TANÁCS JÁNOS

AMI HIÁNYZIK BOLYAI JÁNOS APPENDIX*ÉBŐL – ÉS AMI NEM*

*A BOLYAI-FÉLE „*PARALLELA*” TERMINUS FILOLÓGIAI ÉS SZEMANTIKAI REKONSTRUKCIÓJA*

TÉMAVEZETŐ: MARGITAY TIHAMÉR HABILITÁLT DOKTOR

BME GTK FILOZÓFIA ÉS TUDOMÁNYTÖRTÉNET TANSZÉK,

BUDAPEST, 2004

Nyilatkozat

Alulírott, Tanács János kijelentem, hogy ezt a doktori értekezés magam készítettem és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint, vagy azonos tartalomban, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2004. október 14.

Tanács János
aláírás

Az értekezés bírálatai és a védésről készült jegyzőkönyv a későbbiekben a Dékáni Hivatalban elérhetők.

Tartalomjegyzék

Ábrák és táblázatok jegyzéke

Köszönetnyilvánítás

Elsőként Dóczi Tamásnak, általános iskolai matematikatanáromnak tartozom köszönettel – ez egyben ékes bizonysága annak, hogy az általános iskolai tanítás során szerzett élmények meghatározó szerepet játszanak az érdeklődés későbbi alakulása szempontjából. Krámli Györgynek, középiskolai tanáromnak pedig azért vagyok hálás, mert elsőként mutatta meg számomra, hogy a műveltség és a világra vonatkozó ismeretek nem igazodnak sem diszciplínákhoz, sem végzettséghez, még ha a kellő mélység elérése érdekében olykor nincs is jobb eszköz kezünkben, mint a valamilyen módon való tagolás.

Köszönettel tartozom továbbá az ELTE TTK Tudományfilozófia és Tudománytörténet Tanszék munkatársainak – Kampis Györgynek, Rédei Miklósnak, Ropolyi Lászlónak, Szegedi Péternek –, illetve a History and Philosophy of Science Colloquium szervezőjének, E. Szabó Lászlónak az érdeklődésükben kifejeződő tudományos támogatásért és biztatásért. Nem csekély hálával tartozom Nyíri Kristófnak és a MTA Filozófiai Kutatóintézetének a fiatal kutatói ösztöndíj által megteremtett – a továbbiakat alapvetően befolyásoló – lehetőségért. Bár csupán egy évig lehettem tagja a Kutatóintézet Tudománytörténet és Tudományfilozófia Csoportjának, mégis sokat köszönhetek az itt töltött időnek. A csoportban töltött periódus legjobban talán azzal a mindvégig nem múló megilletődöttséggel jellemezhetem, hogy együtt dolgozhattam és tanulhattam Laki Jánostól, Benedek Andrástól és Székely Lászlótól. Székely Lászlónak ezen túl azért pedig abban is adósa vagyok, mert általa ismerkedtem meg a természettudomány, a modern fizika jelentős eredményeinek tudományfilozófiai és –történeti szemléletű tárgyalás- és feldolgozásmódjával. Palló Gábornak a *Recepció és kreativitás* projektbe történő beszervezésért, Békés Verának pedig a filológia felé terelgetésért is köszönettel tartozom.

Az értekezéshez vezető kutatási folyamat különböző periódusaiban az OTKA, az OKTK, az NKFP, valamint a Bolyai Kutatási Ösztöndíjbizottság támogatott. Az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézete Könyvtárának – külön is Karácsony Ágnesnek –, az MTA Filozófiai Kutatóintézete Könyvtárának, az MTAK Könyv- és Folyóiratgyűjteményének, az MTAK Bolyai-gyűjteményének és az MTAK Mikrofilmtárának, a BME-OMIKK Központi Könyvtárának – külön is Biacs Péternének és Nagy Gézánénak – és a BME-OMIKK Társadalomtudományi Olvasójának – külön is Melis Sándornénak és Sárközi Józsefnénak és –, valamint a szegedi

Somogyi Könyvtárnak és mindezen könyvtárak könyvtárosainak nem szűnő segítőkészségükért és türelmükért vagyok hálás.

Hálával tartozom számos diákomnak, mindenek előtt a PPKE Prohászka Műhely Szakkollégiumának, hogy a tanítás lehetőségének megteremtésén keresztül lehetővé tették számomra az itt előadott gondolatok megalapozását és tisztázását.

A latin nyelvi alapokból történő felzárkóztatásért és a nyelvi konzultációkért Szabó Marinak tartozom köszönettel; Bernáth Istvánnak pedig azért, hogy ráirányította a figyelmemet a források fizikai és nyelvi hozzáférhetősége jelentőségének. Ez utóbbi ugyanis eredeti kutatási tervem jelentős, de gyümölcsöző megváltoztatásához vezetett. Steiger Kornél, Máté András és Forrai Gábor figyelmével tüntetett ki, és ez nem kevés biztatást jelentett számomra.

Tóth Imrének és Vekerdi Lászlónak az itt kifejtett gondolatok és eredmények előzményeiről adott pozitív értékelései, valamint tudományos támogatásuk elvitathatatlan szerepet játszott az értekezéshez vezető kutatási folyamatban, a tudományos kritikával szembeni attitűdjeik egyszersmind, legjobb igyekezetem szerint, mértékül is szolgálnak számomra.

A BME Filozófia és Tudománytörténet Tanszékén kollégáimnak és munkatársaimnak – Kerékgyártó Bélának, Martin Endrének, Palotai Jánosnak, Szabó Imrének és Várnai Andrásnak – a szellemi atmoszféráért és azért az értékrendért tartozom köszönettel, amely mindvégig háttérül és kiindulási alapul szolgált számomra. Külön szeretném kiemelni Zentai Istvánt, akinek a fizika és a kozmológiai filozófiai kérdéseiről szóló kurzusai csalogattak e tanszék szellemi vonzáskörzetébe. Kövesi Zsuzsa és Molnár Miklósné számos esetben vett le rólam terhet, ily módon járulva hozzá a kutatásom előrehaladásához.

Az értekezés korábbi változatához fűzött alapos megjegyzéseikért Margitay Tihamért, Láng Benedeket, Zemplén Gábort és Binzberger Viktort illeti köszönet.

Doktorandusz-társaim, Demeter Tamás és Faragó Péter kezdettől fogva támogattak és nem egy esetben motiváltak.

Kutrovátz Gábort, Láng Benedeket és Zemplén Gábort már eddig is több helyütt meg kellett volna említenem, ám hadd álljon csak itt nevük külön, csupán azt kiemelve, hogy az általuk megteremtett közeg és közösség nélkül, egyedül, aligha készült volna el e mű.

Fehér Mártát és Margitay Tihamért sokkal inkább mestereimként, mint a személytelenül hangzó téma- és programvezetőimként szeretném megemlíteni. Szeretném megköszönni kritikai és támogató segítségük, biztatásuk és bizalmuk számomra ideális keverékét.

Mivel, Rilkével szólva, minden kutatás csak azután lehetséges, hogy az élet előbb metafizikai értelemben lehetségessé vált, ezért családomnak és barátaimnak is köszönettel tartozom. Végül pedig köszönet illeti Parádi Nellit, türelméért, segítségéért és mindenért.

Bevezetés

„És valóban, a nélkül, hogy *el nem árulnók gyengénket* és gyenge jelleműeknek nem mutatkoznánk, [a Gauss-féle indokokat – T.J.] sohasem hozhatjuk fel annak megokolására, hogy, az ilyen még homályos tárgyakra vonatkozó *bevált* saját *munkáinkat* miért tartjuk vissza."

„Mi más egyébről van szó a tudományokban, mint épen arról, hogy *a homályos dolgokat tisztázzuk, és azt a mi hiányzik, előteremtsük?* Ha GAUSS nem volna erről ép úgy meggyőződve és áthatva, mint az alulirott, és e kérdésre való válasza kétkedőbb volna, akkor hasonló okból még számosat kellett volna elrejtenie többi kiváló munkái közül. Hisz maga is úgy nyilatkozott egyik munkájáról (a *Disquisitiones arithmeticae*ről), hogy azt egész Európában akkor csak hat matematikus értette meg."[1]

Bolyai János

Az értekezés lényegében egyetlen kifejezés jelentésének filológiai, történeti és szemantikai eszközöket felhasználó rekonstruálására tesz kísérletet. Ez a terminus nem más, mint a Bolyai János-féle „párhuzamos". A vizsgálódás azt igyekszik majd kideríteni, hogy mit jelenthetett Bolyai János számára a „párhuzamos" kifejezés – vagy pontosabban az a terminus, amely a „párhuzamos" történeti elődjeként azonosítható, és amely helyett mi is használjuk. Ezzel összefüggésben a tudományos kíváncsiság két dologra irányul. Egyrészt, hogy Bolyai vajon hol, másrészt hogy milyen értelemben használja fő művében, az *Appendix*ben a párhuzamosnak megfelelő kifejezést?

A „párhuzamos" fogalma értelemszerűen központi szerepet játszott abban a problémahalmazban, amely a „párhuzamosok problémája" néven híresült el, és amely végül a Bolyai-Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi geometria címke alatt összefoglalt matematikai elmélet felfedezésével negatív megoldást nyert. A „párhuzamos" terminus azonban nem csupán a „párhuzamosok problémája" történeti folyamatának kitüntetett terminusa, hanem az előzményekben játszott szerepéből fakadóan az újonnan felfedezett és megalkotott nem-

[1] Bolyai Jánosnak a János főherceghez írott folyamodványa 1832. május 3-i keltezésű fogalmazványából (Stackel 1914: 231).

euklideszi geometriának is. Ez a Bolyai-féle „párhuzamos” előtérbe állítását, pontos helyének és jelentésének rekonstruálását önmagában is indokolja. E szerep központi jellegének rögzítésével elvileg lehetségessé válna, hogy figyelmünket közvetlenül, lényegében az előzmények taglalása nélkül is a Bolyai-féle „párhuzamos” rekonstrukciójára összpontosítsuk, meghagyva ezzel a teret azon munkák számára, amelyek az előzményeket a maguk indokolt részletességében és alaposságában tárgyalják. Jelen esetben nem a dolgozat történeti jellegéből fakad, hogy mégsem eszerint célszerű eljárnunk, hanem abból, hogy az előzmények által kirajzolódó kép a matematikatörténet-írást jelentős mértékben befolyásolni látszik a nem-euklideszi geometria fogalmi-terminológiai rendszereinek megfigyelésekor, szemügyre vételezésekor és értékelésekor. Ahhoz, hogy kivehetővé váljon, hogyan és miért gyakorol hatást a nem-euklideszi geometria történetírására a „párhuzamosok problémájának” története által sugallt kép, első lépésben a probléma lényegét és a kérdés fogalmi vetületét kell majd áttekintenünk. Ez egyfelől lehetővé teszi annak a szemantikai tézisnek a megfogalmazását, amelynek az értekezés eredményei tételesen ellentmondani látszanak. A „párhuzamosok problémájának” története által sugalmazott szemantikai felfedezhetetlenségi tézis – a nem-euklideszi geometria felfedezhetetlensége a „párhuzamos” terminus „ekvidisztáns” értelmének a „nem metsző” jelentéssel szembeni előnyben részesítése esetén – jelöli ki azt a hátteret, amely az értekezés eredményeit még plasztikusabbá teszi. Ez, másfelől, szoros összefüggésben van az értekezés önmagán túlmutató tétjével.

Az a kérdés ugyanis, hogy Bolyai mit is értett a „párhuzamoson”, illetve a neki megfeleltethető elődkifejezésen, perdöntő azzal kapcsolatban, hogy a Bolyai- és a Lobacsevszkij-féle geometria fogalmi-terminológiai rendszereit mennyiben tekinthetjük egyezőnek vagy mennyiben kell különbözőnek tartanunk. A kifejlett, fogalmilag és terminológiailag kidolgozott, majd közzétett Bolyai- és Lobacsevszkij-féle geometria egyezése vagy különbözősége vízválasztó az olyan kérdések szempontjából, hogy lényegében egyező vagy inkább alternatív fogalmi rendszerekről kell-e beszélnünk? Fel kell-e vetnünk a tudományos elméletek közötti választás problémájával parallel módon a matematikai fogalmi-terminológiai rendszerek közötti választás problémáját? Kell-e kutatnunk azután, hogy hol, mikor és hogyan, milyen szempontok szerint történt a szóba jövő alternatív fogalmi-terminológiai rendszerek közötti választás? Vagy netalán e kérdések azért nem merülnek fel, mert a két felfedező fogalmi rendszerének egymással, illetve a nem-euklideszi geometria modern előadásmódjával való egyezéséből fakadóan nem vethetők fel épkézláb módon? Másfelől a Bolyai- és a Lobacsevszkij-féle geometria fogalmi rendszereinek egyezése vagy különbözősége a maguk tényleges megformáltságaiban kulcsfontosságú abból a szempontból is, hogy milyen szemantikai felfogást állíthatunk a fogalmi rendszerek megalkotásának folyamata mögé? A folyamat, amelyről itt szó van, a történeti (tehát nem a modern logikai-matematikai) értelemben vett euklideszi geometria fogalmi rendszeréből a Bolyai-féle, illetve a Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi fogalmi rendszerbe való átmenet. Az, hogy milyen vagy melyik szemantikai elmélet képes helyesen leírni ezt a folyamatot, nyilvánvaló módon függ attól, hogy hogyan fest az, amit le kell írnia. Magától értetődő módon más szemantikai elmélet passzol ahhoz a folyamathoz, amelynek végeredményeként az egymástól függetlenül dolgozó felfedezők egyező fogalmi-terminológiai rendszert alakítottak ki, és nyilván másmilyen elmélet illik hozzá, ha a fogalmi rendszerek, mint kimenetelek lényegesen különböznek. A történeti értelemben vett euklideszi geometria fogalmi rendszeréből a Bolyai-féle, illetve a Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi fogalmi rendszerbe való átmenet a fogalmi kiterjesztés, fogalmi általánosítás, jelentésváltozás terminusaiban is megfogalmazható. A kérdés így fogalmazva az, hogy számolnunk kell-e vele, hogy a matematikai fogalmi kiterjesztés lényegesen eltérő fogalmi-terminológiai rendszerekre vezet? Vajon az individuálisan és egymástól függetlenül megvalósított fogalmi általánosítás – ha szeretnénk neki értelmet adni azon az önmagában semmitmondó értelmen túl, amely miatt mindenféle változást belesöpörhetünk a „fogalmi általánosítás" kategóriájába –, közösségileg összetartó folyamat-e jól egyező végeredményekkel, vagy inkább széttartó és lényegesen különböző fogalmi rendszerekhez vezető-e? Vajon a matematikai fogalmak jelentéseinek megváltozása milyen mértékű és milyen jellegű egy ilyen folyamatban? Vagy olyan mértékű-e, amely komoly fogalmi-terminológiai különbségeket és esetleg kommunikációs nehézségeket eredményezhet, vagy netalán olyan csekély mértékű, hogy fel sem kell vetnünk a kommunikáció nehézségének kérdését? Leírható-e ez az átmenet az érintett terminusok jelentéseinek megváltozása nélkül? Ha pedig nem, akkor milyen szemantikai mechanizmust állíthatunk az egész mögé, amely éppen ilyen mértékű és jellegű jelentésváltozást enged meg? Az ilyen jellegű kérdések Thomas Kuhn nagyhatású műve, *A tudományos forradalmak szerkezete* által kiváltott viták óta állnak a tudományfilozófiai vizsgálódások homlokterében.[2] Az értekezés nyilván nem vállalkozhat az iménti kérdésekhez kapcsolódó bőséges irodalom áttekintésére, mindazonáltal fontos jeleznem, hogy e kérdések képezik az értekezés tézisei és

[2] A jelentésváltozás (meaning variance) és kapcsolt problémáinak áttekintését, valamint jelentéselméleti hátterét lásd Fehér (1983). A matematikafilozófiában és –történetben a Kuhn által motivált vitákat Gillies (1992) kötete foglalja össze. Az írások a Dauben-Crowe vita köré szerveződnek. E vitát Crowe azon tézise robbantotta ki, hogy „a matematikában soha nincsenek forrdalmak" (Crowe 1992: 19).

eredményei számára azt a tágabb kontextust, amelyből jelentőségük, relevanciájuk megítélhető. A disszertáció a jelen körülmények között csak arra vállalkozhat, hogy a dilemmák alapját képező további kérdések Bolyaira vonatkozó felét megválaszolja, nevezetesen, hogy mit is értett Bolyai a „párhuzamos”-on, vagy mi tekinthető a „párhuzamos” Bolyai-féle értelmezésének, és hogy hogyan is fest ténylegesen a Bolyai-féle fogalmi-terminológiai rendszer.

