy olyan síkbeli $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E}, \widehat{\mathcal{F}})$ végtelen gráfot fogunk érteni, amelyet az $S$ irányítható felületbe beágyazott $G = (V, E, \mathcal{F})$ térkép $S$ univerzális fedőterére való felemeltjeként kapunk.

## 2.4. Áramok, Hodge-dekompozíció

Láttuk, hogy a harmonikus függvények és a folyamok között szoros kapcsolat van. Vegyük szemügyre, hogy mit tudunk mondani egy $S$ felületbe ágyazott $G$ térképen értelmezett áramokról (mostantól $G$ mindig irányított értelemben szerepel).

A legegyszerűbb áramok egy $G = (V, E, \mathcal{F})$ térképen azok, amelyek egy adott lap élein $\pm 1$-et vesznek fel aszerint, hogy $F$ melyik oldalukon van, a többi élen pedig 0-t. Jelölje minden $F \in \mathcal{F}$ lapra ezt az áramot $\partial F$, ami tehát egy $\overrightarrow{\mathbb{R}}^E$-beli vektor. $\partial F$-et az $F$ *határá*nak hívjuk és az előbbiek szerint a következőképpen van definiálva

$$(\partial F)_e := \begin{cases} 1 & \text{ha } r_e = F \\ -1 & \text{ha } l_e = F \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

**Definíció** *Azokat a $\phi$ áramokat, amelyek $\partial F$ vektorok lineáris kombinációi, **0-homológ**nak fogjuk nevezni. A $\phi$ és $\phi'$ áramokat **homológ**nak nevezzük, ha $\phi - \phi'$ 0-homológ.*

**Definíció** *Egy $\phi$ áramot **rotáció-mentes**nek nevezünk, ha minden $F \in \mathcal{F}$ esetén*

$$(\partial F)^T \phi = \sum_{e:\, r_e = F} \phi(e) - \sum_{e:\, l_e = F} \phi(e)$$

*teljesül.*

Vezessünk be egy a $\partial F$-hez hasonló operátort a csúcsokra is. A $v \in V$ csúcs esetén jelölje $\delta v$ a következő $\overrightarrow{\mathbb{R}}^E$-beli vektort

$$(\delta v)_e := \begin{cases} 1 & \text{ha } t_e = v \\ -1 & \text{ha } h_e = v \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\delta v$-t a $v$ csúcs *ko-határá*nak nevezzük.

Jelöljük $\mathcal{A}$-val a $\partial F$ vektorok által generált $\overrightarrow{\mathbb{R}}^E$-beli lineáris alteret. A $\delta v$ vektorok által generált alteret jelölje $\mathcal{B}$, nyilván $\mathcal{B} \subseteq \overrightarrow{\mathbb{R}}^E$ is teljesül. A $\mathcal{B}$-beli vektorokat szokás *potenciál*oknak is nevezni. Könnyen látható, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ortogonálisak egymásra. $\mathcal{A}^\perp$-t rotáció-mentes vektorok alkotják, míg $\mathcal{B}^\perp$ az összes áramot tartalmazza. Ezek metszete $\mathcal{C} = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$ a rotáció-mentes áramok altere. Ezek után világos az alábbi

**Hodge-dekompozíciós tétel** *Tetszőleges $G$ térképre, amely egy $g$ génuszú $S$ irányítható felületen van értelmezve teljesül, hogy $\overrightarrow{\mathbb{R}}^E$ három kölcsönösen ortogoális altér direkt összegére bontható, azaz*

$$\overrightarrow{\mathbb{R}}^E = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$$

*ahol $\mathcal{A}$ a 0-homológ áramok altere, $\mathcal{B}$ az összes potenciálok altere, $\mathcal{C}$ pedig a rotáció-mentes áramok altere.*

**Következmény** *Minden áram homológ egy egyértelműen meghatározott rotáció-mentes árammal.*

**<u>Következmény</u>** *A rotáció-mentes áramok $\mathcal{C}$ altere $2g$ dimenziós.*

*Bizonyítás.* Könnyen látszik, hogy $dim(\mathcal{A}) = f - 1$ és $dim(\mathcal{B}) = n - 1$, így az Euler-formulából azt kapjuk, hogy

$$dim(\mathcal{C}) = m - dim(\mathcal{A}) - dim(\mathcal{B}) = m - (f - 1) - (n - 1) = m - f - n + 2 = 2g$$

amint azt állítottuk. ■

# 3. A Mercat-féle modell

Ebben a fejezetben kiterjesztjük a diszkrét analitikus függvények fogalmát, valamint bevezetjük a holomorf formák fogalmát. Ezek eredményeképpen nem csak a síkon vett egységnégyzetrácson értelmezett diszkrét függvényekkel tudunk majd foglalkozni, hanem magasabb génuszú irányított felületekbe beágyazott véges gráfokon értelmezett függvényekkel is. A definíció a síkon lévő egységnégyzetrácson pedig vissza fogja adni az analitikusság „klasszikus" fogalmát.

## 3.1. Az analicitás kiterjesztett fogalma

Legyen $\phi$ vagy egy végtelen síkgráfon vagy egy magasabb génuszú felületbe ágyazott véges gráfon értelmezett rotáció-mentes áram. Kihasználva, hogy $\phi$ rotáció-mentes, a $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E}, \widehat{\mathcal{F}})$ univerzális fedőgráf csúcshalmazán[2] konstruálhatunk egy olyan $\pi : \widehat{V} \to \mathbb{R}$ függvényt amelyre

$$\phi(e) = \pi(t_e) - \pi(h_e) \tag{20}$$

teljesül minden $e$ élre. Ezután azt kihasználva, hogy $\phi$ áram is, most a fedőgráf lapjain definiálhatunk egy olyan $\sigma : \widehat{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ függvényt amelyre

$$\phi(e) = \sigma(r_e) - \sigma(l_e) \tag{21}$$

teljesül minden $e$ élre.

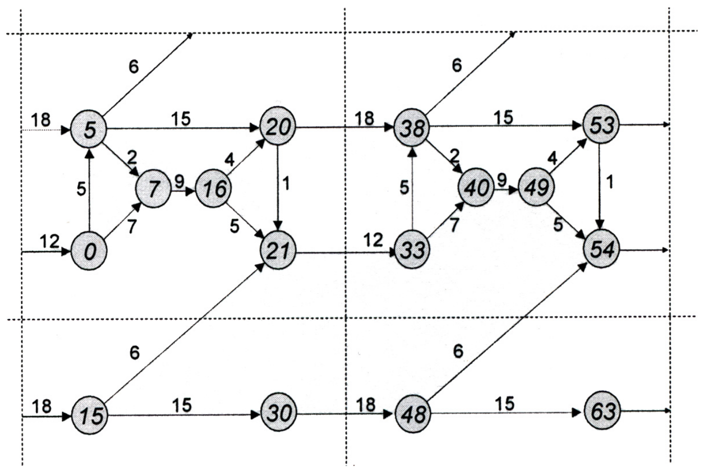
Ekkor $\pi$ harmonikus $\widehat{G}$-on, hiszen $\phi$ egy áram, $\sigma$ pedig a duális térképen lesz harmonikus $\phi$ rotáció-mentessége miatt. Mivel (20) és (21) baloldalai azonosak, ezért $\pi$ és $\sigma$ között a következő összefüggés is kiolvasható

$$\pi(t_e) - \pi(h_e) = \sigma(r_e) - \sigma(l_e)$$

ami ismét tekinthető a Cauchy-Riemann egyenlőség egy diszkrét alakjának.

[2] Amennyiben $\phi$ egy végtelen síkgráfon van értelmezve, úgy a gráf tekinthető a saját univerzális fedőgráfjának, így a közös jelölés nem lesz zavaró.

Az 1. és 2. ábrán egy tóruszba ágyazott gráf élein értelmezett rotáció-mentes áram látható, valamint a belőle származtatott harmonikus függvény az univerzális fedőgráf csúcsain (1. ábra) illetve lapjain (2. ábra). Természetesen az ábrákra úgy is tekinthetünk, mint amelyeken a rotáció-mentes áramot származtattuk az adott harmonikus függvényekből.