Felfedezhető-e ekvidisztáns-elméleti alapon a nem-euklideszi geometria?

Horror aequidistantiae — avagy a „párhuzamosok problémájának" történetétől a nem-euklideszi geometria történetírásáig

2.1 A „párhuzamosok problémája"

A matematikatörténet-írás berkein belül a „párhuzamosok problémájának", mint történeti jelenségnek létezik egy standard és egy nem standard felfogása. A hagyományostól eltérő álláspont szerint az euklideszi *Elemek*et, azon belül pedig az *Első könyv*et sokkal inkább a „párhuzamosok problémájának" megoldásaként, mintsem a probléma gyökereként kell értékelnünk. Tóth Imre amellett érvel, hogy a „párhuzamosok problémája" történetileg nem az *Elemek* ötödik (párhuzamossági) posztulátuma[3] *kapcsán* és *után* kibontakozott polémiával vette kezdetét, hanem az *Első könyv* felépítését figyelembe véve magát az *Elemek*et kell a kérdés adott körülmények között létrejött sajátos, korabeli megoldásaként látnunk (Tóth 1965, 1967, 2000b, 2002: 9-11, 17-23, 32-6). Eszerint az 5. posztulátumnak az *Elemek*ben betöltött szerepe, az *Első könyv*nek az ötödik (párhuzamossági) posztulátum szempontjából sajátos felépítése, valamint a *corpus aristotelicum*ban lappangó, Tóth által filológiailag feltárt szövegek, és e szövegek kontextusának értelmezése együttesen a párhuzamosokkal kapcsolatos probléma világos felismerését, a megoldási kísérletek irányát és az elért eredményeket mutatják.

Úgy tűnik azonban, hogy az Euklidészt követő történeti hagyományban nincsenek jelen azok az anti-euklideszi (kontra-euklideszi) eredmények, amelyek miatt Tóth érvelése szerint az *Elemek*et a probléma megoldásaként láthatnánk. A párhuzamosságot problematizáló Euklidész-kommentárok tehát nem perújrafelvételt jelentenek — a kérdést felvető és megoldását kezdeményező szerzők számára az *Elemek* sokkal inkább kiindulópont, mint

[3] Az 5. posztulátumot – annak ellenére, hogy a „párhuzamos" kifejezés a posztulátum szövegében fel sem bukkan – szokás „párhuzamossági posztulátumnak" illetve „párhuzamossági axiómának" is nevezni az *Elemek*, a kommentárok, illetve a modern logikai-matematikai értelemben vett euklideszi geometria felépítésében játszott szerepe alapján.

állomás vagy a probléma megoldása. A történeti hagyomány számára a „párhuzamosok problémája" ily módon az *Elemek*kel *tabula rasa* jön létre.

A történetírás hagyományos értelmezése szerint a „párhuzamosok problémája" az *Elemek Első könyvé*nek szerkezetében rejlik, azonban csak Euklidészt követően került problematizálásra, azaz a nehézségek többé-kevésbé világos és egyértelmű megfogalmazására. A probléma forrása tehát Euklidész műve, története pedig a benne rejlő problémát elsőként megfogalmazó kommentárokkal veszi kezdetét. Az *Elemek*et követő első kommentárokat a probléma megfogalmazásaiként és a megoldására irányuló kísérletek kezdeményezőiként, a későbbieket pedig a problémát fenntartó hagyományként jellemezhetjük (Tóth 1998). Az értekezés számára a hagyományos értelmezés nyújtotta perspektívát érdemes választanunk két, egymással összefüggő okból is. Az egyik ok, hogy alapjában véve ez felel meg mind a probléma megoldásával sikertelenül kísérletező, mind a nem-euklideszi geometriát felfedező geométerek nézőpontjának. Számukra (azaz a történeti emlékezet számára) lényegében véve nem mutatkozott közvetlenül hozzáférhető kapcsolat az euklideszi *Elemek* létrejöttét megelőző időszakkal – és így a Tóth által rekonstruált anti-euklideszi ismeretanyaggal sem. Ők ugyanis vállalkozásukat a hagyományos történetírási értelmezésnek megfelelően indokolták: a „párhuzamosok problémája" az *Elemek*et követően felmerült kérdéseket és nehézségeket, azaz a hagyományos történetírási értelemben vett „párhuzamosok problémáját" jelentette.[4] Az ezzel összefüggő másik ok, hogy a „párhuzamosok problémája" történetírásának és a vele összefüggő nem-euklideszi geometria történetírásának a folyamatról alkotott képét éppen az a szöveghagyomány határozza meg, amelyben nincs utalás a pre-euklideszi fejleményekre. Mivel a következőkben azt kívánom vázolni, hogy „párhuzamosok problémájának" történeti folyamatáról alkotott kép hogyan befolyásolja a nem-euklideszi geometria történetéhez való viszonyulást, ezért elegendő arra összpontosítanunk, hogy a poszt-euklideszi fejlemények hogyan tevődnek át a történetírás síkjára.

---

[4] „Maguk a nem-euklideszi geometria megalapítói tökéletesen indokoltnak látták vállalkozásukat a párhuzamosok nyílt, még megoldatlan, de megoldásra váró problémájának jelenlétével motiválni. Ez a szubjektív biográfia pszichológiai síkján kétségbevonhatatlanul helyes motiváció azonban az irodalomban a történeti folyamat objektív, szükséges és elégséges magyarázatának rangjára emelkedett." (Tóth 2000c: 144-5).

2.1.1 A „párhuzamosok problémája" az *Elemek*ben

A „párhuzamosok problémájának" hagyományos történeti értelmezése szerint Euklidész *Elemek* című művének *Első könyve* magában hordja a „párhuzamosok problémájának" magvát. A könyv felépítése azonban nemcsak a párhuzamosság kapcsán felvethető kérdéseket vetíti előre, hanem (különösen modern szempontból) a dolog lényegével kapcsolatos kifinomult bánásmódot mutat, és igen mély, bár némiképp rejtett belátásokat tartalmaz. A „párhuzamosok problémájának" kezelése az *Elemek*ben akkor is mércét jelent, még a hagyományos történeti magyarázatokban is, ha a pre-euklideszi előzményeknek nincs további közvetlen kihatásuk a későbbiekre (Kárteszi 1973: 14; Kulczycki 1961: 36; Torretti 1978: 42-4, 379-80). A probléma a következőképpen vázolható fel. Az *Első könyv* – a Heiberg-féle standard kiadást alapul véve – huszonhárom definícióból, öt posztulátumból, kilenc axiómából, negyvennyolc tételből és a tételek bizonyításából áll. A párhuzamosság szempontjából kiemelt szerepe van a huszonharmadik definíciónak (a párhuzamosok definíciója), az ötödik posztulátumnak (párhuzamossági posztulátum, továbbiakban: *ÖP*) és a huszonhetedik tétellel kezdődő szakasznak.

A 23. definíció megadja a párhuzamos egyenesek, a „párhuzamosság" jelentését. A definíció a következőképpen hangzik:

> Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak. (Euklidész 1983: 46).

Euklidész tehát a párhuzamos egyeneseket egymást nem metsző (egymással nem találkozó) síkbeli egyenesekként definiálja, azaz, elliptikusan fogalmazva, a párhuzamosságot nem metszésként értelmezi.

Az 5. posztulátum a következőképpen hangzik:

> És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak. (Euklidész 1983: 47).

Euklidész meglehetősen körültekintően jár el az *ÖP*-vel kapcsolatban: a követelmény tartalmát mindaddig nem használja ki, amíg arra a tételek bizonyításához nincs valóban szüksége. A műben a párhuzamos egyenesekkel a *I 27–I 31* tételszakasz foglalkozik, közülük azonban csak azoknak a bizonyításához használja fel az *ÖP*-t, amelyek a posztulátum igénybe vétele nélkül nem bizonyíthatók. Így kizárólag az *I 29* és *I 30* tételek levezetésekor támaszkodik az *ÖP*-re, míg az *I 27–28* és az *I 31* tételek bizonyításakor nem. Az *I 30* tétel bizonyításakor természetesen már nem közvetlenül az *ÖP*-re alapoz, hanem az ezt felhasználó *I 29* tételre. Figyelemre méltó tehát, hogy Euklidész az *I 29* után sem tart igényt minden esetben az *ÖP*-re vagy az *ÖP*-t tartalmilag egyszer már kihasználó *I 29* tételre. Így az *I 31* tétel a párhuzamosság tekintetében az őt megelőzők közül csupán az *I 27* tételre támaszkodik.

Az 5. posztulátumot nem nélkülöző első tétel tehát az *Elemek Első könyvé*nek 29. tétele, miközben már az *Elemek I 27* és az *Elemek I 28* is a párhuzamos egyenesekről szól. Mivel az *ÖP* implikálja az *I 29*-et megelőző mindkét korábbi, szintén a párhuzamos egyenesekre vonatkozó tételt, ezért Euklidész az *ÖP* segítségével minden további nélkül levezethetné az utóbbiakat is. Az is világos, hogy az *ÖP* segítségével a könyv némely korábbi tétele is egyszerűbben, rövidebb úton bizonyíthatóvá válna. Euklidész körültekintő eljárása – nevezetesen, hogy az *I 27-28* tételeket anélkül bizonyítja be, hogy az 5. posztulátumot akár névleg, akár tartalmilag kihasználná –, azt mutatja, hogy vannak az 5. posztulátum *nélkül* bizonyítható (modern szóhasználattal élve: az *ÖP*-től független) geometriai tételek és tulajdonságok. Sőt: vannak a párhuzamos egyenesekre vonatkozó és az *ÖP* felhasználása nélkül (azaz *ÖP*-től függetlenül) bebizonyítható tételek.

Az *I 27-28* mindenképpen, de valójában az *I 27* tétel már önmagában is úgy értékelhető, hogy megmutatja: vannak párhuzamos (azaz: itt még csak nem metsző) egyenesek; az *I 31* tétel értelmében pedig ezek meg is szerkeszthetők. Az *I 27* tétel tehát a párhuzamos (nem metsző) egyenesekre egzisztencia-bizonyítást ad, míg az *I 31* a párhuzamos (nem metsző) egyenesek konstruktív bizonyításának tekinthető. A párhuzamos (nem metsző) egyenesek egzisztenciájának bizonyításához és megszerkeszthetőségéhez tehát az *ÖP* (vagy valamely következménye) nem szükséges, a mű *I 27-28* tétellel záruló és *ÖP*-től teljesen független szakasza pedig elégséges. Ily módon a 23. definícióra vonatkoztatva igazolást nyer, hogy a meghatározás által posztulált nem metsző síkbeli egyenesek léteznek, következésképp a fogalom terjedelme nem üres.

A párhuzamossági posztulátum, illetve a segítségével bizonyított *I 29* tétel funkciója így a következő módon nyer értelmet: nélkülük nem lehet megmutatni a párhuzamos egyenesek két fontos (és ezáltal csak a modern logikai-matematikai értelemben vett euklideszi geometriára) jellemző tulajdonságát: az unicitást és az ekvidisztanciát. Bár az *I 31* megmutatja, hogyan lehet megszerkeszteni legalább egy párhuzamos (nem metsző) egyenest, de nem mutatja meg, hogy egy és csak egy ilyet lehet. Az *I 27* tétel megmutatja (vagy segítségével megmutatható), hogy van legalább egy párhuzamos (nem metsző) egyenes, de nem mutatható meg, hogy egy és csak egy ilyen létezik. Hasonlóan: az *I 27–28* és az *I 31* tételek segítségével nem lehet megmutatni, hogy a nem metsző egyenesek egymástól egyenlő távolságra is helyezkednek el, azaz őket mindkét irányban végtelenül meghosszabbítva távolságuk mindvégig állandó marad.

Modern szempontból, anakronizmus nélkül is, figyelemre méltó, hogy az *I 27–28* párhuzamossági tételek, sőt az összes megelőző tétel az úgynevezett *abszolút geometria* (a Bolyai-féle abszolút vagy más szóhasználat szerint neutrális geometria) tételeinek körébe tartozna, míg az *I 29–30* tételek a modern logikai-matematikai értelemben vett euklideszi geometria tételének számítanának. Ezt követően az *I 31* szintén abszolút geometria tétel lenne, az *I 32* és ettől kezdve mind a (modern logikai-matematikai értelemben vett) euklideszi geometria tétele. Az *Első könyv* szerkezete tehát erősen korrelál az abszolút és az euklideszi geometriát megkülönböztető modern felosztással.[5] A tökéletes egybeesést csak egyetlen tétel, az *I 31* zavarja meg. Ez a körültekintő eljárás a fogalmi oldalra is lefordítható és a párhuzamosság fogalmával, a „párhuzamos" jelentéseivel összefüggésben is megfogalmazható.

2.1.2 A probléma fogalmi oldala az *Elemek Első könyv*ében

Ahhoz, hogy a „párhuzamosok problémájának" fogalmi oldalán megjelenő dilemmát világosan lássuk, valamint hogy Euklidésznek (a későbbiek fényében méginkább) kifinomult eljárását ebből az aspektusból is értékelhessük, vegyük ismételten szemügyre a mű párhuzamos egyenesekre vonatkozó szakaszát. Mivel az *Elemek I 29* tekinthető az első olyan tételnek, amely a modern értelemben vett euklideszi geometriának is tétele volna, a megelőzők pedig az abszolút geometria tételei lennének, ezért az *I 28–29* tételek között vonul át az abszolút és a (párhuzamossági axiómára épített, modern értelemben vett) euklideszi geometriát elválasztó határvonal (Tóth 1967: 12). Az euklideszi párhuzamossági axiómát felhasználó geometriában a „párhuzamos egyenesek" nem csupán „nem metsző egyenesek", hanem egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő egyenesek, azaz röviden: „ekvidisztáns egyenesek". Minden párhuzamos egyenes egyben ekvidisztáns egyenes, és fordítva: minden ekvidisztáns egyenes egyben párhuzamos egyenes is. Az euklideszi párhuzamossági axiómára épített (azaz a modern logikai-matematikai értelemben vett) euklideszi geometriában a

[5] Az *ÖP Elemek*ben betöltött szerepének, illetve Euklidész eljárásának iménti bemutatásakor Tóth rekonstrukcióját követtem (Tóth 1953: 265-9; uő.1967: 11-2; uő. 2000b: 48-54).

„párhuzamos" és az „ekvidisztáns" kifejezések felcserélhetők egymással[6] abban az értelemben, hogy minden, amit el lehet mondani a párhuzamos egyenesekről, el lehet mondani az ekvidisztáns egyenesekről is, és fordítva. Azaz minden, amit be lehet bizonyítani a párhuzamos egyenesekre vonatkozólag, be lehet bizonyítani az ekvidisztáns egyenesekre vonatkozólag is, és fordítva. A „párhuzamos" és az „ekvidisztáns" kifejezések felcserélhetősége azonban csak a modern logikai-matematikai értelemben vett euklideszi geometria sajátossága, amely az abszolút geometriában nem áll fenn.