1.ábra

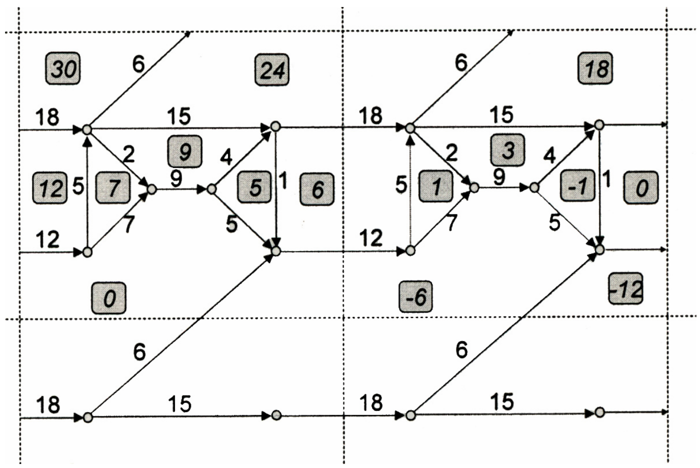
**Definíció** *Legyen* $G = (V, E, \mathcal{F})$ *egy térkép a síkon,* $G^* = (V^*, E^*, \mathcal{F}^*)$ *pedig a duálisa. Egy* $f : V \cup V^* \to \mathbb{C}$ *függvényt akkor nevezünk analitikusnak, ha*

$$f(l_e) - f(r_e) = i(f(h_e) - f(t_e)) \tag{22}$$

*teljesül minden* $e \in E$ *élre.*

Világos, hogy (22) az $f$ függvény $G$-n és $G^*$-on felvett értékei közötti összefüggés, hiszen egy $e \in E$ élre $l_e = h_{e^*}$ és $r_e = t_{e^*}$ áll fenn.

Az is könnyen látható, hogy ez a definíció az egységnégyzetrácson egybeesik az eredeti definícióval, pontosabban azzal, amikor $\mathcal{L}$-et 45°-al elforgattuk, hiszen a páros pontok négyzetrácsának duális gráfja éppen a páratlan pontok négyzetrácsa lesz. Továbbá az is igaz, hogy ha egy $G \cup G^*$-beli négyzet „bal-alsó" sarka $l_e$, akkor $Lf(l_e) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha (22) fennáll.




2.ábra

További analógia, hogy az analitikusság ebben az esetben is maga után vonja a harmonikusságot, pontosabban igaz a következő

<u>**Állítás**</u> *Amennyiben $f$ egy diszkrét analitikus függvény $G \cup G^*$-on, úgy $f$ harmonikus $G$ csúcshalmazán, azaz $V$-n.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az $x$ csúcsot. $x$ szomszédait jelölje $y_1, ..., y_d$. Ezen élek duálisai legyenek $(xy_k)^* = p_k p_{k+1}$ (ahol $p_{d+1} = p_1$ természetesen). Ekkor

$$\sum_{i=1}^{d} (f(y_k) - f(x)) = \sum_{k=1}^{d} i(f(p_{k+1}) - f(p_k)) = 0$$

(22) alapján. Ez igazolja az állítást. ■

Amennyiben rendelkezésünkre áll egy $f$ analitikus függvény, úgy könnyen hozhatunk létre rotáció-mentes áramot a $G$ gráf élhalmazán. Pontosabban, egy $f$ analitikus függvény segítségével a

$$\phi(e) := f(h_e) - f(t_e)$$

képlettel definiált $\phi : E \to \mathbb{C}$ függvény egy rotáció-mentes áram lesz $G$-n, amit $G$-n értelmezett ***holomorf formá***nak nevezünk.

Tekintsünk most egy tetszőleges $\phi : E \to \mathbb{C}$ függvényt és segítségével definiáljunk egy függvényt a duális gráf élein a

$$\phi^*(e^*) = i\phi(e) \tag{23}$$

képlettel. Egy ilyen $\phi^* : E^* \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor lesz áram, ha $\phi$ rotáció-mentes. Ha tehát $\phi$ és $\phi^*$ is áramok, akkor egyszersmind rotáció-mentesek is. Ekkor $\phi^*$ is megadható a (23)-hoz hasonló alakban. Érdemes ezekre a függvényekre úgy gondolni, mintha egyazon $f : V \cup V^* \to \mathbb{C}$ függvény értékei lennének. Azaz a rotáció-mentes áramokat megkaptuk a következő formában

$$\phi(e) = f(h_e) - f(t_e) \qquad \phi^*(e) = f(l_e) - f(r_e)$$

Mivel ezek minden $e$ élre teljesülnek, azonnal adódik, hogy $f$ diszkrét analitikus függvény az egész értelmezési tartományán.

További analógia a klasszikus elmélettel, hogy egy az éleken értelmezett komplex értékű függvény pontosan akkor rotáció-mentes áram, ha a valós és képzetes részei azok, valamint (23) csak $\phi$ valós és $\phi^*$ képzetes része közti egyenlőséget állít (és persze fordítva). Így egy holomorf formára tekinthetünk úgy is, mint rotáció-mentes áramok egy párjára, amelyek között semmi kapcsolat sincs.

### Súlyozott eset

A Mercat-féle definíció lehetővé teszi, hogy a gráfok éleit hosszakkal lássuk el. Természetesen minden élnek továbbra is pozitív hossza lesz, amelyre $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ is teljesül (lásd *Harmonikus függvények gráfokon*). A duális gráf $e^*$ élének hosszára gondolhatunk úgy is, mint az $e$ él *szélessége*.

Ekkor egy $\phi : E \to \mathbb{C}$ függvényre a folyam feltétel értelemszerűen a

$$\sum_e \delta v(e)\lambda_{e^*}\phi(e) = 0$$

alakba megy át, míg a rotáció-mentesség definíciója a

$$\sum_e \partial F(e)\lambda_e\phi(e) = 0$$

alakot ölti.

Ekkor a $\phi^*(e^*) = \phi(e)$ formula egy rotáció-mentes áramot definiál a duális gráfon.

Tekintsünk most egy $\phi : E \to \mathbb{C}$ rotáció mentes áramot a síkon, ekkor van olyan $f : V \cup V^* \to \mathbb{C}$ függvény, melyre

$$\phi(e) = \frac{f(h_e) - f(t_e)}{\lambda_e} = i\frac{f(l_e) - f(r_e)}{\lambda_{e^*}}$$

teljesül minden $e$ élre. Ezt az $f$ függvényt a $\phi$ *primitív függvény*ének nevezzük.

### Holomorf formák konstruálása

Ebben a fejezetben explicit konstrukciót mutatunk holomorf formák létrehozására. Segítségünkre lesznek a harmonikus függvények. Tudjuk, hogy a harmonikus függvények pólusai és az ott felvett értékeik előírhatók. Az $f$ harmonikus függvény pólusainak $P$ halmaza legyen $\{a; b\}$. Mivel harmonikus függvény valós konstansszorosa illetve eltoltja is harmonikus, ezért elérhető, hogy az $f$ függvényre a következők teljesüljenek

$$\sum_{u \in N(v)} (f(u) - f(v)) = \begin{cases} 1 & \text{ha } v = b \\ -1 & \text{ha } v = a \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

valamint

$$\sum_u f(u) = 0$$

Az ilyen formában „normált” $\{a; b\}$ pólusú harmonikus függvényt jelöljünk $\pi_{ab}$-vel.

A csúcsokon értelmezett $\pi_{ab}$ függvényből a szokásos módon kaphatunk egy az éleken értelmezett, $\delta\pi_{ab}$-vel jelölt függvényt, mégpedig a

$$\delta\pi_{ab}(uv) := \pi_{ab}(v) - \pi_{ab}(u)$$

definícióval. Világos, hogy ekkor $a$ egy *forrás*, $b$ *nyelő*, a többi csúcsban pedig teljesül a folyam feltétel. $\delta\pi_{ab}$ a következő alakban is írható

$$\delta\pi_{ab} = \sum_u \pi_{ab}(u)\delta u = 0 \tag{24}$$

Tekintsünk most két olyan $a$,$b$ csúcsot, amelyek megy között él, azaz $ab \in E$. Jelöljük $\delta\pi_{ab}$-t ezentúl $\delta\pi_e$-vel. A $\delta\pi_e$ függvény nyilván rotáció-mentes, de nem áram, hiszen $a$ és $b$ forrás illetve nyelő, de a többi csúcsban teljesül a folyam feltétel. Mivel $ab \in E$, azért könnyű $\delta\pi_e$-ből áramot csinálni, csak „vissza kell küldeni" egy egységnyi folyamot $b$-ből $a$-ba, vagyis $\delta\pi_e - \chi_e$ már áram lesz, igaz azon az áron, hogy most a rotáció-mentesség romlott el az $r_e$ és $l_e$ lapok mentén. Ennek a helyrehozására tekintsük a $G^*$ duális gráfot és abban $ab$ duális élét, $pq$-t valamint a $\pi_{e^*}$ függvényt. Hajtsuk végre az előbbi konstrukciót, az így kapott függvényt jelölje $\delta^*\pi_{e^*}$. Az ezen függvények kombinációjaként definiált

$$\eta_e := \delta^*\pi_{e^*} - \delta\pi_e + \chi_e$$

függvény viszont már egy rotáció-mentes áram, ahogy azt szerettük volna.