Mivel a 23. euklideszi definíció a párhuzamosokat, mint egy síkban elhelyezkedő, egymást nem metsző (egészen pontosan: egymással nem találkozó) egyeneseket értelmezte, minden párhuzamos egyenes egyben nem metsző egyenes, és fordítva: minden nem metsző egyenes egyben párhuzamos egyenes is. Ebből fakad, hogy a „párhuzamos" kifejezés helyére a „nem metsző" kifejezések nem csak az *Elemek* szigorúan (modern értelemben vett) euklideszi részében, hanem már a mű abszolút geometria alá besorolható szakaszában is behelyettesíthetők, végeredményben pedig egymással mindenütt felcserélhetők.[7]

Az eddig mondottak következménye, hogy az *ÖP*-re közvetlenül vagy közvetve építő tételek és bizonyítások megengedik, és csak ezek engedik meg a „párhuzamos" és az „ekvidisztáns" kölcsönös helyettesíthetőségét. Ugyannakkor a „párhuzamos" és a „nem metsző"

---

[6] A modern matematikai eredményekre alapozott megkülönböztetést itt csak annyiban használom ki, amennyiben segít világossá tenni a „párhuzamos" kifejezés határvonal előtti és utáni alkalmazásának sajátosságait.

[7] Felcserélhetőségen az igazságérték megváltozása nélküli (salva veritate) felcserélhetőséget értek, és az ily módon felcserélhető kifejezéseket szinonimnak tekintem (Quine 1999). A „párhuzamos", a „nem metsző" és az „ekvidisztáns" kifejezések felcserélhetőségének/ behelyettesíthetőségének kérdései vizsgálhatók az abszolút és a nem-euklideszi (hiperbolikus), valamint az euklideszi és a nem-euklideszi (hiperbolikus) geometriák közötti viszonylatban is. Ezek a kérdések szorosan összefüggenek a „párhuzamos" adott geometriában való definiálhatóságának kérdésével, valamint az ebből a geometriából bármely másikba való átmenet során előálló problémákkal. Megmutatható, hogy a „párhuzamos" bármely adott geometiában való definíciója a másik kettőben vagy túlhatározottságot, vagy aluldetermináltságot eredményez, azaz vagy ellentmondáshoz vezet, vagy nem egyértelmű. Ha például a „párhuzamos"-t az abszolút geometriában „nem metsző"-ként határozzuk meg, akkor ez a hiperbolikus geometriában még az egyenesek irányítását figyelembe véve sem egyetlen egyenest határoz meg. A hiperbolikus geometria szokásos tárgyalásaiban a nem metsző egyenesek közül a metsző és nem metsző egyeneseket elválasztó, úgynevezett határhelyzetű nem metsző egyeneseket szokás párhuzamosnak tekinteni. A párhuzamosság abszolút geometriai definíciója például a hiperbolikus geometriában nem választja ki azt (még az irányítást figyelembe véve sem), amelyet a hiperbolikus geometria szokásos tárgyalásában párhuzamosnak tekintenek. Ehhez hasonló problémákkal a különböző axiomatikus tárgyalásoknak mindig szembe kell nézniük. Így például az *elemi* (azaz halmazelméleti eszközöket meg nem engedő felépítésű) euklideszi és nem-euklideszi (hiperbolikus) geometria alap- (vagy primitív) fogalmainak definiálhatóságát vizsgáló tanulmány is szembesül vele (Royden 1959). Az elemi euklideszi geometriában definiált π-fogalom (azaz ott a párhuzamosság, parallelizmus) (Royden 1959: 87) az elemi hiperbolikus geometriában elégtelenné válik, mert itt a π-fogalom „sokkal inkább a nem-metszést, mint a párhuzamosságot (parallelizmust) jelenti" (Royden 1959: 89). Ezért a párhuzamosság fogalmára új jelölét kell bevezetni (π'), és új meghatározást kell adni (Royden 1959: 90). Az elemi euklideszi geometriával kapcsolatban lásd Tarski (1959).

felcserélhetősége a mű egész kontextusán belül fennáll – függetlenül attól, hogy melyik párhuzamosokra vonatkozó tételről, illetve milyen bizonyítási kontextusról van szó.

A „párhuzamos” és az „ekvidisztáns” felcserélhetősége a párhuzamos egyenesekre vonatkozó tételek közül az *I 27-28*, és az *I 31* tételek esetében nem áll fenn: itt a „párhuzamos” kifejezés „ekvidisztánsra” cserélése hibához vezetne, legalábbis abban a minimális értelemben biztosan, hogy a bizonyítás nem bizonyítaná (hanem előfeltételezné) a bizonyítandót. Mindez azzal a következménnyel jár, hogy a párhuzamos/nem-metsző és a párhuzamos/ekvidisztáns kifejezés-párok felcserélhetősége közötti különbségnek az *I 27-28*, valamint az *I 31* tételek esetében van igazán jelentősége. Ezek azok a helyek, ahol a „nem metsző” és az „ekvidisztáns” közötti különbségnek valóban funkciója van. Ugyanez a „párhuzamos” kijezéssel megfogalmazva: az *Elemek I 27-28,* valamint az *I 31* azok a passzusok a műben, ahol a „párhuzamos” terminus „nem metsző” és „ekvidisztáns” jelentése közötti különbség valóban fontos szerephez jut. Euklidész természetesen mindvégig „párhuzamos egyenesekről” beszél, és nem „nem metsző egyenesekről” vagy „ekvidisztáns egyenesekről”. Ám az, hogy az általa adott definíciónak megfelelően valóban csak a „nem metsző” értelemben használja a „párhuzamos” kifejezést, és hogy tartalmilag sem használja ki az „ekvidisztáns” értelmet és nem is támaszkodik rá, csak az *I 27-28* tételpárban és az *I 31*-ben derül ki.[8]

Ez két dologra is rávilágít. Egyrészt, hogy a párhuzamosságnak a 23. definícióban megadott jelentése nem a teljes, hanem csak részjelentés. Másrészt Euklidész előadásmódja, bár közvetett módon, de szem előtt tartja a „párhuzamos” kifejezés „nem metsző” és „ekvidisztáns” értelme közti különbséget. Euklidész számára tehát a „párhuzamos” minimális „nem metsző” jelentése elkülönül a „párhuzamos” másik jelentésétől (vagy részjelentésétől),

---

[8] A „párhuzamosok problémája” fogalmi oldalának megfogalmazásakor Tóth rekonstrukcióit tartom szem előtt (Tóth 1953: 265-9; uő. 1967: 11-2; uő. 2000b: 48-54). Tóth mindazonáltal a „párhuzamosok problémájának” modern ismereteket felhasználó bemutatásakor nem annyira a fogalom-, hanem a propozíció- és módszertan-központú jellemzést részesíti előnyben (különösen Tóth 1967). Ilyen megközelítésben a „párhuzamosok problémája” az *ÖP* mint állítás axiomatikai státuszának (tétel vagy axióma) (Tóth 1967: 1; uő. 2002c: 139), illetve az állítás levezethetőségének kérdése (Tóth 2002c: 139-42). A „párhuzamosok problémája” fogalmi oldalának általam adott rekonstrukciójához a legjobb kiindulópont Tóth (2000b: 48-54), valamint a nem-euklideszi geometria axiómarendszerének fogalomszimplexumként történő bemutatása (Tóth 2000c: 165-72). Az általam adott rekonstrukció, amely a „nem metsző”, „ekvidisztáns” és „párhuzamos” felcserélhetőségét tartja szem előtt, anakronisztikusnak tűnhet, különösen a „nem metszik” igei alak „nem metsző” melléknévi igenévre cserélése miatt. Ez abból a problémából fakad, hogy a rekonstrukciónak hozzávetőleg két évezred megoldási kísérleteire vonatkaztatva egyszerre kell többé-kevésbé adekvátnak lennie. Mindazonáltal az ilyen jellegű átfogalmazások szokásosak az irodalomban. Sommerville például a „parallel” terminus „non-intersecting” értelméről beszél (Sommerville 1958: 10-1), Heath „non-secant”-ról (Heath 1956: 192), Tóth pedig rekonstrukciójakor a „koortogonalitás”, illetve a „koortogonális egyenespár”, „koortogonálisok teorémája” kifejezésekkel dolgozik (Tóth 2002b: 49-54).

az „ekvidisztánstól" (Sommerville 1958: 10-1).[9] Úgy tűnik, ez teszi lehetővé számára, hogy elkerülje azt a később tipikussá váló hibát, ami abból származik, amikor valaki a „párhuzamos"-t az „ekvidisztáns" értelemben használja ott, ahol nem volna szabad. Euklidész tehát nem esik abba a hibába, hogy hallgatólagosan és közvetve a „párhuzamos" olyan jelentésére támaszkodjon már az *ÖP* felhasználása előtt is, amely valójában csak az *ÖP* segítségével bizonyítható, azaz elkerüli, hogy a „párhuzamos" fogalmába rejtve használja ki az *ÖP* tartalmát.

Az *Elemek Első könyv*e e nagyon fontos és meglehetősen finom megkülönböztetésének segítségével megfogalmazhatjuk egyrészt a „párhuzamosok problémájának" fogalmi vetületét, valamint azt a fogalmi hibát, amely *Elemek*et követő megoldási kísérleteket visszatérően kísértette. A „párhuzamosok problémája" mint történeti folyamat a „párhuzamos" terminussal asszociálható két jelentés (a „nem metsző" és az „ekvidisztáns" terminusok jelentése) egymáshoz való viszonya tisztázásának történeteként fogható fel. A megoldási kísérleteket kísértő fogalmi hiba pedig abban áll, hogy a „párhuzamos" kifejezés „nem metsző" és „ekvidisztáns" jelentései közötti fogalmi hézagot rövidre zárták: ekkor az *ÖP* tartalma a „párhuzamos" kifejezés „ekvidisztáns" értelemben való használatában jutott szerephez, amely a „párhuzamosok problémájának" hibás, a kísérletező számára látszatmegoldáshoz vezetett. A következőkben tehát a fogalmi hibában vétkesnek minősítünk minden olyan próbálkozást, amely a kísérlet adott pontján a „párhuzamos" kifejezés „ekvidisztáns" értelemben való használata következtében (bármilyen közvetett módon is) a probléma látszólagos megoldását eredményezte.

2.1.3 A megoldási törekvéseket kísértő fogalmi hiba

A következőkbentekintsük át röviden előbb a probléma megoldási törekvéseinek szokásos csoportosítását, majd jellemzői hibáikat, de előtérbe helyezve a fogalmi hibával való kapcsolatukat.

A „párhuzamosok problémájának" megoldására irányuló kísérletek következő kategóriáit szokás megkülönböztetni.

---

[9] A Theon-féle *Elemek* egyik, nem azonosított, de a sziciliai iskolába tartozó fordítótól származó 12. századi latin fordítása éppen fordítva jár el: míg a párhuzamosság (ott 24.) definíciójában a „parallilos"-nak megfelelő ragozott alak szerepel (Bushard 1987: 15, 28), addig a 27. tételben és ettől kezdve folyamatosan az „equidistans" (Bushard 1987: 28-44). Ezzel szemben az *Elemek II 1*-ben, ahol már jogosan lehetne az „equidistans" terminust használni, váratlanul a „parallilos" kifejezés jelenik meg (Bushard 1987: 55).

Módszertani kísérletek:

(a) Direkt bizonyítási kísérletek: az *ÖP*-nek a maradék axiómarendszerből történő közvetlen levezetésére irányuló próbálkozások. A maradék axiómarendszer az axiómáknak és posztulátumoknak az ötödik posztulátum (vagy bármely vele ekvivalens axióma) nélkül alkotott rendszerét jelenti.

(b) Indirekt bizonyítási kísérletek: az *ÖP* tagadásából kiinduló és ellentmondás kimutatását célzó kísérletek.

(c) Helyettesítési vagy szimplifikációs kísérletek: az *ÖP* olyan $A_{ÖP}$ axiómával történő helyettesítésének kísérletei, ahol a helyettesítő axióma logikailag egyenértékű *ÖP*-vel, azaz $A_{ÖP}$ -ből az *ÖP* közvetlenül levezethető, de $A_{ÖP}$ az *ÖP*-nél egyszerűbb, könnyebben belátható, „evidensebb" axióma.

Fogalmi megoldási kísérletek:

(d) A párhuzamosság újradefiniálásának kísérletei: a párhuzamosok 23. euklideszi meghatározásának új definícióval történő helyettesítésére építő kísérletek.

A matematikatörténet a megoldási kísérletek egyes típusait különbözőképpen értékeli: egyeseket többre tart, mint másokat. A nem-euklideszi geometriához vezető felfedezés folyamatában játszott szerep alapján pozitív értékelést kapnak és kiemelt figyelemben részesülnek az indirekt bizonyítási kísérletek (Bonola 1955: 43-5; Dávid 1979: 158-9, 181; Eves 1997: 54-60; Gray és Fauvel 1987: 508-9; Gray 1979a: 238, 248; Greenberg 1980: 125-7; Heath 1956: 211; Houzel 1992: 4; Kárteszi 1973: 15-6; Kárteszi és Szénássy 1987: 15-8; Kiss 1999: 26-7; Kline 1980: 80-1; Martin 1975: 302-5; Sain 1985: 24-5; uő. 1986: 610-2; Sommerville 1958: 11-3, 22; Stackel 1900: 242-4, uő. 1914: 74, 235; Stillwell 1989: 256; Szénássy 1992: 161; Torretti 1978: 45-52; Tóth 1967: 4-6; uő. 2000d; Weszely 2002: 55-6, 70; Zheng 1992: 173-4, 180-2), míg a direkt bizonyítási kísérletekkel szemben semlegesek (Kiss 1999: 26), vagy negatív elbírálásban részesítik őket (Kárteszi 1973: 18-20; Szénássy 1992: 161; Tóth 1967: 3-4), vagy egyszerűen csak nem tartják fontosnak ismertetni őket. Az euklideszi párhuzamossági posztulátum egyszerűsítési-helyettesítési próbálkozásainak megítélése a direkt bizonyításokéhoz hasonló: közömbös (Kline 1980: 79; Kárteszi 1973: 14; Kulczycki 1961: 40), vagy negatív (Kiss 1999: 26). A „párhuzamosok problémájának" újradefiniálási, tágabban pedig fogalminak nevezhető megoldási törekvései (Heath 1956: 192) gyakorta nem is képeznek külön kategóriát, hanem a direkt bizonyítások keretében kerülnek tárgyalásra — egyszerűen hibáik, valamint a direkt bizonyítás során elkövetett tipikus hibák hasonlósága miatt (Kulczycki 1961: 34, 40; Tóth 1967: 2-3). Az összes megoldási törekvést, típustól függetlenül, csak Sommerville és Torretti értékeli pozitívan (Sommerville 1958: 4; Torretti 1978: 43).

Összességében úgy tűnik, hogy az indirekt próbálkozásokkal szembeállítva a többi a nem-euklideszi geometria felfedezése szempontjából legalábbis meddőnek tűnik, és ezért gyakorta a behatóbb kutatást és elemzést kívánó problémák körén is kívülre kerül.[10] Ezenkívül, amint az előbb fogalmi kísérletek értékelése során már felvillant, a bizonyítási és a fogalmi megoldási kísérletek értékelése egy másik ponton is összetalálkozik: a direkt bizonyítások és az újradefiniálási kísérletek a „párhuzamosok problémája" szempontjából nem csupán terméketlennek tűnnek, hanem az indirekt kísérletekkel összevetve valahogy „súlyosabban hibásnak" is látszanak. Ráadásul a masszívan hibás direkt bizonyítások tipikus hibája és a párhuzamosság újradefiniálása során elkövetett hiba igen szoros hasonlóságot mutat.