Ráadásul $\eta_e$-re a következő is teljesül

**Állítás** *A $\eta_e$ áram $\chi_e$ ortogonális projekciója a rotáció-mentes áramok $\mathcal{C}$ terére.*

*Bizonytás.* Elég igazolni, hogy

$$\chi_e - \eta_e = \delta\pi_e - \delta^*\pi_{e^*}$$

ortogonális minden $\phi \in \mathcal{C}$-re. De $\delta\pi_e \in \mathcal{A}$ (24) miatt és hasonlóan $\delta^*\pi_{e^*} \in \mathcal{B}$. Így mindkettő valóban ortogonális $\mathcal{C}$-re. ■

Bizonyítás nélkül álljon itt egy tétel arról, hogy a $\eta_e$ rotáció-mentes áramok, mint $\chi_e$ ortogonális projekciói mikor nem lesznek 0-k.

**Tétel** *Legyen $G$ egy 3-szorosan összefüggő egyszerű térkép a $g > 0$ génuszú $S$ iráyítható felületbe ágyazva. Ekkor $\eta_e \neq 0$ minden $e$ élre.*

**Következmény** *Legyen $G$ egy 3-szorosan összefüggő egyszerű térkép a $g > 0$ génuszú $S$ iráyítható felületbe ágyazva. Ekkor létezik olyan rotáció-mentes áram, amely sehol sem 0.*

## 3.2. Topológiai tulajdonságok

A folytonos elméletből tudjuk, hogy egy a síkon értelmezett analitikus függvény nem tűnhet el egy nyílt halmazon, mert akkor mindenütt eltűnik a síkon. Szeretnénk hasonló szempontból megvizsgálni a diszkrét analitikus függvényeket, ám ehhez előbb új fogalmakra és egy technikai állításra lesz szükségünk.

Legyen $v$ egy felületbe beágyazott $G = (V, E, \mathcal{F})$ gráf egy csúcsa. Tekintsük a $v$-re illeszkedő élek egy ciklikus sorrendjét. A sorrendben két egymást követő élet *sarok*nak nevezünk. Azonos fogalmat kapunk, ha egy $F$ lap két egymás követő élét és a köztük lévő csúcsot tekintjük. Világos, hogy egy sarkot egyértelműen megadhatunk egy $(F, v, e, f)$ négyessel, ahol $F \in \mathcal{F}$, $v \in V$ és $e, f \in E$. Egy $v$-beli sarkot *éles*nek nevezünk, ha $e$ és $f$ mindegyike vagy $v$-be érkezik vagy $v$-ből indul. Ellenkező esetben –azaz ha $v$ egy három pontú irányított út középső csúcsa– a sarkot *tompá*nak nevezzük.

Jelölje $b_v$ a $v$-beli tompa sarkok számát, $a_F$ pedig az $F$ lap mentén lévő éles sarkok számát. Tehát $b_v$ azt számolja meg, hogy a $v$ csúcs körüljárása során hányszor változik meg a $v$-re illeszkedő élek irányítása, míg $a_F$ ugyanezt számolja meg $F$ körüljárása esetén.

Az analitikus függvények eltűnéséről szóló tételhez szükségünk lesz az alábbi összefüggésre

**Lemma** *Legyen $G = (V, E, \mathcal{F})$ beágyazva a $g$ génuszú $S$ irányítható felületbe, ekkor*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} (a_F - 2) + \sum_{v \in V} (b_v - 2) = 4g - 4 \tag{25}$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* Számoljuk össze az éles sarkokat kétféleképpen

$$\sum_F a_F = \sum_v (d_v - b_v)$$

amire az Euler-formulát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_F a_F + \sum_v b_v = \sum_v d_v = 2m = 2n + 2f + 4g - 4$$

ami átrendezés után éppen a kívánt (25)-t adja. ■

Tegyük most fel, hogy a térkép irányítása olyan, hogy nincsen sem forrás sem nyelő, sőt olyan kör sincs, ami egy irányba lenne irányítva. Ekkor minden csúcsra $b_v \geq 2$ és minden lapra $a_F \geq 2$ teljesül, azaz (25) minden tagja nemnegatív lesz. Mivel mind $b_v$ mind $a_F$ csak páros értékeket vehetnek fel, így a lemma ebben az esetben azt adja, hogy $b_v$ legfeljebb $2g - 2$ csúcsban lehet nagyobb mint 2, illetve $a_F$ legfeljebb $2g - 2$ lap esetén lehet nagyobb, mint 2.

A kívánt tételhez még be kell vezetnünk a gráf hídjainak fogalmát. Legyen a $G$ gráf részgráfja $H$. Töröljük ki $H$ éleit, azaz tekintsük a $G \setminus E(H)$ gráfot. Ezen gráf összefüggő komponenseit a $G$ gráf $H$-hoz tartozó *híd*jainak nevezzük. Azokat az összefüggő részgráfokat, amelyek csak egy olyan élből állnak amely két $H$-beli csúcs között halad *triviális hid*aknak nevezzük. Egy híd $H$-beli csúcsait *terminál*oknak nevezzük, míg a híd többi csúcsait *belső csúcs*oknak. A $H$-hoz tartozó hidak halmazát jelölje $\mathcal{B}(H)$. Tekintsünk egy $v$ terminál csúcsot. A $v$-re illeszkedő $H$-beli élek sarkokra osztják $v$ környezetét. Az eredeti gráfban egy ilyen sarok persze nem feltétlenül lesz sarok, másképp fogalmazva a $H$ által kijelölt sarkokon belül több $G \setminus E(H)$-beli él is illeszkedhet $v$-re. Az is előfordulhat, hogy egy hídból egy terminál csúcs több sarkába is érkezik él. Egy $B$ híd által használt összes $H$-beli sarkok számát jelölje $\tau(B)$, ezt a $B$ híd multiplicitásának nevezzük.

**<u>Tétel</u> (Benjamini, Lovász)** *Legyen $H$ részgráfja a $g$ génuszú $S$ irányítható felületbe ágyazott $G$ térképnek. Ekkor igazak a következők*

*(a) ha $H$ a $\phi$ rotáció-mentes áram tartója, akkor*

$$\sum_{B \in \mathcal{B}(H), \tau(B) \geq 2} (\tau(B) - 2) \quad \leq \quad 4g - 4$$

*(b) ha fennáll, hogy*

$$\sum_{B \in \mathcal{B}(H)} (\tau(B) - 1) \quad \leq \quad 2g - 1$$

*akkor van olyan $\phi$ rotáció-mentes áram, melynek a tartóját $H$ tartalmazza.*

*Bizonyítás. (a) eset.* Első nekifutásra szeretnénk minél több olyan éltől megválni, melyre $\phi = 0$ teljesül. Vegyük észre, hogy ha adott egy rotáció-mentes áram egy térképen, akkor olyan kétoldalú élek törlése illetve olyan nem-hurokélek összehúzása után, amelyeken az áram értéke 0 volt, ismét egy térképet kapunk egy rotáció-mentes árammal. A $H$-ra illeszkedő egyoldalú-hurokéleken (azaz az olyan éleken, melyeknek mindkét oldalán ugyanaz a lap található) állítsuk a folyamértéket tetszőleges 0-tól különböző értékre, a triviális hidakat pedig töröljük ki (ez nyilván nem okoz gondot, mivel az összegzésben ezek 0 tagok voltak). Az egy hídon belül haladó éleket húzzuk össze. Így végül minden hídnak csak egy belső pontja marad, jelöljük a $B$ hídhoz tartozó egyetlen belső pontot $v_B$-vel. Ha van olyan lap, amit két 0 él határol –szükségszerűen az egyik csúcs terminál, a másik pedig belső csúcs ebben az esetben– akkor töröljük ki az egyiket. Ezek után nyilvánvaló, hogy $v_B$-ből $\tau(B)$ él megy $H$-hoz (és esetleg még csatlakozik rá valahány egyoldalú hurok).