A „párhuzamos" újradefiniálásának kísérletei

A párhuzamosoknak az euklidészi 23. definícióhoz képest új módon történő meghatározásait Heath (1956: 192) az alábbi három kategóriába sorolja.

Párhuzamos egyenesek azok,

(1) amelyeknek nincs közös pontjuk,

(2) amelyeknek azonos vagy hasonló irányuk vagy irányaik vannak,

(3) amelyek között a távolság állandó.

Az első csoportba tartoznak mindazok a meghatározások, amelyek a közös pont hiányát fejezik ki. Ennek az általános felfogásnak három további változata van: a közös ponttal nem rendelkező párhuzamos egyenesek:

(1a) *nem metszik* egymást,

(1b) a végtelenben *találkoznak*,

(1c) a végtelenben van a közös pontjuk.

A (2) csoportba tartoznak azok a definíciók is, amelyek transzverzálisokkal operálnak, vagyis amelyek szerint a párhuzamosok egyenlő (nagyságú) szöget alkotnak egy transzverzálissal. És végül Heath szerint a (3) csoportba kell sorolni azokat a kísérleteket is, amelyek úgy

[10] Ez jól megfigyelhető az indirekt módszer Bolyai Jánossal kapcsolatos túlértékelésében, és a többi eredendő figyelmen kívül hagyásában. Így nem merült fel tanulmányozásra érdemes kérdésként, hogy Bolyai kísérlezetett-e a probléma direkt módszerre alapozott megoldásával, és hogy a direkt bizonyításnak lehetnek-e, voltak-e olyan eredményei, amelyek a Bolyai-féle geometria felfedezésében is szerephez jutottak, majd beépültek. E kérdések tisztázására tettem kísérletet Tanács (2002b)-ben.

értelmezik a párhuzamos egyenest, hogy mindazon pontok mértani helye, amelyek az egyenes vonaltól egyenlő távolságra helyezkednek el.

A párhuzamosok végtelenben találkozó vagy végtelenben fekvő közös ponttal rendelkező egyenesekként történő meghatározása például Keplerhez, illetve Desargueshoz köthető (Heath 1956: 193), míg az irányelméleti meghatározás legjelesebb képviselője Leibniz (Heath 1956: 194). Heath kategórizációja azonban figyelmen kívül hagyja, hogy egyesek nem a „párhuzamosok problémáján" való munkálkodás miatt, hanem egészen más okból adtak a párhuzamosságra új meghatározást.[11] Így „párhuzamosok problémájának" jellemző újradefiniálási kísérletei döntően a harmadik csoportba, azaz a párhuzamosságot ekvidisztanciaként újraértelmező próbálkozások csoportjába tartoznak. A „párhuzamosok problémájának" történeti folyamatában ezek a kísérletek játszottak tényleges szerepet, így a történeti folyamatról alkotott és a nem-euklideszi geometriához való viszonyulást meghatározó képet is csak e törekvések alakítják.

A „párhuzamosok problémája" szempontjából releváns újradefiniálási próbálkozások lényegében abból indulnak ki, hogy a „párhuzamos" fogalma nyilvánvaló, ezért megengedhető, hogy jelentését ennek megfelelően határozzák meg. A „párhuzamos egyenes" ily módon bevezetett fogalma képezte azután a kiindulási alapot az *ÖP* többnyire direkt jellegű bizonyításának, azaz annak, hogy az *ÖP*-t közvetlenül kíséreljék meg levezetni a maradék axiómarendszer új definícióval kapott bővítéséből.

A „párhuzamos" új definíciói, minthogy a meghatározásba belefogalmazták a nem metsző egyenesek bizonyítandó tulajdonságát is, a „nem metsző" és az „ekvidisztáns" között kifeszülő fogalmi hézagot rövidre zárták. Egyrészt tehát az újradefiniálást követő bizonyítási eljárás típusa, másrészt az ebben a lépésben elkövetett hiba hasonítja őket a direkt bizonyításokhoz, amelyek visszatérően a *petitio principii* módszertani hibáját követték el. A különbség csupán az, hogy a hiba nem a bizonyítási eljárás valamely lépésében jött létre, hanem már lényegében a tényleges bizonyítási eljárás megkezdése előtt előállt. A régi definíció újra cserélése és a fogalmi hézag ebből következő önkéntelen átlépése azonnali logikai-módszertani hibát indukált: a fogalmi hiba már a bizonyítás nulladik lépésében logikai-módszertani hibává transzformálódott. A hibát a direkt bizonyítások fogalmi vagy más alapon elkövetett körbenforgási hibájával összevetve súlyosbítja, hogy az új definícióban

[11] Desargues például tipikusan olyannak számít, aki nem a „párhuzamosok problémáján", hanem a projektív geometriához kapcsolódó kérdéseken dolgozva adott a párhuzamosságra új meghatártozást. Leibniz az Engel által összeállított bibliográfiában sem szerepel (Stackel és Engel 1895: 293-313). A „párhuzamosok problémájához" való viszonyulással kapcsolatban a részleteteket lásd Tóth (1953: 275; uő. 2000c: 178-80), továbbá Tanács (2004a, 2004b), valamint alább az *5. táblázat*ot.

a fogalmi hézag rövidre zárása kifejezetté vált. Mivel itt az *ÖP* tartalmát kihasználó matematikai állítás nem maradt hallgatólagos, szemben a direkt bizonyítások körbenforgást eredményező, de egyes esetekben hallgatólagos állításával, ezért itt nemigen van mentség a hibára. Ha valahol egyáltalán, akkor az *Elemek Első könyv*éhez mérve éppen a „párhuzamos" ekvidisztancia-alapú újradefiniálási próbálkozásaiban hozzáférhető a kísérletező számára az elkövetett hiba.[12]

A direkt bizonyítások

A direkt bizonyítási próbálkozások rendszeresen visszatérő logikai-módszertani hibája a *petitio principii* vétsége. A hiba abban állt, hogy kísérletezők a bizonyítási eljárás valamely lépése során egy olyan hallgatólagos vagy explicit segédtételhez folyamodtak, amely legalább annyira vitatható volt, mint az *ÖP*, miközben a párhuzamossági posztulátumot e segédtétel nélkül nem lehetett levezetni. A segédtétel tehát logikailag ekvivalens volt a bizonyítandó tétellel, illetve maga is bizonyításra szorult volna. A bizonyítás ily módon körbenforgóvá vált, amely a kitűzött szándék ellenére nem bizonyította a bizonyítandót, legalábbis a maradék axiómarendszerből nem. A megoldásra törekvők által helyesnek és a probléma végső megoldásának hitt direkt bizonyítások valójában körbenforgó okoskodásnak minősülnek.[13]

A direkt bizonyítás során így vagy úgy segítségül hívott tétel tartalmilag igen változatos formát ölthet. A segédtétel és az *ÖP* logikai egyenértékűsége, azaz egymásból való kölcsönös levezethetősége korántsem nyilvánvaló minden esetben: a kapcsolat olykor csak több lépésen keresztül teremthető meg közöttük. Az ekvivalens tételek „ránézésre", azaz tartalmilag igen különbözőek lehetnek. Míg egyes segédtételekben az *ÖP* igen nehezen, vagy közvetlenül egyáltalán nem ismerhető fel, addig más esetekben a segédtétel közelebbi rokonságot mutat az

[12] Tóth tézisének, a „párhuzamosok problémája" nem hagyományos történetírási felfogásának elfogadása nélkül is szokás a későbbi próbálkozásokat Euklidészhez mérni, és az *Elemek Első könyv*ének szerkezete alapján (le)értékelni (Kárteszi 1973: 14; Kulczycki 1961: 36).

[13] Tóth Imre ezt a történeti sémát a következőképpen összegzi: „A párhuzamosok problémájának megoldására irányuló kísérletek története tulajdonképpen egy eredendő bűn állandó felderítésében és megismétlésében áll: mindegyik szerző az előző szerzők kísérleteinek a kritikájából, hibáinak gyakran rendkívül elmés kimutatásából indul ki és munkáját egy – a megbírált elődénél általában raffináltabb –, megoldási kísérlet bemutatásával fejezi be, amely azonban ismét a kárhoztatott előd alapvető hibáját ismétli. Ez a hiba – mint Proklosznál is mindig egy *petitio principii* – egy logikai *rövidzárlat*, amelyben a bizonyítandó tétel, implicit formában már a feltevésekben benne foglaltatik. Mindezek a kísérletek *direkt* úton igyekeztek a problémát megoldani, azaz a párhuzamosok euklideszi állítását közvetlenül igyekeztek a Bolyai-féle abszolút geometria axiómáiból levezetni, és mindig ott vétették el a dolgot, hogy az abszolút axiómák közé rejtett formában gyakran szinte öntudatlanul már felvettek egy az euklideszi posztulátummal logikailag ekvivalens tételt." (Kiemelések az eredetiben.) (Tóth 1967: 3-4). A direkt bizonyítások jelenlétének és a Bolyai-geometria kialakulásában játszott szerepének rekonstrukcióját, valamint a *petitio principii* individuális vs. kollektív feltárhatóságát illetően lásd Tanács (2002b).

ÖP-vel. Az előbbire Thibaut bizonyítása lehetne a példa (Kárteszi 1973: 29-30; Sommerville 1958: 5-6), míg az utóbbira Prokloszé (Bonola 1955: 4; Gray 1979b: 39; Heath 1956: 206-8; Rosenfeld 1988: 42; Tóth 1967: 3-4; Weszely 2002: 53). Ugyanez elmondható a segédtételek és a párhuzamosság újradefiniálásának hasonlóságára is — a direkt bizonyítások során kimondva vagy kimondatlanul felhasznált segédtétel nemegyszer közeli rokonságot mutat a megoldást közvetlenül a fogalmi oldalon kereső kísérletek párhuzamosságra bevezetett új meghatározásával. A *petitio principii* hibájában ily módon vétkes direkt próbálkozások esetében, bár ezek alapvetően nem a fogalmi oldalon keresték a kérdés nyitját, a bizonyítás adott lépésében felhasznált segédtétel valójában nem más, mint párhuzamosság-meghatározás tételszerű állítása. A direkt bizonyítási eljárások ezen csoportját úgy láthatjuk tehát, hogy az eljárás adott lépésében elkövetett körbenforgási hibában valójában ugyanaz a hiba jelent meg közvetett módon, amelyet korábban fogalmi hibának neveztünk. Ez a csoport a *petitio principii*ben vétkes direkt bizonyításokon belül igen jelentős hányadot tesz ki. Ezek a hibák egyaránt a fogalmi hibára vezethetők vissza, aholis az ily módon hibás direkt bizonyítások lényegében a fogalmi hiba közvetett, álcázott megjelenéseinek számítanak, míg az újradefiniálási kísérletek a fogalmi hiba legnyilvánvalóbb, legkifejezettebb megnyilvánulásai.

Az indirekt bizonyítások

Az indirekt bizonyítások annyiban különlegesek, hogy a párhuzamosok ekvidisztánsként való felfogásából fakadóan *petitio principii*ben szenvedő kísérletek jól elválni látszanak a heurisztikusan magasra értékelt indirekt kísérletektől (Saccheri és Lambert). Bár az indirekt bizonyítások esetében sem kizárt a párhuzamosok ekvidisztánsként való felfogásából fakadó *petitio principii* vétsége (*1. táblázat*), ám történetileg tekintve és a direkt bizonyításokkal összevetve nem is szükségszerű.

1. táblázat. A „párhuzamosok problémájának” néhány jellemző megoldási kísérlete

A SZERZŐ/ GEOMÉTER NEVE	A KÍSÉRLETET LEÍRÓ IRODALOM	A MEGOLDÁSI KÍSÉRLET JELLEMZŐI AZ IRODALOM ALAPJÁN
Poszeidonosz	Bonola 1955: 2. Heath 1956: 190. Rosenfeld 1988: 41. Tóth 1967: 2. Weszely 2002: 52.	**Ekvidisztáns alapú** (Bonola 1955: 2; Heath 1956: 190, 220; Rosenfeld 1988: 41; Tóth 1967: 2; Weszely 2002: 52). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** (Bonola 1955: 2; Heath 1956: 190; Rosenfeld 1988: 41; Tóth 1967: 2). **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 64).
Geminosz	Heath 1956: 191. Kulczycki 1961: 34-5. Weszely 2002: 52.	**Ekvidisztáns alapú** (Heath 1956: 191; Weszely 2002: 52). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** (Heath 1956: 191, 220). **Körbenforgó** (Kulczycki 1961: 34-5, Rosenfeld 1988: 64).
Ptolemaiosz	Heath 1956: 204-6. Rosenfeld 1988: 41. Sain 1986: 606.	**Ekvidisztáns alapú** (Weszely 2002: 52-3). **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 64).
Proklosz	Bonola 1955: 4. Heath 1956: 206-8. Gray 1979b: 39. Greenberg 1980: 119-21 Rosenfeld 1988: 42. Tóth 1967: 3-4. Weszely 2002: 53.	**Direkt bizonyítás** (Gray 1979b: 39; Tóth 1967: 3-4). **ÖP-vel ekvivalens segédtétel alkalmazása** (Weszely 2002: 53) **Körbenforgó** (Greenberg 1980: 121; Rosenfeld 1988: 42, 64; Tóth 1967: 3-4; Weszely 2002: 53).
Simplicius	Heath 1956: 190-1. Rosenfeld 1988: 43.	**Ekvidisztáns alapú** (Heath 1956: 190-1; Rosenfeld 1988: 43). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** (Heath 1956: 190-1). **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 64).
Abul Abasz ibn Hatim An-Nairizi (Anaritius)	Rosenfeld 1988: 56-7. Weszely 2002: 53.	**Ekvidisztáns alapú** (Rosenfeld 1988: 56-7.) **ÖP-vel ekvivalens segédtétel alkalmazása** (Weszely 2002: 53) **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 64).
Aganisz	Bonola 1955: 7-8. Gray 1979b: 39-40, 44. Heath 1956: 191. Rosenfeld 1988: 43. Tóth 1967: 2-3.	**Ekvidisztáns alapú** (Bonola 1955: 7-8; Gray 1979b: 44; Heath 1956: 191; Rosenfeld 1988: 43). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** (Bonola 1955: 7-8; Gray 1979b: 44; Heath 1956: 191; Rosenfeld 1988: 43). **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 64).
Al Aba ibn Dzsauhari (Al Jawhari)	Rosenfeld 1988: 47-8. Weszely 2002: 53.	**Ekvidisztáns alapú** (Rosenfeld 1988: 47-8). **ÖP-vel ekvivalens segédtétel alkalmazása** (Weszely 2002: 53). **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 49, 64).

A SZERZŐ/ GEOMÉTER NEVE	A KÍSÉRLETET LEÍRÓ IRODALOM	A MEGOLDÁSI KÍSÉRLET JELLEMZŐI AZ IRODALOM ALAPJÁN
Hasszán ibn al Haitham (Alhazen)	Houzel 1992: 5. Rosenfeld 1988: 59-60. Sain 1985: 23. Sain 1986: 609. Tóth 1967: 4. Weszely 2002: 53.	**Ekvidisztáns alapú** (Rosenfeld 1988: 59-60; Weszely 2002: 53). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** (Rosenfeld 1988: 59-60). **Indirekt bizonyítás** (Houzel 1992: 5; Rosenfeld 1988: 59-60; Tóth 1967: 4). Sain direkt bizonyításként írja le (Sain 1985: 23). **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 64).
Thábit Ibn Qurra	Rosenfeld 1988: 50.	**Indirekt bizonyítás (**Rosenfeld 1988: 50). **Körbenforgó** (Rosenfeld 1988: 50, 64).
Naszir-Eddin at Tuszi	Rosenfeld 1988: 74-9. Tóth 1967: 4.	**ÖP-vel ekvivalens segédtétel alkalmazása** (Rosenfeld 1988: 74). **Indirekt bizonyítás** (Tóth 1967: 4).
Naszir-Eddin at Tuszinak tulajdonított[14]	Bonola 1955: 10. Heath 1956: 208-10. Gray 1979a: 238. Gray 1979b: 43. Rosenfeld 1988: 80-4. Sain 1985: 24. Sain 1986: 610. Weszely 2002: 54.	**Ekvidisztáns alapú** (Gray 1979a: 238, uő. 279b: 43; Sain 1986: 610). **ÖP-vel ekvivalens segédtétel alkalmazása** (Weszely 2002: 54). **Direkt bizonyítás** (Sain 1985: 24).
Omar Khajjám	Rosenfeld 1988: 64. Sain 1985: 23. Sain 1986: 610. Weszely 2002: 54.	**Indirekt bizonyítás** (Tóth 1967: 4).
Federigo Commandino	Bonola 1955: 12-3.	**Ekvidisztáns alapú** **A párhuzamosság újradefiniálására épít** „Az ekvidisztancia fogalmát egyszerűen hozzáadja a a párhuzamos euklideszi definícióhoz." (Bonola 1955: 12-3). **Körbenforgó**
Christoph Schlüssel (Clavius)	Bonola 1955: 13. Heath 1956: 194. Rosenfeld 1988: 93. Sommerville 1958: 5-6. Weszely 2002: 54.	**Ekvidisztáns alapú** (Bonola 1955: 13; Heath 1956: 194; Weszely 2002: 54). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** **Körbenforgó**
Pietro Antonio Cataldi	Bonola 1955: 13. Gray 1979b: 51. Rosenfeld 1988: 95.	**Ekvidisztáns alapú** (Bonola 1955: 13.) **Körbenforgó**

[14] Rosenfeld két forrást vizsgál Naszir-Eddin at Tuszi kapcsán (Rosenfeld 1988: 74-80; 80-5). Az utóbbit, mint Naszir-Eddin at Tuszinak *tulajdonított* munkát különbözteti meg (Rosenfeld 1988: 80-5) az előbbitől. Ez az, amit mások (Bonola, Heath, Gray, Sain, Weszely) Naszir-Eddin at Tuszi munkájaként említenek.

A SZERZŐ/ GEOMÉTER NEVE	A KÍSÉRLETET LEÍRÓ IRODALOM	A MEGOLDÁSI KÍSÉRLET JELLEMZŐI AZ IRODALOM ALAPJÁN
G. Alphons Borelli	Bonola 1955: 13. Heath 1956: 194. Rosenfeld 1988: 95.	**Ekvidisztáns alapú** (Bonola 1955: 13; Rosenfeld 1988: 95). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** (Bonola 1955: 13; Rosenfeld 1988: 95). **Körbenforgó**
Vitale Giordano	Bonola 1955: 14-5. Gray 1979b: 52-3. Rosenfeld 1988: 95.	**Ekvidisztáns alapú** (Bonola 1955: 14-5; Gray 1979b: 52-3; Rosenfeld 1988: 95). **A párhuzamosság újradefiniálására épít** (Bonola 1955: 13; Gray 1979b: 52-3; Rosenfeld 1988: 95). **Körbenforgó**
Christian Wolff	Stackel1895: 157. Tanács 2004b: 124.	**Ekvidisztáns alapú** **A párhuzamosság újradefiniálására épít** **Körbenforgó**
Thibaut	Kárteszi 1973: 19-20. Sommerville 1958: 5-6.	**Direkt bizonyítás** **ÖP-vel ekvivalens segédtétel alkalmazása** **Körbenforgó** Kárteszi (1973: 19-20) szerint „tanulságosan rossz álbizonyítás”.

2.1.4 A párhuzamosok ekvidisztáns-elmélete

A „párhuzamosok problémájának” története során a fogalmi hézag kitöltésének szándéka mindvégig nyilvánvaló. Annak ellenére tehát, hogy a problémát nem közvetlenül a fogalmi, hanem a módszertani oldalon próbálták megoldani, magukat a bizonyítási, de még a szimplifikációs törekvéseket is az vezette, hogy a „párhuzamos” jelentésének „nem metsző” és „ekvidisztáns” jelentései között fogalmi hézagot kitöltsék. Amit direkt vagy indirekt úton kívántak volna megmutatni, vagy egy evidensebb axióma bevezetés révén megoldani, nem más volt, mint hogy a párhuzamos egyenesek valójában ekvidisztáns egyenesek.

A „párhuzamosok problémájának” történetét végigkísérő tendencia miatt azokat a megoldási kísérleteket, amelyek közvetlen kapcsolatban vannak a párhuzamosok ekvidisztánsként történő felfogásával, összefoglaló módon a „párhuzamosok ekvidisztáns elmélete” névvel szokás jellemezni. A párhuzamosok ekvidisztáns-elmélete az antik görög kísérletek között gazdagon képviselteti magát (Heath 1956: 191), de az arab kísérleteket is általában véve ekvidisztáns-alapúként szokás jellemezni (Gray 1987: 508). Ez a törekvési irány a későbbiekben sem halt el. Így például Grisogono a 15. században számos matematikust, ókori, arab és (más forrásból ismeretlen) latin szerzőt kritizál, akik „úgy próbálták Euklidész párhuzamossági posztulátumát bebizonyítani, hogy a párhuzamosok ekvidisztánsként történő definiálásával kezdték" (Rosenfeld 1988: 93).[15] A modern korban a párhuzamosok ekvidisztánsként történő értelmezésének vonalát Clavius és Borelli képviselte. Ezen kívül árulkodó, hogy a Johann Heinrich Lambert és Kant között zajlott levélváltás során Lambert a párhuzamosságra adott Wolff-féle nominális definícióval szemben a kövekező kritikát fogalmazta meg még 1766-ban is:

> Wolff úgyszólván készpénznek vette a nominális definíciókat és ebbe csúsztatott, másszóval rejtett el minden nehézséget, anélkül, hogy mindezt észrevette volna.[16] (Stackel és Engel 1895:157).

A matematikatörténetileg többé-kevésbé feldolgozott és leírt megoldási kísérletek összességében azt sugallják, hogy az ekvidisztáns-elméleti indíttatású próbálkozások a „párhuzamosok problémáját" történetileg valóban végigkísérték, méghozzá az összes ebből fakadó negatív következménnyel együtt. E törekvésekben tehát meglehetősen közvetlenül jelentkezett a „párhuzamosok problémájának" hátterében álló fogalmi probléma. Úgy tűnik azonban, hogy a fogalmi probléma az ekvidisztáns-alapú törekvésekben olyan fogalmi hibaként realizálódott, amely a „párhuzamos" jelentéseinek („nem metsző", illetve „ekvidisztáns") összekeveréseként jellemezhető (Sommerville 1958: 11). E próbálkozások a fogalmi hiba következtében a kérdésnek a kísérletező számára látszólagos, utólag helytelennek minősített megoldásához vezettek. A direkt bizonyítások még az ekvidisztáns-elmélettől különböző megoldási kísérletek esetében is körbenforgáshoz vezettek (Greenberg 1980: 18; Tóth 1967: 3-4), az ekvidisztáns-alapú próbálkozások vagy az ilyen alapon álló újradefiniálási törekvések pedig látványosan körbenforgók. Bár az indirekt kísérletek nem szükségképpen vezettek *petitio principii*hez, ám azok, amelyek ekvidisztáns-elméleti indíttatásúak, ismét csak körbenforgóakká váltak.

Mindez összeségében azt sugalmazza, hogy a „párhuzamos" és az „ekvidisztáns" jelentésének azonosítása vagy valamiféle erős összekapcsolása, de legalábbis a „nem metsző" rovására történő előnyben részesítése játszódik le. Ez az a fogalmi hiba, amely azután valahogy törvényszerűen vezet a *petitio principii* hibájához. A „párhuzamos" „ekvidisztáns" értelmének előnyben részesítése az elsődleges, míg a körbenforgás bizonyos értelemben ennek következménye. Éppen azért kell tehát az „ekvidisztáns" értelem preferálását fogalmi hibának

[16] Lambertnek Kanthoz 1766. februárjában írott levele.

tekinteni, mert szükségképpen körbenforgó kísérlethez, függetlenül attól, hogy milyen típusú megoldási kísérletről van szó. Ez végül azt a dilemmát látszik kifeszíteni, hogy ha a „párhuzamos” fogalmához az „ekvidisztáns” társul erősebb módon, akkor szükségképpen vezet olyan megoldási kísérletre, amely ekvidisztáns-elméleti motiváltságú *és* körbenforgó. Ha pedig a „párhuzamos” fogalmához a „nem metsző” kapcsolódik erősebb módon, akkor nem szükségképpen vezet olyan megoldási kísérletre, amely ekvidisztáns-elméleti motiváltságú *és* körbenforgó. Ez utóbbi esetben lehet más okból körbenforgó (ilyenek a nem ekvidisztáns-alapon körben forgó direkt bizonyítások), vagy nem körbenforgóak (ilyenek a nem ekvidisztáns-alapú és nem körbenforgó indirekt bizonyítások). A történeti séma mintha azt sugallná, hogy a logikailag lehetséges harmadik eset, azaz ekvidisztáns-alapú, de nem körbenforgó kísérlet nincs.

2.2 A nem-euklideszi geometria ekvidisztáns-alapú felfedezhetetlensége szemantikai tézise

A nem-euklideszi geometria történetírását igen erősen meghatározza egy többé-kevésbé kimondatlan prekoncepció, amely abban ragadható meg, hogy sem általában véve a nem-euklideszi geometria fogalmi-terminológiai rendszerét, sem konkrétan Bolyai Jánosét nem találhatjuk olyannak, amelyben a „párhuzamos” „ekvidisztáns” értelemben szerepel. Ezzel egyrészt egy implicit előfeltevésként, másrészt az egész mögött meghúzódó félelemként kell szembenéznünk.

Ha valóban van ilyen prekoncepció, akkor az mivel magyarázható?

Nos, egyrészt a bevezetés során utaltam rá, hogy Bolyai és Lobacsevszkij fogalmi rendszerének abból fakadó különbözősége, hogy Bolyai a „párhuzamos” kifejezést mondjuk „ekvidisztáns” értelemben használja az újonnan felfedezett Bolyai-féle nem-euklideszi geometriában, Lobacsevszkij pedig nem (hanem mondjuk „nem metsző” értelemben), sértené azokat a szemantikai felfogásokat, amelyek keretében a lényeges eltérésre vezető folyamat nem, vagy nem jól értelmezhető. Ezen kívül egy ilyen jellegű, az egész problémakör centrális terminusát illető különbség nemcsak a Lobacsevszkij-féle rendszertől, hanem a modern előadásmódtól való különbözéssel is fenyegetne. Ez, amennyiben zsinórmértékül a modern előadásmódot és az aktuális ismereteink szerint vele többé-kevésbé egyező Lobacsevszkij-féle megformálást tekintjük, a Bolyai-féle felfedezés leértékelődésétől való félelmet idézhet elő.

Ez párosulhat azzal a félelemmel is, hogy a prioritásáért folytatott matematikatörténeti vitákban a Bolyai felfedezése számára nehezen kivívott egyenrangúság most váratlanul a tartalmi síkon kerülne veszélybe.[17]

A két felfedező fogalmi rendszere egyezésének kérdésével kapcsolatos viszonyulásnak van azonban egy olyan összetevője, amely meglátásom szerint a „párhuzamosok problémájának" történetéből származtatható. Bár ez is a felfedezés folyamatával kapcsolatos fogalmi-szemantikai feltételként, illetve előfeltevésként fogalmazható meg, mégis valamelyest független attól az említett kérdéstől, hogy milyen szemantikai mechanizmust állíthatunk a történeti értelemben vett euklideszi geometriától a nem-euklideszi fogalmi rendszerébe való átmenet mögé. Annyiban független, amennyiben az egész történeti folyamat látszik magyarázattal szolgálni arra, hogy miért kizártak bizonyos fogalmi-terminológiai kombinációk a nem-euklideszi geometria lehetséges fogalmi rendszereként. Itt tehát nem a történeti értelemben vett euklideszi, valamint az abszolút és a hiperbolikus geometria fogalmi rendszereinek önmagukban vett és a történeti folyamattól függetlenített, statikus egymáshoz viszonyításáról van szó, hanem a történeti folyamatból következő, abból leszűrödő vagy leszűrhető szemantikai tanulságokról. A „párhuzamosok problémájának" történetével kiegészített adatok ráadásul első látásra az olyan szemantikai elképzelések számára nyújtanak megalapozást, illetve támogatást, amelyek a fogalmi kiterjesztést nem kevéssé meghatározottnak és predesztináltnak, a létrejövő fogalmi rendszereket pedig jelentős mértékben megegyezőnek szeretnék látni.

Voltaképpen a „párhuzamosok problémájának" történeti folyamata kapcsán a matematikatörténetben többé-kevésbé jogosan kialakult *horror aequidistantiae* érzésének a nem-euklideszi geometriára történő kiterjesztéséről van szó. Az az ekvidisztanciától való félelem, amely a „párhuzamosok problémájának" ekvidisztancia-alapú kísérleteit figyelembe véve indokoltnak látszik, egyúttal elégségesnek látszik annak magyarázatához is, hogy történetileg tekintve miért nem képzelhető el a nem-euklideszi geometria olyan fogalmi rendszere, amely a „párhuzamos–ekvidisztáns" szemantikai viszonyt valósította volna meg. Nézzük meg, hogy a „párhuzamos" „ekvidisztáns" értelemben való használatából, az e jelentés-összetevőnek a másikkal szembeni preferálásából fakadó hibából hogyan látszik

[17] A Bolyai Jánossal kapcsolatos magyar történetírást mélyen átható rehabilitációs küzdelmet kapcsolatban lásd Dávid (1979: 157-62; Kiss 1999: 32-43; Weszely 2002: 126-42). E művek egy-egy fejezetet szentelnek a prioritási kérdéseknek, Bolyai eredményei minél korábbra datálásának. E megközelítés problémáiról, egy összehasonlító-differenciáló történetírási megközelítés szemszögéből tekintve visszatartó jellegéről lásd általában Hronszky (1996), a Bolyai-kutatással kapcsolatban specifikusan pedig Tanács (2002c).

következni a nem-euklideszi geometria ekvidisztáns-alapon való felfedezhetetlensége és ebből kifolyólag a „párhuzamos–ekvidisztáns” kapcsolatot realizálhatatlansága.

Mivel a „párhuzamosok problémája” történetileg a nem-euklideszi geometria felfedezéséhez vezető folyamat, ezért a „párhuzamosok problémájának” téves megoldásai, azaz azok, amelyekről a próbálkozók egytől egyig azt hitték, hogy a kérdésre adott kifogástalan és végérvényes válaszok, egyben a nem-euklideszi geometria felfedezésének potenciális, már csírájában elvetélt kísérletei. Ha a „párhuzamos” és az „ekvidisztáns” jelentésének valamifajta azonosítása, vagy a köztük lévő szemantikai kapcsolatnak a kísérlezető számára a „párhuzamos–nem-metsző” viszonynál erősebbnek bizonyulása törvényszerűen vezet a „párhuzamosok problémájának” illuzórikus megoldásához, akkor indokolt, hogy olyan fogalmi hibának is tekintsük, amely a nem-euklideszi geometriát is felfedezhetetlenné teszi. A nem-euklideszi geometriát ugyanis nem lehet úgy felfedezni, hogy közben valaki a „párhuzamosok problémáját” valamilyen oknál fogva megoldottnak véli. Ugyanez specifikusan: a nem-euklideszi geometriát nem lehet úgy felfedezni, hogy közben az illető a „párhuzamosok problémáját” a fogalmi hiba észrevétlenül maradása következtében megoldottnak hiszi. Valahogy úgy magyarázhatjuk, hogy ha a geométer számára a „párhuzamos” fogalom „ekvidisztáns” és „nem metsző” komponensei nem különülnek el világosan, vagy az „ekvidisztáns” jelentése valamiképpen „uralja” a „nem metsző” jelentését (fogalmilag előnyt élvez), akkor ez éppen azt teszi észrevétlenné, hogy a „nem metsző” és az „ekvidisztáns” közötti fogalmi hézag önkéntelenül is átlépésre került. Ahogyan nem ismerték fel a kísérlezetők a *petitio principii*t, úgy nem ismerték fel a fogalmi hibát, hiszen éppen az utóbbi vezetett az előbbihez.