Járjuk körül az $F$ lapot, a körüljárás során számoljuk meg, hogy hányszor fordul elő *nem-$H$-beli él* után *$H$-beli csúcs* (csak ezt a váltást, a visszaváltásokat nem számoljuk). Jelölje ezen váltások számát $\beta(F)$.

Egy $H$-beli terminálnál lévő, két 0 él által alkotott sarkot *kellemetlen sarok*nak nevezünk. A $v$ csúcsra illeszkedő illetve az $F$ lap mentén található kellemetlen sarkok számát $u(v)$-vel illetve $u(F)$-el jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $\sum_v u(v) = \sum_F u(F)$, ami az összes kellemetlen sarkok száma a gráfban.

Irányítsuk újra az éleket a $H$ részgráfon úgy, hogy minden folyamérték pozitív legyen. A $H$-n kívüli éleket pedig irányítsuk 1/2 valószínűséggel egyik vagy másik irányba. A továbbiakban az előző lemma összegzéseinek várható értékét fogjuk kiszámolni az új iránytás esetén ($\mathsf{E}$ jelöli a várható értéket). Ehhez vegyük észre, hogy egy olyan sarok, amelynek legfeljebb egy éle $H$-beli, pontosan 1/2 valószínűséggel lesz tompa illetve hegyes.

Ezek alapján a belső csúcsokra

$$\mathsf{E}(b_{v_B} - 2) = \frac{\tau(B)}{2} - 2$$

teljesül.

Megmutatjuk, hogy a $v \in V(H)$ terminál csúcsokra

$$\mathsf{E}(b_v - 2) \geq \frac{u(v)}{2} \tag{26}$$

áll fenn.

Természetesen $v$ nem lehet sem forrás, sem nyelő, így $b_v - 2 \geq 0$ teljesül minden véletlen irányítás esetén. Tegyük fel, hogy $u(v) \geq 1$. $v$-re legalább két $H$-beli tompa sarok illeszkedik. Nézzük meg, hogy mit mondhatunk $\mathsf{E}(b_v - 2)$-ről abban az esetben, ha $v$-nek csak egy $H$-beli sarkába érkeznek élek a hidakból, illetve abban az esetben, amikor legalább két sarkába.

Az első esetben mivel $u(v)$ kellemetlen sarok van két $H$-beli él között, így $u(v) + 2$ olyan sarok található $v$-nél, amelynek legfeljebb egy éle $H$-beli, így

$$\mathsf{E}(b_v - 2) \geq 1 + \frac{u(v) + 2}{2} - 2 = \frac{u(v)}{2}$$

ahol a plussz 1 a $v$-nél található „használatlan” tompa sarok miatt szerepel.

A másik esetben ugyanezen okoskodás alapján látható, hogy $u(v) + 4$ olyan saroktalálható $v$-nél, amelynek legfeljebb egy éle $H$-beli, így ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{E}(b_v - 2) \geq \frac{u(v) + 4}{2} - 2 = \frac{u(v)}{2}$$

ami igazolja (26)-t.

Térjünk most át a lemma másik tagjára. Megmutatjuk, hogy minden $F$ lapra

$$\mathsf{E}(a_F - 2) \geq \frac{\beta(F) - u(F)}{2}$$

teljesül.

Ehhez számoljuk meg az $F$ lap mentén az olyan csúcsokat, amelyek vagy belső csúcsok vagy belső csúcs a szomszédjuk. Vegyük észre, hogy az éltörlések és élösszehúzások után megmaradó élek olyan gráfot alkotnak, melyben két $H$-beli csúcs közti minden nem $H$-beli út pontosan kettő hosszú, azaz egy belső csúcsot tartalmaz (ha egy hosszú volt, azt kidobtuk, mint triviális hidat; a hosszabbakat pedig összehúztuk, hiszen egy összefüggőségi komponensbe tartoztak). Így azt kapjuk, hogy a leszámolandó csúcsok száma legalább $3\beta(F) - u(F)$, hiszen $H$-beli élek vagy csúcsok szakasza után 3 leszámlálandó csúcsunk van, de így minden külön álló $H$-beli csúcsot kétszer számolunk, így $u(F)$-et le kell vonni. Így tehát azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{E}(a_F) \geq \frac{3\beta(F) - u(F)}{2} \tag{27}$$

azaz $\beta(F) \geq 2$ esetén (27) biztos teljesül.

Nézzük meg a többi esetet. $\beta(F) = 1$ kétféleképpen is lehetséges, mégpedig úgy, hogy $F$-re csak egy $H$-beli csúcs vagy csak egy $H$-beli élek alkotta út illeszkedik. Az előbbi eset nyilvánvaló. Ha $F$ mentén van olyan él, amelyre $\phi \neq 0$ teljesül, akkor kell lenni olyannak is, amely ellentétes irányú és szintén $\phi \neq 0$ teljesül rá, hiszen $\phi$ rotáció-mentes. Így a $H$-beli úton legalább egyszer megfordul az irányítás, míg a másik, belső csúcsot tartalmazó ív mentén (a szélein hozzá kapcsolódó két $H$-beli éllel kiegészülve) az irányváltások várható értéke $3/2$. Így ebben az esetben is

$$\mathsf{E}(a_F - 2) \geq 1 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2} = \frac{\beta(F) - u(F)}{2}$$

teljesül.

Már csak a $\beta(F) = 0$ eset van hátra. Mivel ekkor $u(F)$ is 0, azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben az irányítás valahol vált a lap mentén. Mivel $\beta(F) = 0$, ezért $\phi$ mindegyik élen 0, így ezek az élek nem kapcsolhatják $H$-t egyik $v_B$-hez sem, így ezeknek egyoldalúaknak kell lenniük. A lap körüljárásakor ezek kétszer jelennek meg, ráadásul ellentétes irányban. Ezzel beláttuk (27)-t.

Ezeket a lemmába beírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
4g - 4 &= \mathsf{E}\left(\sum_{F\in\mathcal{F}}(a_F - 2) + \sum_{v\in V}(b_v - 2)\right) \\
&= \sum_F \mathsf{E}(a_F - 2) + \sum_v \mathsf{E}(b_v - 2) \\
&\geq \sum_F \frac{\beta(F) - u(F)}{2} + \sum_{v\in V(H)} \frac{u(v)}{2} + \sum_{B\in\mathcal{B}(H)}\left(\frac{\tau(B)}{2} - 2\right) \\
&= \sum_F \frac{\beta(F)}{2} + \sum_{B\in\mathcal{B}(H)}\left(\frac{\tau(B)}{2} - 2\right) \\
&= \sum_{B\in\mathcal{B}(H)} (\tau(B) - 2)
\end{aligned}$$

teljesül, amivel az *(a)* esetet beláttuk.

*(b) eset.* Ismét hajtsuk végre azokat az átalakításokat, amelyek után minden $B$ hidat csupán egy $v_B$ belső csúcs „reprezentál”, amely $\tau(B)$ éllel csatlakozik $H$-hoz, ám most ne töröljük ki a triviális hidakat. Az így kapott gráfot jelölje $G'$.

Jelölje $S$ azt a halmazt, amely a triviális hidak mindegyikét tartalmazza, valamint minden belső csúcs esetén a csúcsra illeszkedő éleket egy kivételével. Ekkor

$$|S| = \sum_{B \in \mathcal{B}(H)} (\tau(B) - 1) \leq 2g - 1$$

a feltétel szerint. Mivel a $G'$-n értelmezett rotáció-mentes áramok $\mathcal{C}(G')$ tere 2g dimenziós, ezért van olyan $\phi \in \mathcal{C}(G')$ amely 0-t vesz fel $S$ minden élén. A folyam feltétel miatt $\phi$ a többi belső csúcs és $H$ közt futó élen is 0. Így ha az eredeti gráfon egy olyan $\psi$ függvényt veszünk, ami $H$-n megegyezik $\phi$-vel, $H$-n kívül pedig mindenütt eltűnik, akkor egy rotáció-mentes áramot kapunk, azaz $\psi \in \mathcal{C}(G)$ és $H$ tartalmazza $\psi$ tartóját. Ezzel a *(b)* eset bizonyítását is befejeztük. ■

A következő fogalom bevezetésével kapjuk a tétel egy jól kezelhető, fontos következményét.