Röviden: ha a „párhuzamos” és az „ekvidisztáns” jelentésének azonosítása vagy előnyben részesítése olyan fogalmi hiba, amely törvényszerűen vezet a „párhuzamosok problémájának” látszatmegoldásához, akkor egyszersmind a nem-euklideszi geometria felfedezhetőségét is kizáró szemantikai akadálynak tekinthető.

Ez megmagyarázni látszik azt is, hogy a „párhuzamosok problémájának” folyamatából hogyan következik az a szemantikai kényszer, amely miatt a „párhuzamos-ekvidisztáns” nem-euklideszi terminológiai kapcsolat megvalósulása kizárható. Azért nem lehet tehát eljutni a nem-euklideszi geometria fogalmi-terminológiai rendszerének olyan megvalósulásáig, amelyben a „párhuzamos-ekvidisztáns” kapcsolat realizálódhatna, mert a „párhuzamos-ekvidisztáns” jelentéskomponens preferálásával a felfedezés folyamata már korábban elbukik, és el sem jut abba a végállapotba, ahol ez a kapcsolat realizálódhatna.

Az ily módon rekonstruált gondolatmenetből valóban az következik tehát, hogy a „párhuzamos" jelentéséhez való viszonyulásban vannak kódolva, és ez által adottak, meghatározottak a Bolyai-Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi geometria fogalmi-terminológiai rendszerének alapvető körvonalai.

Az így felépített gondolatmenet első látásra jól megmagyarázza, hogy miért azt látjuk, amit látunk akkor, amikor sem Bolyai, sem Lobacsevszkij, de még Gauss sem olyan fogalmi-terminológiai rendszert alkotott, amelyben a „párhuzamos" az „ekvidisztáns" értelemben szerepel. Egyszerűen azért nem, mert a felfedezés tág értelemben vett előzményeiből, a „párhuzamosok problémájának" történeti folyamatából kirajzolódó szemantikai feltétel szerint kizárt, hogy olyan lehessen, amint az imént vázoltuk. Ebben a rekonstrukcióban értelemszerűen a gondolatmenetnek a konklúziója lesz, hogy a „párhuzamos" fogalmában az „ekvidisztáns" előnyben részesítése olyan szemantikai gát, amely nem vezethet az ennek megfelelő, illetve ezt leképező nem-euklideszi fogalmi rendszerhez. A matematikatörténeti tényeknek ez utóbbi állítással kell megfelelésben állniuk.

A gondolatmenet többféleképpen kritizálható. Az egyik lehetőségként adódik, hogy a gondolatmenet első lépését és fő pillérét jelentő elemet támadjuk. Ezt választva megkísérelhetnénk megmutatni, hogy a „párhuzamos" és az „ekvidisztáns" jelentésének „kemény vagy erős összekapcsolása" nem szükségszerűen vezet a „párhuzamosok problémájának" fogalmi hibából következő látszólagos megoldásához, azaz nem szükségszerűen vezet a felfedezés folyamatának ilyen módon való elvetéléséhez. Mivel a „párhuzamos" és az „ekvidisztáns" jelentésének „kemény összekapcsolása" a direkt bizonyításokhoz és az újradefiniálási kísérletekhez kapcsolódva látszik közvetlenül fogalmi hibát eredményezni, ezért a kiutat az indirekt bizonyítási kísérletek irányában kereshetnénk. Megpróbálhatnánk elvi alapon bebizonyítani, hogy az indirekt megoldási kísérletek esetében nyitva áll az út. Vagy megpróbálhatnánk egy olyan történeti esetet mutatni, amely tételesen bizonyítja, hogy az indirekt bizonyítási kísérletek esetén a „párhuzamos" fogalmában az „ekvidisztáns" jelentéskomponens előnyben részesítése sem vezet a nem-euklideszi geometria felfedezési folyamatának elbukásához. Ahhoz azonban, hogy ez valóban bizonyító erejű legyen, nemcsak nagyívű (azaz sok lépésből álló, hosszú) és ekvidisztáns-alapú indirekt bizonyítási kísérletnek kellene lennie, amely végül más okból kifolyólag minősült hibásnak, hanem a folyamatnak lehetőség szerint a nem-euklideszi geometria felfedezésére kellene kifutnia. Ez utóbbi feltételnek azonban nem sok eset felel meg, amelyek pedig megfelelnek, azok azt nem látszanak teljesíteni, hogy a nem-euklideszi geometria fogalmi rendszerében a

„párhuzamos–ekvidisztáns” kapcsolatot képeznék le. Ugyanakkor az indirekt bizonyításoknak tulajdonított kiemelt figyelem és magas heurisztikus érték azt sugallja (Bonola 1955: 43-5; Dávid 1979: 158-9, 181; Eves 1997: 54-60; Gray és Fauvel 1987: 508-9; Gray 1979a: 238, 248; Greenberg 1980: 125-7; Heath 1956: 211; Houzel 1992: 4; Kárteszi 1973: 15-6; Kárteszi és Szénássy 1987: 15-8; Kiss 1999: 26-7; Kline 1980: 80-1; Martin 1975: 302-5; Sain 1985: 24-5; uő. 1986: 610-2; Sommerville 1958: 11-3, 22; Stackel 1900: 242-4, uő. 1914: 74, 235; Stillwell 1989: 256; Szénássy 1992: 161; Torretti 1978: 45-52; Tóth 1967: 4-6; uő. 2000d; Weszely 2002: 55-6, 70; Zheng 1992: 173-4, 180-2), hogy a nem-euklideszi geometria egyáltalában vett felfedezhetőségét mégiscsak az indirekt eljárásokhoz köthetjük. A Saccheri és Lambert által követett módszertan magasztalása azt sugallja, hogy ha a nem-euklideszi geometriát fel lehetett egyáltalán valahogy fedezni, akkor csak indirekt bizonyítási eljárás révén lehetett, illetve ha a felfedezés rekonstruálható egyáltalán valamennyire is zárt módszertani keretben, akkor csak az indirekt módszertan keretében tehető.[18] Erre Bolyai is jó példának látszik, hiszen felfedező, és a matematikatörténeti beállítás szerint az indirekt eljárás kizárólagos szerepet játszott a „párhuzamosok problémájának” megoldására tett kísérleteiben (Kiss 1999: 26-7; Sain 1986: 617-9; Sommerville 1958: 22-3; Stackel 1900: 242-4, uő. 1914: 74, 235; Szénássy 1992: 161; Weszely 2002: 70; Zheng 1992: 173-4, 180-2;).[19] A vélemények legfeljebb abban oszlanak meg, hogy az indirekt próbálkozások időszaka a Bolyai-féle nem-euklideszi geometria eredményei felől tekintve lényegében terméketlen (Stackel 1900: 242-4, uő. 1914: 74, 235; Sain 1986: 617-9; Szénássy 1992: 161), vagy valamelyest gyümölcsöző (Dávid 1979: 181; Kiss 1999: 26-7; Sommerville 1958: 22-3; Weszely 2002: 70; Zheng 1992: 173-4, 180-2).

Bolyai tehát jelen ismereteink szerint nyilvánvalóan nem felel meg annak a feltételnek, hogy fogalmi-terminológiai rendszere a „párhuzamos–ekvidisztáns” kapcsolatot valósítaná meg. Sőt: a matematikatörténet eddigi tényei szerint az ő példája éppenhogy azt támasztja alá, hogy ha valahogy, akkor a nem-euklideszi geometriát *nem* ekvidisztáns-elméleti alapon és indirekt módszerrel lehet felfedezni. Példája továbbá a gondolatmenet azon konklúzióját igazolja,

---

[18] Úgy tűnik, hogy Bolyai következő megjegyzését a „bebizonyítás” kifejezés miatt direkt bizonyításra utalónak tekintik: „A 11. axióma bebizonyítására – írja János – először azt az utat követtem, hogy bebizonyítsam, hogy az egyenessel egyenközű vonal, azaz a síkban tőle mindenütt egyenlő távolságra levő vonal szintén egyenes és evégből megvizsgáltam, hogy mik az ilyen vonal tulajdonságai az ellenkező esetben.” (Idézi Weszely 2002: 62). Míg ennek az útnak a terméketlenséget, zsákutca-jellegét hangsúlyozzák (Weszely 1981: 62, uő. 2002: 62), addig más helyeken az indirekt eljárás szerepét Bolyainál pozitívan értékelik (Weszely 2002: 70). Másrészt meglátásom szerint ez az indirekt eljárásra példa amiatt, hogy végeredményben „az ellenkező esetre vonatkozó vizsgálatról” van szó.

[19] Dávid az egyetlen, aki Bolyai Jánosnak a körülbelül 1820-ig tartó első időszakát a direkt bizonyítás szakaszának tekinti (Dávid 1979: 180).

amely szerint nincs, és nem is lehet a „párhuzamos–ekvidisztáns" kapcsolatot realizáló nem-euklideszi fogalmi rendszer — mivel az övé sem az.

A nyitva hagyott másik lehetőség tehát az, hogy közvetlenül az eredeti gondolatmenet konklúzióját cáfoljuk, és megpróbáljuk megmutatni, hogy igenis van a „párhuzamos–ekvidisztáns" kapcsolatot realizáló nem-euklideszi fogalmi rendszer. Ekkor nem csak elvileg, filozófiai alapon láthatnánk igazolva, hanem történeti tényekkel alátámasztva is, hogy a „párhuzamos"-hoz a történeti értelemben vett euklideszi geometriában társuló két jelentéskomponens (az „ekvidisztáns" és a „nem metsző") közül bármelyikhez ragaszkodhatunk, ha hajlandók vagyunk a másikat feladni. Ugyanez a másik oldalról is megfogalmazható lenne: a „párhuzamos", az „ekvidisztáns" és a „nem metsző" jelentései egymáshoz való viszonyának nincs olyan kitüntetett rendszere, amelyhez inkább kell ragaszkodni, vagy amely feladására inkább hajlandónak kell lenni ahhoz, hogy a nem-euklideszi geometria egyáltalán felfedezhető legyen.[20] Ha találnánk a gondolatmenet konklúzióját cáfoló esetet, akkor az a tény, hogy a nem-euklideszi geometriának létezik olyan fogalmi rendszere, amely a „párhuzamos–ekvidisztáns" fogalmi-terminológiai kapcsolatot realizálja, egyszersmind azt is jelentené, hogy a felfedező valóban ragaszkodhat a „párhuzamos" jelentésének bármelyik komponenséhez, ha a fogalmi ellentmondást elkerülendő hajlandó a másik szemantikai kapcsolat feladására, és valóban hajlandó is bármelyiket feladni. Ez egyúttal azt is mutatná, hogy hibás az a gondolatmenet, amely azért tartja kizártnak a „párhuzamos–ekvidisztáns" terminológiai kapcsolatot leképező nem-euklideszi fogalmi rendszert, mert a „párhuzamos" és az „ekvidisztáns" jelentésének kemény összekapcsolása szükségszerűen vezet fogalmi hibához, és szükségszerűen áll a nem-euklideszi geometria felfedezésének útjában.

Az értekezés a következőkben ennek a *szemantikai szükségszerűségi tézis*nek a cáfolására tesz kísérletet. Az értekezés során ugyanis azt kívánom megmutatni, hogy Bolyai János, a

---

[20] Quine eredetileg kijelentésekre fogalmazta meg tézisét: „Bármely kijelentést igaznak tarthatunk minden körülmények között, ha a rendszer egy másik részének megváltoztatása eléggé radikálisan történik." (Quine 1999: 148). Egyrészt amit a „párhuzamos", „ekvidisztáns" és „nem metsző" kifejezések jelentéseinek egymáshoz való viszonyával (szinonimitás, jelentések kemény, erős összekapcsolása) összefüggésben elmondtam, értelemszerűen átfogalmazható lenne az „ekvidisztáns", „nem metsző" és „párhuzamos"-t tartalmazó állításokra (mondatokra) is. Másfelől nyilvánvaló, hogy Quine-nak a jelentéssel és a szinonimitással kapcsotban kifejtett érvelése alapján az iménti tézis átfogalmazható szinonimitási viszonyokra is: „Bármely szinonimitási viszonyhoz ragaszkodhatunk, ha egy másik szinonitási viszony feladására hajlandók vagyunk." A „szinonimitás"-on Quine-nal összhangban kognitív szinonimitást értek, továbbá az „azonos jelentésű", és nem a „rokon (hasonló) értelmű" értelemben használom. Nyilvánvaló, hogy a „rokonértelműség" tisztázása előfeltételezi az „azonos jelentésű" tisztázhatóságát, illetve annak a jelentésfogalomnak a tisztázását, amelyet a meghatározásban felhasználni kívánunk. A szinonimitás és fölcserélhetőség nyelvészeti problémáival kapcsolatban lásd Ruzsiczky (1985).

nemeuklideszi (hiperbolikus) geometria felfedezője a „párhuzamosság” terminushoz az „ekvidisztancia” jelentést társította — legalábbis az új geometria általa történt felfedezését és elfogadását követően bizonyosan.

A Bolyai János-féle „párhuzamos" Standard Nézetének rekonstrukciója és cáfolata

A tárgyak semmifajta kezelésmódja sem emelkedik a másik fölé. A matematikai megismerés nem szigorúbb, mint a filológiai-történeti. Csupán 'egzakt', de ez nem azonos a szigorúsággal.

Martin Heidegger: Mi a metafizika?

A történelmi tény lebecsülése mélyen és valószínűleg funkcionálisan átjárta a tudósok ideológiáját, pedig egyébként ugyanezek a tudósok másfajta tényszerű részleteket tartanak a legfőbb értéknek.

[A] tudományoknak (...) valójában szükségük van hőseikre, és igenis megőrzik nevüket. A tudósok azonban nagyon is képesek elfelejteni vagy meghamisítani a hősök műveit.

Thomas Kuhn: A tudományos forradalmak szerkezete

A Bolyai János-féle „párhuzamos” Standard Nézetének rekonstrukciója

3.1 A Standard Nézet: egy felfogás rekonstruálásának nehézségei

A Bolyai-féle nem-euklideszi geometria párhuzamosság-fogalmával kapcsolatban létezik egy közkeletű és mindeddig lényegében egyeduralkodó felfogás. Erre a felfogásra összefoglalóan a „Standard Nézet” névvel vagy szinonimáival fogok hivatkozni. Bár a Standard Nézet a részletek szintjén több mint sokszínű, kiállásában meglehetősen egységes. Az egységes jelleget az egymást első körben kölcsönösen megerősítő – vagy legalábbis meg nem kérdőjelező – vélemények sajátos szövedéke idézi elő. A megnyilatkozások mind általánosan, az *Appendix* egészének értelmezését tekintve, mind az olyasfajta részletek kérdésében, mint például a Bolyai-féle párhuzamosság értelme és műbeli helye – ugyanazt látszanak képviselni. Az *Appendix* egyik legfontosabbnak ítélt része a mű felütése, azaz az első paragrafus. A részleteket későbbre hagyva a Standard Nézet álláspontját úgy összegezhetjük, hogy a mű első cikkelyében annak a kifejezésnek vagy annak a fogalomnak a meghatározását találjuk, amely a „párhuzamosok problémájának” magvát alkotta. Már a „párhuzamosság” fogalmának a történetben játszott központi jellege is amellett szól, hogy a kérdés negatív megoldását és tisztázását jelentő mű ennek a fogalomnak a meghatározásával kezdődjön. Látni fogjuk, hogy a mű első paragrafusával kapcsolatban nem túlzás ehhez hasonló, általánosan elfogadott és egységesen képviselt értelmezésről beszélni.