**<u>Definíció</u>** *Azt mondjuk, hogy a $G$ gráf $X$ részgráfja* ***k-szeparábilis*** *$G$-ben, ha $G$ felbontható a $G_1$ és $G_2$ részgráfokra úgy, hogy $|V(G_1) \cap V(G_2)| \leq k$, $V(X) \cap V(G_2) = \emptyset$ és $G_2$ tartalmaz olyan kört, amely nem 0-homológ.*

Az előző tétel segítségével a következőt állíthatjuk egy diszkrét analitikus függvény 0-helyeiről

**<u>Tétel</u>** *Legyen $G$ egy térkép a $g > 0$ génuszú $S$ irányítható felületen és legyen $X$ összefüggő részgráfja $G$-nek. Ekkor ha $X$ nem $(4g-1)$-szeparábilis $G$-ben, akkor minden rotáció-mentes áram, amely eltűnik $\overline{X}$-en (ahol $\overline{X}$ azoknak az éleknek a halmazát jelöli, melyeknek legalább egy végpontja $X$-beli) eltűnik a teljes $G$-n.*

## 3.3. Integrálás és kritikus analitikus függvények

Továbbra is olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek egy térképen és a duálisán vannak értelmezve, ám most csak a síkot tekintjük. Az integrálást a $G_\Diamond$ gráfon fogjuk végezni. Ez azért lesz előnyös, mert szimmetrikus $G$-re és $G^*$-ra.

**Definíció** *Legyenek $f$ és $g$ egy térképen és a duálisán értelmezve, valamint legyen $P = (p_0, p_1, ..., p_n)$ egy út a $G_\Diamond$ gráfon, ekkor legyen*

$$\int_P f\delta g := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(p_{k+1}) + f(p_k)}{2}(g(p_{k+1}) - g(p_k)) \tag{28}$$

*az $f$ függvény $g$-szerinti integrálja.*

Nyilvánvaló, hogy ha $P = (p_0, p_1, ..., p_n)$ egy olyan út, melyre $p_0 = p_n$, akkor az integrálás definíciója a

$$\int_P f\delta g = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(p_{k+1}) + f(p_k)}{2}(g(p_{k+1}) - g(p_k)) \tag{29}$$

alakba megy át.

Amennyiben $f$ és $g$ is analitikus az analitikusság (22) alakú definíciója szerint, úgy

**Állítás** *Amennyiben $f$ és $g$ is analitikus függvények, úgy az integrálás* (28) *alakú definíciója független lesz az úttól, azaz ha a $P$ és $P'$ utak végpontjai azonosak, akkor*

$$\int_P f\delta g = \int_{P'} f\delta g$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* Nyilván elég megmutatni, hogy $G_\Diamond$ tetszőleges lapja körül eltűnik az integrál. Így az integrálás útvonala $(t_e, r_e, h_e, l_e)$ lesz. Ekkor (29) kétszeresét erre az útra felírva azt kapjuk, hogy

$$2\int_P f\delta g = f(t_e)(g(r_e) - g(l_e)) + f(r_e)(g(h_e) - g(t_e))$$

$$+f(h_e)(g(l_e) - g(r_e)) + f(l_e)(g(t_e) - g(h_e))$$

kihasználva $g$ analicitását, (22) alapján azt kapjuk, hogy ez

$$= (f(r_e) + if(h_e) - f(l_e) - if(t_e))(g(h_e) - g(t_e))$$

ami valóban 0, ha most $f$-re alkalmazzuk (22)-t. ■

Természetesen az állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy amennyiben $P$ zárt görbe, úgy az $f$ függvény $g$-szerinti deriváltja eltűnik $P$-n. Azaz

$$\int_P f\delta g = 0 \tag{30}$$

amennyiben $f$ és $g$ analitikusak.

Az integrálás definíciójának egy egyszerű következménye, hogy ha $P$ egy $u$ és $v$ közti út, ahol $u, v \in V \cup V^*$, akkor

$$\int_P f\delta g = f(v)g(v) - f(u)g(u) - \int_P g\delta f$$

teljesül.

Legyen $P$ most egy zárt $G_\diamondsuit$-beli út, amely egy $D$ tartományt határol. $f$ továbbra is legyen analitikus függvény, ám $g$ legyen tetszőleges. Ekkor a $\widehat{g}(e) = g(h_e) - g(t_e) - i(g(l_e) - g(r_e))$ értéket $g$ *analitikus defekt*jének nevezzük az $e$ élre vonatkozóan. Ekkor (30) egy általánosításaként kapjuk, hogy

$$\int_P f\delta g = \sum_{e\subset D}(f(h_e) - f(t_e))\widehat{g}(e)$$

amit a *Reziduum tétel* diszkrét alakjának is tekinthetünk.

### Kritikus analitikus függvények

Sajnos nem minden működik ennyire jól az integrálás (28) alakú definíciójával kapcsolatban, mert igaz ugyan, hogy ha rögzítünk egy $u$ kezdőpontot a síkon, akkor az

$$F(v) = \int_u^v f\delta g$$

függvény egyértelműen meghatározott, de általában nem lesz analitikus.

Pontosabban minden $e$ élre

$$\widehat{F}(e) = F(h_e) - F(t_e) - i(F(l_e) - F(r_e))$$
$$= i \cdot (f(h_e) - f(t_e)) \cdot (g(t_e) + g(h_e) - g(r_e) - g(l_e)) \qquad (31)$$

lesz $F$ analitikus defektje.

Világos (31) alapján, hogy $F$ pontosan akkor lesz analitikus függvény, ha $f$ és $g$ nem csak analitikusak, de $g$-re

$$g(t_e) + g(h_e) = g(r_e) + g(l_e) \qquad (32)$$

is teljesül. Ha egy $g$ analitikus függvényre (32) is fennáll, akkor $g$-t ***kritikus analitikus függvény***nek nevezzük.

Mit jelent ez a fogalom geometriailag? Legyen $g$ a $G \cup G^*$ gráf beágyazása a komplex síkba. Ekkor a kritikus analitikusság a $G, G^*$ és $G_\diamondsuit$ gráfokra nézve a következő, egymással ekvivalens tulajdonságokat vonja maga után

(a) $G_\diamondsuit$ minden lapja egy rombusz
(b) $G_\diamondsuit$ minden élének azonos a hossza
(c) $G$ minden lapja beírható egy egységkörbe
(d) $G^*$ minden lapja beírható egy egységkörbe

Az ilyen tulajdonsággal rendelkező térképeket nevezzük –Mercat után– *kritikus térkép*eknek, a $g$ általi beágyazást pedig *rombikus beágyazás*nak.

A kritikusság fogalma holomorf formák segítségével is kifejezhető. Legyen $\phi$ egy komplex értékű holomorf forma a $G$ gráfon. Legyenek az $f$ és $e$ irányított élek olyanok, amelyekre $f = \overrightarrow{zy}$ és $e = \overrightarrow{yx}$ és az általuk alkotott $y$-beli sarok essen mindkettőnek a baloldalára. Ekkor egy $g$ függvény kritikussága az $e$ és $f$ éleken (32) alapján azt jeletni, hogy

$$g(t_e) + g(h_e) = g(r_e) + g(l_e) \text{ és } g(t_f) + g(h_f) = g(r_f) + g(l_f)$$

teljesülnek. Mivel kikötöttük, hogy $l_e = l_f$, így $g(l_f)$-t kifejezve és azt $l_e$ helyére írva azt kapjuk, hogy

$$g(t_e) + g(h_e) = g(r_e) + g(h_f) - g(r_f) + g(t_f)$$

ami $t_e = h_f$ alapján, átrendezés után úgy írható, hogy

$$g(h_e) - g(t_f) = g(r_e) - g(r_f) \tag{33}$$

vagy akár úgy, hogy

$$g(h_e) - g(t_f) = g(t_{e^*}) - g(t_{f^*})$$

hiszen $r_e = t_{e^*}$ és $r_f = t_{f^*}$ teljesül.

Így már világos, hogy egy $\phi$ holomorf formát akkor fogunk kritikusnak nevezni, ha

$$\phi(e) + \phi(f) = \phi(f^*) - \phi(e^*)$$

teljesül rá.

Amennyiben a $\phi$ holomorf forma kritikus és primitív függvénye $g$, akkor $\phi$ helyére $g$-t írva visszakapjuk (33)-t. Vegyük jobban szemügyre ezt a formulát. Az azonos élekhez tartozó értékeket vigyük egy oldalra és az így kapott egyenlőséghez adjuk hozzá a

$$g(h_f) - g(l_f) = g(t_e) - g(l_e)$$

egyenlőséget (a csúcsok ismét páronként megfeleltethetőek egymásnak), ekkor azt kapjuk, hogy

$$g(h_f) + g(t_f) - g(l_f) - g(r_f) = g(t_e) + g(h_e) - g(l_e) - g(r_e)$$

azaz azt kaptuk, hogy ekkor minden $e$ élen a $g(t_e) + g(h_e) - g(l_e) - g(r_e)$ érték azonos. Jól látható, hogy ez továbbra is fent fog állni, ha (például) a duális gráf csúcsain egy konstanst adunk a $g$-hez, vagyis a $g$ primitív függvény kritikusnak is választható.

Arra a kérdésre, hogy mely térképeken van kritikus holomorf forma, azaz mely térképek ágyazhatóak be rombikusan Kenyon és Schlenker egy friss cikke ad választ ([7]). Tekintsük a $G_\diamond$ gráf egy $F_0$ lapját. Ennek egy élszomszédja legyen $F_1$. Mivel a $G_\diamond$ gráf minden lapja 4 oldalú, ezért egyértelműen definiálható az $F_1$ lap $F_0$-al szemben lévő élszomszédja, $F_2$. Világos, hogy így egyértelműen definiálhatjuk lapok egy két irányban végtelen $(..., F_{-1}, F_0, F_1...)$ sorozatát, amelyet *sáv*nak nevezünk.

**Tétel (Kenyon, Schlenker)** *Egy síkgráf –melynek minden lapját négy él határolja– pontosan akkor ágyazható be rombikusan, ha egyik sávja sem keresztezi önmagát (és nem is periodikus), valamint bármely két sávjának legfeljebb egy közös lapja van.*

# 4. A Novikov-féle modell

Ebben a fejezetben egy az eddigiektől teljesen különböző megközelítéssel ismerkedünk meg. A Novikov és kollégája, Dynnikov által kidolgozott elmélet ([3]) alapvetően kétdimenziós háromszögelt felületekkel foglalkozik, ami azonban magasabb dimenziókra is kiterjeszthető. Itt csak az euklideszi sík szabályos háromszögekkel való parkettázásának esetével fogunk részletesen foglalkozni.

## 4.1. Elsőrendű háromszög-operátorok háromszögelt felületeken

Ahhoz, hogy a kontextus jobban átlátható legyen, bemutatjuk a háromszög-operátorok általános értelmezését is, amit majd csak nagyon speciális formában fogunk alkalmazni, de többször fogunk rá hivatkozni.

Legyen $S$ egy 2-dimenziós irányítható felület, ellátva egy $\mathcal{T}$ háromszögeléssel. Legyen $\mathcal{K}$ a háromszögek egy tetszőleges olyan halmaza, amely a háromszögelés minden $v \in V$ csúcsára tartalmaz legalább egy olyan $T$ háromszöget, amely illeszkedik a $P$ csúcsra. Rögzítsünk minden $T \in \mathcal{K}$ háromszög minden $v \in T$ pontjára egy $b_{T,v}$ együtthatót (tehát egy csúcshoz más-más háromszögben akár különböző együtthatókat is megadhatunk).

**<u>Definíció</u>** *Legyen $S$ egy irányítható felület a $\mathcal{K}$ háromszög családdal és rögzített $b_{T,v}$ együtthatókkal. Ekkor **elsőrendű háromszög-operátor**nak nevezünk egy olyan $Q^{\mathcal{K}}$ operátort, amely egy $\psi : V \to \mathbb{C}$ függvényhez a következőt rendeli*

$$(Q^{\mathcal{K}}\psi)_T = \sum_{v \in T} b_{T,v}\psi(v) \tag{34}$$

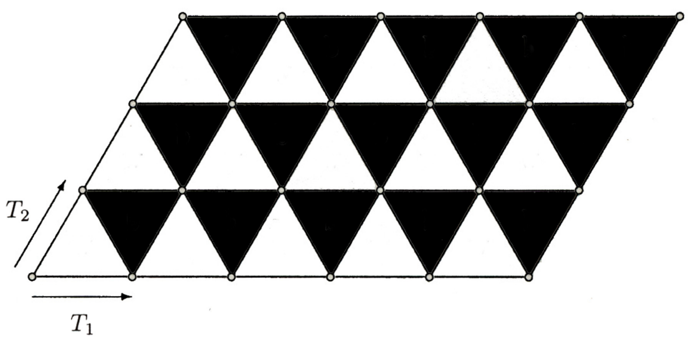
*a $T \in \mathcal{K}$ háromszögeken.*

Világos, hogy $Q^{\mathcal{K}}$ a háromszögelés csúcsain értelmezett függvények teréből a háromszögeken értelmezett függvények terébe képző lineáris leképezés.

Amennyiben $\mathcal{K} = \mathcal{T}$, azaz a kiválasztott háromszög család megegyezik a triangulációval, akkor a $Q^{\mathcal{K}}\psi = 0$ egyenlőség vizsgálatakor számos differenciál-geometriai fogalom diszkrét analogonját lehet bevezetni, mint például a konnekciót, a lokális illetve globális holonómiát. Ezekkel nem fogunk foglalkozni, de néhány itt nem bizonyított állítás hátterében ezeknek a fogalmaknak illetve a holonómia csoportnak a használata áll.

## 4.2. Holomorf függvények az euklideszi síkon

Tekintsük az euklideszi sík parkettázását szabályos háromszögekkel, nevezzük $\mathcal{L}$-nek a csúcspontjai által alkotott halmazt. Világos, hogy $\mathcal{L} \cong \mathbb{Z}[i]$ továbbra is fennáll, ám kényelmi okokból $\mathcal{L}$-re most mint $\mathbb{Z}^2$-re fogunk tekinteni. Az $\mathcal{L}$-et önmagába vívő két eltolás operátort jelöljük $T_1$-el illetve $T_2$-vel a 3. ábrán látható módon. Ekkor minden háromszög megadható $\langle v, T_1 \cdot v, T_2 \cdot v\rangle$ vagy $\left\langle v, T_1^{-1} \cdot v, T_2^{-1} \cdot v\right\rangle$ formában. A $\langle v, T_1 \cdot v, T_2 \cdot v\rangle$ alakú háromszögeket ***fehér háromszög***eknek fogjuk nevezni és $T_v^w$-vel fogjuk jelölni őket, míg a $\left\langle v, T_1^{-1} \cdot v, T_2^{-1} \cdot v\right\rangle$ formában adott háromszögeket ***fekete háromszög***eknek fogjuk hívni és $T_v^b$-vel fogjuk jelölni. Így egy természetes bijekciót kapunk a csúcsok és a fehér (fekete) háromszögek között a $v \leftrightarrow T_v^w$ (valamint $v \leftrightarrow T_v^b$) megfeleltetéssel.




3.ábra

Most két olyan operátort fogunk definiálni, amelyek közül az egyik csak a fehér háromszögeken összegzi egy adott $\psi$ függvény értékeit (ezt $Q_w$ fogja jelölni), míg a másik csak a fekete háromszögeken(ezt pedig $Q_b$ fogja jelölni). Ezek a következő alakban írhatóak

$$Q_w := 1 + T_1 + T_2$$

valamint

$$Q_b := 1 + T_1^{-1} + T_2^{-1}$$

$Q_w$ és $Q_b$ természetesen elsőrendű háromszög-operátorok a síkon, hiszen (34) alakban is könnyen felírhatóak, mégpedig $b_{T,v} \equiv 1$-el. A $v \leftrightarrow T_v^w$ és $v \leftrightarrow T_v^b$ megfeleltetések miatt ezekre az operátorokra úgy is gondolhatunk, mint amelyek az $\mathcal{L}$-en értelmezett függvények terét önmagára képzik.