A kijelentések szövevényéből kibomló nézetet közelebbről szemügyre véve azonban szövethibákra és felfeslésekre lelhetünk. A szövedék olyan, kezdetben finomnak tetsző, ám a vizsgálat előrehaladtával egyre jelentősebbé váló belső szakadásokat – véleménykülönségeket – mutat, amelyek reményeim szerint internálisan is el fognak vezetni az egész álláspont kritikai felülvizsgálatához.

Hogyan lehet egy nézet egyszerre egységes, valamint komoly véleménykülönbségeket magában foglaló? Hogyan lehetséges e két dolgot összeegyeztetni? Miért indokolt „standardként” nevesíteni egy olyan vélekedésrendszert, amely egyik legfőbb jellemvonásának a különféleséget tartjuk? Hogyan remélhetjük közös nevezőre hozni őket? Az iménti kérdések egyfelől a nézet működésének sajátlagos és erősen kifogásolható működésmódját érintik, másfelől jelzik azokat a nehézséget, amelyek elé a rekonstrukció néz.
Először, ami a fellépés egységességét illeti: bizonyos, hogy a nézet az egészet alkotó egyes álláspontokban mutatkozó különbségeket mindezidáig nem tette vita tárgyává. Ha valóban olyan, egymástól különböző álláspontokról van szó, amelyek nem vehetők egy kalap alá vagy nem összegezhetők veszteség nélkül, akkor miért nincsenek és nem voltak jelen a porondon az egymástól elütő, nyilvánosan ütköztetett nézetek? Hol zajlott le az a vita, amely tisztázta ezeket a tényleges és ténylegesen vállalt véleménykülönbségeket? A válasz, hogy sehol, jelzi a felfogás működésének egységes jellegét – egységes passzivitását. Ha pedig az is igaz, hogy a nézet mélyén lappangó különbségek valóban jelentősek, akkor az inaktivitás az előbbinél is zavarba ejtőbb tulajdonságról árulkodik. Arról, hogy a nézet a maga személytelen módján meggátolta a heterogenitás felszínre jutását, az álláspontok világos szétválását. Egyfelől akadályozta a nézetet alkotó egyes személyes álláspontok között feszülő különbségek felszínre jutását, másfelől az egyes álláspontokon belül feltárható inkoherenciák felszínre kerülését. Ha mindez igaz, akkor a nézetet az a kognitív fékezőerő is jellemzi, amely az álláspontok között feszülő különbségeket csakúgy, mint az egyes álláspontok belső feszültségeit kioltja, belső problémáit pedig elsimítja vagy elleplezi. A felfogás ekkor egy olyan önfenntartó vélekedésrendszerként írható le, amely egyrészt a meggyőződések homogenizátoraként, másrészt az egész mélyén lappangó inkoherencia nem feltétlenül szándékos, de a megismerést tekintve mindenképpen hatékony elnyomójaként funkcionál.
Mindebből az is következik, hogy a Standard Nézetet alkotó személyes álláspontokat tekintve nem minden esetben fogunk teljes és tényleges nézetazonosságot találni, más esetekben pedig az egyes személyes álláspontok azonosítása fog gondot okozni. Az álláspontok ilyetén módon az értekezés keretei között szembesülnek egymással először.[21] Következésképp a különbségek abban a világosan megfogalmazott és kifejezett formában, ahogyan előadásra kerülnek — csak az értekezés sajátosságának tekinthetők és nem a bevett nézet érdemének. Hasonló módon nem tulajdoníthatjuk a nézet érdemének, ha valamely – az egészből kiragadott, de

[21] Kevésbé kritikus és szembesítő módon a nézetet már bemutattam Tanács (2001)-ben. Most azonban a felfogás szerkezetének olyan sajátosságai is megfogalmazásra és bemutatásra kerülnek, amelyek túlmutatnak a korábban ismertetett jellemzőkön.

önállóan és nyíltan nem képviselt – részlete egybeesni látszik az általam későbbiekben propagált tézissel. Az általam képviselt tan és a Standard Nézet között mutatkozó bármely (akárcsak részleges) megegyezés nem annyira a valóság, bár talán nem is a véletlen, hanem az elfogadott nézet sok mindent felölelő heterogenitásának és inkoherenciájának műve.
Az alább következő különös előadásmódot – ami a bevett nézet bemutatását, majd a vélekedések mesterséges álláspontokba sorolását illeti – a nézet sajátlagos működése kényszerítette ki. Először tehát hagyom a nézetet a maga természetes megjelenésében megmutatkozni, majd a kritikai vizsgálódás számára alkalmas formába öntöm.

3.2 A Standard Nézet magáért beszél

A következőkben igyekszem a standard nézetet igen alaposan bemutatni. Ezzel kettős a célom. Az egyik, hogy minél valósághűbb képet adjak róla, miként épül fel és hogyan szerveződik az egész, azaz hogyan – vagy hogyan nem – funkcionál a standard felfogás. A másik, hogy ez a bemutatás fogja az alapját képezni annak az átfogó álláspontnak, amely képes magába foglalni a Standard Nézet két csoportba sűríthető összes explicit álláspont-változatát – azokat, amelyeket egyszerre kívánok majd cáfolni.
A bemutatáshoz három, a matematika történetírása szempontjából eltérő státusszal bíró forráscsoportot kellene számításba vennünk. Ezek egyben a Standard Nézet három különböző megnyilvánulási módját is jelentik. Az egyik csoportot a nem-euklideszi geometria kialakulását különböző szinteken és eltérő részletességgel ismertető matematikatörténeti munkák, illetve a jelenséget különböző indíttatással, más-más aspektusokból tárgyaló matematika- vagy tudományfilozófiai művek alkotják. Ezeket összefoglalóan kézikönyveknek fogom nevezni. A második csoportot az *Appendix* különböző nyelvű, olykor egy-egy nyelven több változatban is elkészített nem szerzői fordításai alkotják. A harmadik csoportot azok az *Appendix*-kiadások képezik, amelyek Bolyai János halálát követően születtek, és amelyeknek ezáltal nem sajátja az eredetihez képest történt változtatások szerzői jóváhagyása. A három forráscsoport közül azonban itt csupán a kézikönyveket használom fel a bemutatáshoz annak ellenére, hogy a bevett nézet a legvitathatóbb módon – amely egyben a legaktívabb és legkonstruktívabb módot is jelenti – a fordításokban és a poszthumusz kiadásokban nyilvánul meg. A két utóbbi forráscsoport segítségével lehet ugyanis megmutatni, hogy a nézet hogyan szorgoskodik az igazolását szolgáltató csalóka evidenciák előállításában, valamint azt is, hogy

milyen erős, az észlelést orientáló funkcióval bír.[22] Másfelől azonban a fordítások és utánközlések beavatkozásai, a nem megfelelő (nem szigorú) forráskezelés és az észlelési hibák akkor lesznek igazán kidomboríthatók, ha előbb megmutattuk a nézet tarthatatlanságát, a szövegkezelési eljárások igazolhatatlanságát, és megteremtettük a korábbi észlelések elfogultságának kimutatásához szükséges új normát.[23]

A bevett nézetnek a kézikönyvekből származó idézetek révén történő bemutatásakor külön tárgyalom (és némiképp előnyben részesítem) a magyar nyelvterülethez kötődő munkákat. Egyrészt azért, mert a latin és a német mellett a magyar a szóba jöhető források nyelve, másrészt azért, mert Bolyai János saját forrásértékű feljegyzéseinek jelentős része szintén magyar nyelvű. A nyelvújításkori magyar nyelven írott források pedig további kiegészítő, illetve redundáns ellenőrzést biztosítanak: alátámaszthatják vagy megkérdőjelezhetik a más forrásokra, különösképpen pedig a magyartól eltérő nyelven írott forrásokra alapozott állításokat. Ezekből következik, hogy magyar nyelvű források a nemzetközi matematikatörténeti vizsgálódás számára, ha egyáltalán, akkor nyelvileg csak nehézkesen hozzáférhetők. A könnyű forráshozzáférhetőség gyakorlati, valamint a nyelvi ellenőrizhetőség módszertani előnye miatt a magyar nyelvű szakirodalom kiemelt jelentőséggel bír – nemcsak mennyiségében, hanem a történetírásban betöltött kognitív tekintélyét illetően is. Emellett a Bolyai-kutatás régóta szorosan kötődik a magyar nyelvterülethez: a (többnyire, de legalábbis magyar nyelven sokat publikáló) magyarországi és erdélyi (vagy innen elszármazott) Bolyai-kutatók alkotják a kutatás centrumát. A magyar nyelvű centrum és az általa létrehozott kézikönyvek kiemelt jelentőséggel bírnak a standard-képzésben.

A következőkben tehát hagyom a bevett nézetet magáért beszélni. A felfogás illusztrálása céljából nagy mennyiségű és terjedelmes idézeteket fogok használni. A kézikönyvek között nem teszek különbséget a tudományos tájékozódásban betöltött szerepük és célközönségük függvényében.[24] Így például nem rangsorolom és osztályozom őket ambícióik szerint: aszerint, hogy tudományos vagy csupán ismeretterjesztő szándékkal születtek-e. Ennek egyik

---

[22] Ezzel kapcsolatban lásd Tanács (2003).

[23] Ezekről a hibákról a későbbiekben, az értekezés *4.5* pontjában szó lesz.

[24] Bár Thomas Kuhn egyaránt a tudományos forradalmak „eltüntetésében" betöltött közös vonásaikat hangsúlyozza, mégis megkülönbözteti a népszerűsítő és a filozófiai írásokat a tudományos kézikönyvektől. A „kézikönyveket" azért választottam átfogó kategóriának, mert az összes ily módon alája tartozó művel kapcsolatban éppen azt állítom, mint amit Kuhn a kézikönyvekkel összefüggésben megfogalmaz: „A kézikönyveket (…) mivel ezek a normál tudomány fenntartásának pedagógai eszközei, részben vagy egészen át kell írni, valahányszor a normál tudomány nyelve, problémáinak szerkezete, illetve normái megváltoznak. Röviden, minden egyes tudományos forradalom után át kell írni őket, és mihelyt ez megtörtént, szükségképpen elfedik a nemcsak az őket létrehozó tudományos forradalom szerepét, hanem puszta tényét is." (Kuhn 2000: 143).

oka, hogy e tekintetben nincs közöttük kézzel fogható eltérés az *Appendix* első paragrafusára kialkudott konszenzus tekintetében. A másik ok pedig az, hogy a Standard Nézet kialakításában és fenntartásában ugyanolyan módon vesznek részt: a népszerűsítő és ismeretterjesztő munkák éppúgy szerepet vállalnak, mint magasabb kvalitású, tudományos elvárásoknak megfelelő társaik. Thomas Kuhn-nal szólva: a népszerűsítő és ismeretterjesztő munkák éppúgy a Standard Nézet „kialakításának és fenntartásának pedagógiai eszközei”, mint a tudományos jellegűek. Utóbbiakhoz az út (gyakorta) az előbbieken keresztül vezet, és ennek az útnak a végén egyelőre nem találunk a korábbiakat semlegesítő, felülbíráló és újraértékelő írásműve(ke)t.

Lássuk hát az egyes képviselőket és álláspontjaikat.

DÁVID LAJOS

> Az Appendix az előbbi [a párhuzamosságról szóló – T.J.] szakasszal kezdődik, minden előkészítés, alapvetés nélkül. Az I. rész szükséges tételeit hallgatólag föltételezi *B. J.* [azaz Bolyai János – T.J.]. Külön hangsúlyozzuk, hogy a párhuzamosság értelmezése megengedi az V. posztulátum (I. rész, 2) állítását is (*euklidesi geometria*), tagadását is (*nem-euklidesi geometria*).
>
> *B. J.* szemléletesen indokolja, hogy bármely *A*-ból indul ki egyetlenegy párhuzamos félegyenes. (Dávid 1944: 37).
>
> * * *
>
> Bolyai János épen[25] ezért a párhuzamos szó helyett aszimptotikus párhuzamost ír, s magát az ilyen egyenest aszimptotának is nevezi. (Dávid 1944: 179).
>
> * * *
>
> Csak egy ilyen egyenes [t.i. nem-metsző – T. J.] (…) van az E. –geometriában [azaz: az euklideszi geometriában – T.J.], vagyis az állandó párhuzamossági szög esetében. Ellenben végtelen sok van a változó párhuzamossági szög geometriájában. Az utóbbi esetben a nem-metsző egyeneseket alkotó, *A* kezdőpontú kiegészítő félegyenesek közül <u>AP</u>, <u>AP</u>*’ párhuzamos (parallel),* ellenben a többi (pl. <u>AE</u>) *nem-metsző*, (*ultraparallel:* „túlpárhuzamos, párhuzamosontúli”), nem értve közéjük a párhuzamosakat, bár szószerint ezek is „nem-metszők”, ezeknél sincs metszés a *B’B* egyenessel. (*B. J. aszimptotikus* egyeneseket mond párhuzamosak helyett. … De eltérünk – általános szokás szerint – *B*. elnevezésétől, mivel az euklidesi párhuzamosság általánosításáról van szó). (Dávid 1944: 40).

[25] Az idézet szövegének „helyesírási sajátosságai” az eredeti szövegből erednek. Nem kívántam önkényesen beavatkozni a helyesírási hibának vélt jellemzők kijavításával.

DOBÓ ANDOR

Bolyai János – apja, Bolyai Farkas (1775-1856) *Tentamen*-jének függelékeként, 1831-ben latinul megjelent – munkájában, az *APPENDIX*-ben a párhuzamos új, euklideszinél általánosabb fogalmát a következőképpen értelmezte:

Egy adott egyenesen kívül levő ponton át húzzunk egy másik, az előbbit metsző egyenest. Ebből a kiinduló helyzetből, a választott pont körül – mindvégig a közös síkban maradva – kezdjük el az egyenest az óramutató járásával ellentétes irányban forgatni. Ekkor szükségszerűen bekövetkezik egy olyan helyzet, amikor a forgatott egyenes legelőször nem metszi a rögzítve hagyottat. A pont körüli forgatás révén ilyen állásba került *határegyenesről* mondjuk azt, hogy párhuzamos a vele egy síkban levő másik egyenessel. (Dobó 1989: 49).

DOBÓ ANDOR ÉS SZÉNÁSSY BARNA

Bolyai János az APPENDIX 1.§-ban (…) a párhuzamosok új, az euklideszinél általánosabb fogalmát a következőképpen értelmezi:

Egy adott egyenesen kívül lévő ponton keresztül húzzunk egy másik, az előbbit metsző egyenest. Ebből a kiinduló helyzetből, a választott pont körül – mindvégig a közös síkban maradva – kezdjük el az egyenest az óramutató járásával ellentétes irányban forgatni. Ekkor szükségszerűen bekövetkezik olyan helyzet, amikor a forgatott egyenes *legelőször* nem metszi a rögzítve hagyottat. Ilyen állásban a pont körül forgatott egyenesről azt mondjuk, hogy *párhuzamos* a vele egy síkban lévő másik egyenessel.

Bolyai visszaemlékezéseiből tudjuk (…), hogy *Szász Károllyal* folytatott eszmecseréik alkalmával a forgatás során *„legelőször elpattanó”* egyenest *„legközelebbi paralelának”* vagy *„nem vágónak”* nevezték. János többnyire az *„aszimptotikus paralela”* vagy röviden *„aszimptota”* kifejezést használta. (Dobó-Szénássy 1985: 44).