$Q_w$ és $Q_b$ segítségével már definiálhatjuk a holomorf függvényeket illetve a polinomokat. Első ránézésre a definíciók meglepőnek tűnhetnek, motivációjuk és magyarázatuk közvetlenül a kimondásuk után fog szerepelni.

**<u>Definíció</u>** *Egy $\mathcal{L}$-en értelmezett $\psi$ függvényt* ***holomorf függvény****nek nevezünk, ha $Q_b\psi = 0$ teljesül, azaz ha $Q_b$ azonosan 0-ba képzi $\psi$-t. A holomorf függvények összességét jelölje $\mathcal{H}$. A definíciót ekkor úgy is írhatjuk, hogy $KerQ_b = \mathcal{H}$.*

**<u>Definíció</u>** *Egy $\mathcal{L}$-en értelmezett $\psi$ függvényt* ***k-ad fokú polinom****nak nevezünk, ha $Q_b\psi = 0$ (azaz ha holomorf) és emellett $Q_w^k\psi \neq 0$ és $Q_w^{k+1}\psi = 0$ is teljesül rá. A legfeljebb k-ad fokú polinomok terét $\mathcal{P}_k$-val jelöljük.*

Az egyik meglepő tény a holomorfság fenti definíciójával kapcsolatban, hogy például a komplex $z$ függvény $\mathcal{L}$-re való megszorítása nem lesz holomorf ebben az értelemben. Ám vegyük jobban szemügyre $\mathcal{L}$-et. Világos, hogy háromszínezhető, mint gráf. Mindegyik színhez rendeljük hozzá a három komplex egységgyök valamelyikét bijektív módon és szorozzuk meg az aktuálisan vizsgált függvény ott felvett értékét az adott egységgyökkel (ha ezek után összegeznénk a függvényértékeket a háromszögeken, akkor ismét elsőrendű operátort kapnánk). Ha ezek után az origót betoljuk az egyik fekete háromszög középpontjába és a komplex egységgyökökkel súlyozott függvényre alkalmazzuk $Q_b$-t, akkor az így újrakoordinátázott $\mathcal{L}$-en a szokásos értelemben vett holomorf függvényeink javarésze (a polinomok például kivétel nélkül) holomorfak lesznek az új értelemben is.

Az adott háromszögeken felvett függvényértekeket súlyozhatjuk másképpen is. Például úgy, hogy egy fekete háromszög alsó sarkához rendeljük az 1-et, mint harmadik egységgyököt, a jobb-felső sarkához $\epsilon$-t, a bal-felsőhöz pedig $\epsilon^2$-t. Ez valójában nem különbözik a színek szerinti súlyozástól, hiszen ha ott a súlyozások után egy adott $T$ háromszögre $(Q_b\psi)_T = 0$ teljesül, akkor az után is teljesülni fog, ha a függvény minden értékét további egységgyökökkel szorozzuk meg az adott háromszögön, azaz a két súlyozás egymásba alakítható. Természetesen ha a függvényértékeket „geometriai elhelyezkedésük” alapján súlyozzuk és úgy adjuk össze őket a harámszög mentén, akkor ismét elsőrendű háromszög-operátort kapunk. Ha most a fehér háromzögeken is hasonlóan súlyozunk, akkor a $Q_w$ operátor a deriváláshoz hasonlóan fog működni. Míg a $z$ függvény $Q_b$ és $Q_w$ hatására is eltűnik, addig például a $z^2$ függvény $Q_w$ mellett csak konstans lesz és csak $Q_w$ következő alkalmazása után tűnik el. Ezek után már a polinomok definíciója is érthetőbb.

Mivel a definícióban az operátorok úgy szerepelnek, hogy csupán összegzik a csúcsokon felvett függvényértékeket, így egy holomorf függvény valós és képzetes részére a megfelelő egyenlőségek külön-külön teljesülnek. Tehát egy komplex holomorf függvéyre ismét tekinthetünk úgy, mint valós függvények egy párjára, amik egymástól függetlenek, azaz a továbbiakban elég valós értékű függvényekkel foglalkozni.

További analógia a korábbiakkal, hogy ha tekintjük $\mathcal{L}$ háromszínezését, akkor ha egy $\psi$ függvény holomorf, akkor bármelyik színosztályra leszűkítve „harmonikus" is, abban az értelemben, hogy minden csúcsban a hat legközelebbi azonos színű csúcs közül három egy „nagyobb" fekete háromszöget alkot és az itt felvett függvényértékek átlagát veszi fel az adott csúcsban. A háromszínezésnél ha kitüntetünk egy színosztályt, akkor az ezáltal alkotott háromszögrács duálisa épp a másik két szín által alkotott hatszögrács lesz. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy egy holomorf függvény „harmonikus" az „eredeti" rács csúcsain, míg a duálisról ilyet nem tudunk állítani. Ez egy Mercat-féle modellben belátott állítás pontos analogonja.

A most definiált polinomok teréről is bizonyíthatóak a korábbiakkal formális összhangban lévő eredmények, mint például

**Tétel** *A legfeljebb $k$-ad fokú polinomok $\mathcal{P}_k$ vektortere $2k+2$ dimenziós.*

**Következmény** *A $\mathcal{P}_k/\mathcal{P}_{k-1}$ polinomok vektortere 2 dimenziós.*

A klasszikus esetben egy függvényt tetszőlegesen előírhattunk a tengelyek mentén és az egyértelműen kiterjeszthető volt az egész síkra úgy, hogy analitikus legyen. Esetünkben ez természetesen nem a két tengely lesz, hanem három, egymással $120°$-os szöget bezáró „féltengely" a sík egy tetszőleges pontjából indítva. A kiterjeszthetőség és egyértelműség igazolása ugyanúgy triviális, mint a klasszikus esetben. A következőkben $v_1$ és $v_2$ értelemszerűen a $v \in \mathcal{L} \cong \mathbb{Z}^2$ csúcs két koordinátáját jelöli.

**Állítás** *Legyen $Y_{v_1,v_2}$ az $\mathcal{L}$ következő részhalmaza*

$$Y_{v_1,v_2} = \{(v_1,v_2)\} \cup \{(v_1-j,v_2),(v_1,v_2+j),(v_1+j,v_2-j)\}_{j\geq 1}$$

*ekkor $Y_{v_1,v_2}$-n tetszőlegesen előírhatjuk egy $\mu$ függvény értékeit, $\mu$ egyértelműen kiterjeszthető lesz holomorf módon az egész $\mathcal{L}$-re.*

Az első fejezetben arra is láttunk példát, hogy a sík egy véges részén – egy téglalapon– adott analitikus függvényhez mindig találtunk a véges részen vele egybeeső polinomot. Ennek az analogonjához be kell vezetnünk a *nagy fekete háromszög* fogalmát.

Egy ilyen háromszög a következő alakban írható

$$T_v^{(k)} := \langle (v_1, v_2), (v_1 - 2k - 1, v_2), (v_1, v_2 - 2k - 1) \rangle$$

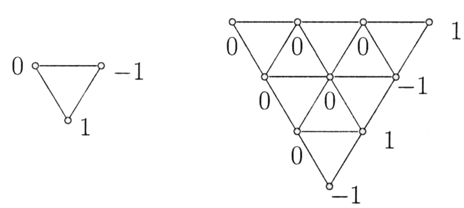
ahol a zárójelben a csúcsai szerepelnek, de hozzá értjük az összes oldalain és azokon belül lévő csúcsokat is. Nyilvánvaló, hogy $T_v^{(k)}$ minden oldalán $2k+2$ csúcs található. Így mostmár kimondható a kívánt tétel

<u>**Tétel**</u> *Minden $\psi \in \mathcal{H}$ holomorf függvényhez és minden $v \in \mathcal{L}$-re és $k \geq 0$-ra egyértelműen létezik egy legfeljebb $k$-ad fokú $p_k \in \mathcal{P}_k$ polinom, amely $T_v^{(k)}$-n megegyezik $\psi$-vel.*

A továbbiakban szeretnénk a Taylor-sorfejtés analogonját elkészíteni. Ehhez szükségünk lesz $T_v^{(k)}$-ken értelmezett $k$-ad fokú polinomokra. Erre a kanonikus eljárásunk az lesz, hogy olyan polinomokat definiálunk a nagy fekete háromszögeken, amelyek mindenütt 0-t vesznek fel, kivéve a nagy háromszög egyik oldalán, ahol feltávlta $\pm 1$-et a következőképpen

$$\begin{aligned}
\rho_{k,1}(v_1 - 2k - 1 + j, v_2) &= (-1)^{j+k} \\
\rho_{k,2}(v_1, v_2 - j) &= (-1)^{j+k} \\
\rho_{k,3}(v_1 - j, v_2 - 2k - 1 + j) &= (-1)^{j+k}
\end{aligned}$$

$j = 0, 1, ..., 2k+1$. A 4. ábrán a $\rho_{k,1}$ polinom $T_v^{(k)}$-en felvett értékei láthatóak $k = 1, 2$ esetén. A $\rho_{k,2}$ és $\rho_{k,3}$ polinomok az ábra elforgatásával kaphatóak.




4.ábra

A nagy fekete háromszögön alkalmazva a $Q_w$ operátort a polinomok között a

$$Q_w \rho_{k,i} = \rho_{k-1,i} \tag{35}$$

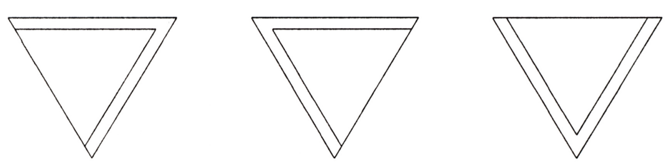
összefüggés teljesül, ahol $\rho_{k,i}$ természetesen egy $T^{(k)}_{v_1,v_2}$-n értelmezett polinom, míg $\rho_{k-1,i}$ egy $T^{(k)}_{v_1-1,v_2-1}$-n értelmezett polinom. A (35) összefüggés közvetlenül is leolvasható a 4. ábráról a $Q_w \rho_{2,1} = \rho_{1,1}$ esetben, hiszen jól látható, hogy $T^{(2)}_v$-ben összesen három fehér háromszög található, melyek középpontjai egy fekete háromszöget alkotnak és a rajtuk felvett polinomértékek összege éppen a $\rho_{1,1}$ által a $T^{(1)}_v$-n felvett értékek. Ebből könnyen látható, hogy a $\rho_{k,i}$ polinomok valóban $k$-ad fokúak.

A $\rho_{k,1}$, $\rho_{k,2}$ és $\rho_{k,3}$ polinomok lineárisan összefüggők, hiszen az előbbiek alapján könnyű meggondolni, hogy

$$\rho_{k,1} + \rho_{k,2} + \rho_{k,3} \in \mathcal{P}_{k-1}$$

teljesül. Tehát ha szeretnénk egy bázist ezekből a polinomokból, akkor minden $k$-ra minden $T^{(k)}_v$ nagy fekete háromszöghöz a $\rho_{k,i}$ polinomok közül ki kell választanunk kettőt.

Ennek megvalósításához definiáljuk a $T^{(k)}_{v_1,v_2}$ nagy fekete háromszög *kétirányú kiterjesztés*eit. $T^{(k)}_{v_1,v_2}$-nek három típusú kiterjesztése van, amelyeket (12), (23) és (13) típusú kiterjesztéseknek nevezünk és az 5. ábrán látható módon ezek a $T^{(k)}_{v_1+1,v_2+1}$, $T^{(k)}_{v_1,v_2+1}$ és $T^{(k)}_{v_1+1,v_2}$ nagy fekete háromszögek.



(12) (23) (13)

5.ábra

A kétirányú kiterjesztések segítségével szeretnénk egyre növő háromszögekből álló háromszögsorozattal lefedni a síkot, hiszen tudjuk, hogy a nagy fekete háromszögeken tudjuk a holomorf függvényeket polinomokkal helyettesíteni.

**<u>Definíció</u>** *Nagy fekete háromszögek egy $T(0), T(1), \ldots$ sorozatát* ***megengedett****nek nevezzük, ha a következők teljesülnek*

(a) *$T(0)$ egy egyszerű fekete háromszög, azaz egy $T_v^b$ valamely $v \in \mathcal{L}$-re*
(b) *$T(k+1)$ kétirányú kiterjesztése $T(k)$-nak, azaz $T(k+1)$ egy $T_v^{(k)}$ nagy fekete háromszög valamely $v \in \mathcal{L}$-re*
(c) *$\bigcup_k T(k)$ a sík egy parkettázását adja.*

Tekintsünk most egy ilyen megengedett háromszög sorozatot. Ezen fogjuk megadni a $\bigoplus_k \mathcal{P}_k$ polinomok vektorterének egy bázisát $\psi_j^1, \psi_j^2$ $j = 0, 1, \ldots$ alakban. Amennyiben a $T(k)$ háromszög a $T(k-1)$ háromszög $(ij)$ típusú kiterjesztése, akkor $\psi_k^1, \psi_k^2$ legyenek a $\rho_{k,i}$ és $\rho_{k,j}$ polinomok.

Világos, hogy erre a bázisra minden $k < j$ esetén $\psi_j^i = 0$ teljesül $T(k)$-n. Így minden

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^1 \psi_k^1 + \alpha_k^2 \psi_k^2) \tag{36}$$

alakú sor mindenütt konvergál $\mathcal{L}$-en.

Jelöljük $T^b(k)$-val a $T^b_{v_1-k, v_2-k}$ sima fekete háromszöget, ahol $T(k) = T^{(k)}_{v_1,v_2}$ alakú. (35) alapján ha egy $T(k)$-n értelmezett polinomra $k$-szor alkalmazzunk a deriválás analogonjaként bevezetett $Q_w$ operátort, akkor a kapott polinom éppen egy $T^b(k)$-n értelmezett polinom lesz.

**<u>Tétel</u> (Taylor-sor)** *Minden $T(0), T(1), \ldots$ megengedett háromszög sorozathoz és minden $\psi \in \mathcal{H}$ holomorf függvényhez létezik $\alpha_0^1, \alpha_0^2, \alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_2^1, \alpha_2^2, \ldots$ együtthatók egy egyértelműen meghatározott sorozata, amelyre*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^1 \psi_k^1 + \alpha_k^2 \psi_k^2)$$

*a $\psi$ függvényhez konvergál. Valamint az $\alpha_k^1, \alpha_k^2$ együtthatók meghatározhatóak a „$k$-adik derivált”, azaz $Q_w^k \psi$ által a $T^b(k)$ háromszögön felvett értékekből.*

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy egy (36) alakú sor az egész síkon konvergál. Azt is tudjuk, hogy a $\psi$ függvényt a $T(k)$ nagy háromszögön tudjuk legfeljebb $k$-ad fokú polinommal közelíteni. Ezzel az állítás első felét beláttuk.

Az állítás második felének igazolásához vegyük észre, hogy ha $\psi$ azonosan nulla $T(k)$-n, akkor $Q_w^k \psi$ is az lesz $T^b(k)$-n. Így $Q_w^j \psi_k^i$ akkor és csak akkor nem azonosan nulla $T^b(k)$-n, ha $j = k$. Ez igazolja az állítás második felét. ■

## 5. Irodalomjegyzék

[1] R. Diestel: Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1997

[2] R.J. Duffin: Basic properties of discrete analytic functions, *Duke Math J.* **23** (1956), 335-363.

[3] I.A. Dynnikov and S.P. Novikov: Geometry of the Triangle Equation on Two-Manifolds, *Mosc. Math. J.* **3** (2003), 419-438

[4] W. Fulton: Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1995

[5] G. Halász: Bevezető komplex függvénytan, egyetemi jegyzet, 1998

[6] G. Halász: Fourier integrál, Komplex függvénytani füzetek I., 3. kiadás, egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó 2005

[7] R. Kenyon and J-M. Schlenker: Rhombic embeddings of planar graphs with faces of degree 4 (math-ph/0305057)

[8] L. Lovász: Discrete Analytic Functions, *Eigenvalues of Laplacians and other geometric operators*, International Press, Surveys in Differential Geometry **IX** (2004)

[9] C. Mercat: Discrete Riemann surfaces and the Ising model, *Comm. Math. Phys.* **218** (2001), 177-216

[10] B. Mohar and C. Thomassen: Graphs on surfaces. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001

[11] I.M. Singer and J.A. Thorpe: Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1967

[12] D. Zeilberger: Discrete Analytic Functions of Exponential Growth, *Trans. Amer. Math. Soc.* **226** (1977), 181-189

[13] D. Zeilberger and Harry Dym: Further Properties of Discrete Analytic Functions, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 405-418