KÁLMÁN ATTILA

Bolyai János nem egyenesekre, hanem irányított félsugarakra értelmezi a párhuzamosságot. Ha rögzítjük az irányt, akkor (akárcsak Euklidésznél) Bolyai szerint is egy és csak egy párhuzamos létezik egy adott félsugárral egy hozzá nem illeszkedő ponton keresztül. (Kálmán 1989: 96).

* * *

Szigorúan ragaszkodnunk kell a párhuzamosság *Bolyai-féle* meghatározásához (…) és az általa használt egyéb értelmezésekhez is. (Kálmán 1989: 104).

* * *

I. A párhuzamosság

Az első tíz paragrafusban igen gondosan tisztázza [t.i. Bolyai János az *Appendix*ben] a párhuzamosság fogalmát és tulajdonságait. (Kálmán 1989: 105).

* * *

A 3. §-ban azt bizonyítja be, hogy ha két irányított félegyenes egy harmadikkal párhuzamos, akkor az a kettő nem metszi egymást. (Kálmán 1989: 106).

KÁRTESZI FERENC

Ezek után Bolyai művének paragrafusai szerint haladva közöljük magyarázó, kiegészítő, tájékoztató jellegű megjegyzéseinket.

1. §

Ebben a paragrafusban a párhuzamosságnak olyan értelmezését adja Bolyai, mely a maradék axiómarendszerrel összeegyeztethető. A párhuzamosságnak ez az értelmezése tágabb, mint az euklideszi, s az euklideszi értelmezést speciális eset gyanánt foglalja magában.

2. §

Az előző paragrafusban adott értelmezés olyan, hogy a B pont, mint a $\underline{BN}$ félegyenes kezdőpontja, kitüntetett szerepet játszik benne. A jelen paragrafusban azt bizonyítja, hogy *a párhuzamosság független attól, hol foglal helyet a B pont azon az egyenesen, melynek a* $\underline{BN}$ *az egyik félegyenese.* (Kárteszi 1973: 124).[26]

KISS ELEMÉR

A *c* merőlegest forgassuk a *P* pont körül az óramutató járásával ellenkező irányban. Az ilyen módon forgatott egyenes eleinte metszi az *a* egyenest, az elforgatott *c* egyenes valamely pillanatban először nem metszi *a*-t.

Két eset lehetséges.

Ez a pillanat éppen akkor következik be, amikor *c* egybeesik *b*-vel. Ez valósul meg az euklidészi geometriában.

---

[26] Kárteszi e munkájáról angol fordítás is készült. A „paralelism” fogalmának, illetve a „parallel” terminus kérdésében változtatás nélkül képviseli az 1973-as magyar műben elmondottakat (Kárteszi és Szénássy 1987: 127). Az angol nyelvű kiadás révén azonban a Standard Nézet nemzetközi vetületének kialakításában is részt vesz.

Van azonban egy másik lehetőség is. Előfordulhat, s ezt a geometria többi axiómái megengedik, hogy már előbb bekövetkezik ez a pillanat, valamely *PQ* helyzetben. Ha ezt megengedjük, akkor szimmetria okokból *P*-n keresztül kell léteznie még egy ilyen tulajdonságú *PQ'* egyenesnek is, ha *c*-t ellenkező irányba forgatjuk. Bolyai János a *PQ* és *PQ'* egyeneseket nevezi a *P*-n keresztül *a*-hoz húzott párhuzamosaknak. (Kiss 1999: 28)

SAIN MÁRTON

(…) el kell szakadnunk minden személetes tartalomtól, amely a párhuzamosság euklideszi értelmezésével függ össze, amelynek a szemléletében nevelkedtünk, és szigorúan tartanunk kell magunkat a párhuzamoság Bolyai-féle meghatározásához. A másik nehézség az, hogy az egyenes, a félegyenes és a sík szavakat Bolyai sokkal tágabb értelemben használja, mint Euklidész. A *Scientia Spatii* [azaz az *Appendix* – T.J.] tartalmából ezeket az újszerű, bevezető gondolatokat szeretném bemutatni.

Az első paragrafus a párhuzamosságot definiálja (…). Bolyai a párhuzamosságot a félegyenesekre mondta ki a következőképpen:

Az <u>*AM*</u> || <u>*BN*</u>, ha

a) <u>*AM*</u> és <u>*BN*</u> az *AB* egyenes ugyanazon oldalán van,

b) <u>*AM*</u>-nek és <u>*BN*</u> -nek közös pontja nincs, és ha

c) a β szögtartomány minden <u>*BP*</u> félegyenese metszi az <u>*AM*</u> félegyenest. (Sain 1986: 623-4).

SALLÓ ERVIN

BOLYAI JÁNOS szimbolisztikája bonyolult kifejezéseket pótol. S ezt nemcsak a tömörség kedvéért teszi, hanem azért is, mert el akarja kerülni a szemléletességtől átitatott hagyományos terminológiát. Az „*Appendix*” mondanivalója a párhuzamosok problémája körül kristályosodik, mégis a „párhuzamos egyenes”, ill. „párhuzamos” kifejezést BOLYAI J. az „aszimptóta” szóval helyettesíti és ezt is csak egyszer használja (egy lábjegyzetben), a szövegben mindig ||| jel fordul elő. S joggal, hiszen az „*Appendix*” 1. §-ában meghatározott „párhuzamosság” tisztán *logikai* jellegű és összeegyeztethetetlen a párhuzamosságnak szemléletünk által megszokott, euklideszi meghatározásával. (Salló 1974: 34-5).

SIMONYI KÁROLY

Azt természetesnek kell tartanunk, hogy az Appendixet a párhuzamosság defininíciójával kezdi [Bolyai János – T.J.]: az első paragrafus és a hozzá tartozó ábra erről szól.

(…)

Íme a definíció.

Ha az *am* egyenest nem metszi ugyanezen sík *bn* egyenese, viszont metszi bármely *bp* (az *abn* [szögtartományban][27]), akkor ezt így jelöljük: *bn* III *am*. Világos, hogy *am* egyenesen kívül bármely *b* pontból húzható ilyen *bn* egyenes, de csak egyetlen, továbbá *bam* + *abn* nem > 2R.

(…)

Mint látjuk, Bolyai János nem egyenesekre, hanem irányított félsugarakra értelmezi a párhuzamosságot. Kissé másként fogalmazva: a *bn* irányított félegyenesről akkor mondjuk, hogy párhuzamos az *am* irányított félegyenessel, ha *bn* a félsugaraknak *b* körüli forgása közben előálló első olyan félegyenes, amely már nem metszi *am*-et. (Simonyi 2001: 34-5).

SUTÁK JÓZSEF

Vonjunk *B* pontból (…) egy oly BC egyenest, hogy az <u>AM</u>-et *C*-ben messe, ha ezután BC-t addig forgatjuk, mígnem az ABC és BAM szögek összege 2R nem lesz, akkor ezen forgatás közben BC-nek minden esetre e kell jutni oly <u>BN</u> helyzetbe, midőn már nem metszi <u>AM</u>-et, de a forgás bármely előbbi pillanatában még metszette; az ilyen <u>BN</u> sugarat *Bolyai*-féle értelemben *AM*-hez párhuzamosnak nevezzük s jelölésére Bolyaitól eltérőleg a szokásos

<u>BN</u> || <u>AM</u>

jelet használjuk.

A párhuzamosság imént adott definiczíójából következik, hogy <u>AM</u> sugárhoz minden B ponton keresztül egy, de csakis egy párhuzamost vonhatunk.

Azonban a párhuzamosság *Bolyai*-féle definicziója *a párhuzamos egyenesekhez már irányt is köt* (…). (Suták 1897: 75).

* * *

A Bolyai-féle definiczió értelmében tehát az egyenesek csak egyik irányban lehetnek párhuzamosak. (Suták 1897: 76).

TÓTH IMRE

[27] A szögletes zárójeles betoldás Simonyitól származik.

Bolyai meghatározása szerint, *a* és *b* egyenesek akkor párhuzamosak, amikor az *a* egyenes *legelőször* nem metszi a *b* egyenest, vagyis: az elpattanás helyzetében. Ez a meghatározás *független* az 5. posztulátumtól, vagy ahogy Bolyai nevezi az ilyen tulajdonságokat: „*abszolút*". Az így definiált párhuzamosokat Bolyai plasztikusan „*aszimptotikus*" egyeneseknek nevezi, és szimbolikusan az alábbi módon jelöli: a ||| b. (Tóth 1953: 293).

VEKERDI LÁSZLÓ

Egyik nagy francia matematikatörténész – sőt matematika-professzor –, Pierre Humbert írta az egyik legkiválóbb (csak első rendű művekből igyekszem idézni hibákat, rosszakból túl könnyű lenne) francia tudománytörténetben: „Egy ponton át egy adott egyeneshez csak egyetlen párhuzamost lehet húzni, mondotta Euklidész; nem, tételezi fel Lobatchevsky és Bolyai: végtelen sokat." Aki csak belepillantott az *Appendix*be, tudja, hogy erről szó sincs, ugyanis az *Appendix* legelső §-a azt mondja ki, hogy az *AM* félegyeneshez a sík bármely kívüle fekvő *B* pontjából csak egy *BN* párhuzamos félegyenes húzható. Végtelen sok olyan félegyenes van, amelyik *AM* felé hajlik, s mégsem metszi azt, de ezek közül párhuzamosnak Bolyai csak azt az egyet nevezi, amelyik legelőször nem metszi! (Vekerdi 1994: 8-9).

WESZELY TIBOR. 1981.

Egyszer a paralelák elméletét tárgyalva Szásznak a következő „szellemes, valóban geometriai és a XI. axiómától független tér tudománya helyes kifejtésének alapjául szolgáló eszméje volt: hogy ha azt az egyenest, melyet valamely *B* pontból egy másik egyenesnek egyik *C* pontján keresztül húzunk, és ezt az egyenest a két egyenes meghatározta síkban a *B* pont körül forgatni kezdjük, akkor a forgó egyenes, mely a másik egyenest egy ideig a *C* pontban metszi, attól egy bizonyos helyzetben – Szász kifejezésével élve – *elpattan*, és a *BN* helyzetben, ezt az egyenest ő [mármint Bolyai társa, Szász Károly – T.J.] a legközelebbi paralelának vagy nem vágónak nevezte."[28]

János ennek az egyenesnek [azaz: a legközelebbi paralelának vagy nem vágónak – T.J.] a megnevezésére az aszimptotikus paralela vagy röviden aszimptota kifejezést használta. Kétségtelen, hogy Bolyainak ez az elnevezése rendkívül kifejező. Ugyanis egy adott egyeneshez húzott paralela a párhuzamossági irányban minden határon túl közeledik az adott egyeneshez, anélkül hogy ezt valaha is metszené… (Weszely 1981: 65).

* * *

[28] Weszely itt Stackel (1914)-ből idéz.

Az *Appendix* 43 paragrafust tartalmaz.

Az *1. §*-ban a párhuzamosság értelmezését találjuk. Legyen *AM* a sík egy tetszőleges egyenese és *B* egy rajta kívül fekvő síkbeli pont, amelyből az *AM*-re a *BA* merőlegest bocsátjuk (). Ha a *B*-ből kiinduló *BN* félegyenes nem metszi az *AM*-et, de az *ABN* tartomány bármely más *BP* félegyenese metszi, akkor Bolyai az *AM* és *BN* egyeneseket *párhuzamosak*nak nevezi, mely viszonyt így jelöli: *BN* ||| *AM*. (Weszely 1981: 83-4).

WESZELY TIBOR. 2002.

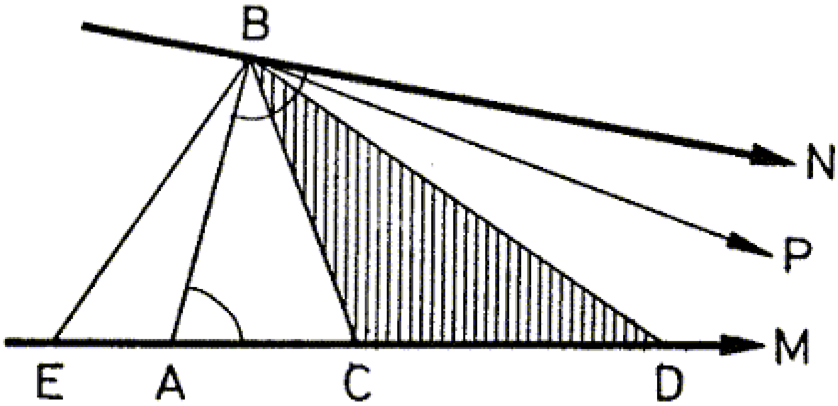
Az *Appendix* 43 paragrafust tartalmaz. A szövegében használt jelmagyarázat után az 1.§-ban a párhuzamosság értelmezését találjuk. (…) [l]egyen az *AM* a sík egy tetszőleges egyenese és *B* egy rajta kívül fekvő pont, melyből az *AM*-re a *BA* merőlegest bocsátjuk (…). A párhuzamosság újszerű értelmezése miatt Bolyai irányított egyeneseket használ. Emiatt a *B* ponton átmenő *BN* egyenesek helyett annak *B* kezdőpontú <u>*BN*</u> félegyenesével dolgozik. Ha a *B*-ből kiinduló <u>*BN*</u> félegyenes nem metszi <u>*AM*</u> félegyenest, de az *ABN* szögtartomány minden <u>*BQ*</u> félegyenese metszi <u>*AM*</u>-et, akkor Bolyai az *AM* és *BN* egyeneseket párhuzamosaknak nevezi, mely viszonyt így jelöli: *BN* ||| *AM*. (Weszely 2002: 77).

3.3 Egy a Bolyai-féle párhuzamosság, de ezer a ruhája?

A bevett nézet vélekedése első körben úgy összegezhető, hogy Bolyai János az *Appendix* első paragrafusában definiálja (értelmezi) a párhuzamosságot, illetve definiálja, hogy mi a párhuzamos (fél)egyenes. Eszerint Bolyai egy adott síkbeli ***AM*** (fél)egyeneshez képest azt a ***BN*** (fél)egyenest nevezi párhuzamos (fél)egyenesnek, amely az adott ***AM*** (fél)egyenesen kívül fekvő ***B*** ponton keresztül húzható és a meghatározott (pozitív, azaz az óramutató járásával ellentétes) irányú forgatás során az adott ***AM*** egyenest először nem metszi (*1. ábra*). Amíg tehát minden, az ***AM*** félegyenesen fekvő ***D*** pontra igaz, hogy ***BD*** metszi ***AM***-et, addig ***BN*** az első olyan félegyenes, amely a ***D*** pont végtelenbe futásával (vagy ***B*** körüli forgatásával kapott) ***BD***-ket követően először nem metszi ***AM***-et. Bolyai ezeknek az egyeneseknek a jelölésére egy sajátos szimbólumot, a párhuzamosság közismert kétvonalas jeléhez (’||’) nagyon hasonló, három vonalból álló jelet használ: ’|||’. A meghatározás nyitva hagyja, hogy hol, azaz mekkora szögnél következik be az először nem metszés. Ha az ***A*** csúcsnál lévő ***BAM*** szög és a ***B*** csúcsnál lévő ***ABN*** szög összege 180° (Bolyai jelölésében 2R), akkor az euklideszi geometria rendszerét, azaz az euklideszi párhuzamossági axióma feltevésén alapuló rendszert kapjuk. Bolyai körülírása azonban nyitva hagyja annak lehetőségét is, hogy az ***A*** csúcsnál lévő ***BAM*** szög és a ***B*** csúcsnál lévő ***ABN*** szög összege kisebb lehessen, mint 180°. Az ily módon kapott rendszer a *hiperbolikus geometria*, amely az euklideszi párhuzamossági axióma tagadására, azaz a *hiperbolikus párhuzamossági axióma* feltevésére épített rendszer. Az euklideszi és a hiperbolikus geometria közös magját alkotó rendszert pedig Bolyait követve „abszolút geometriának” nevezzük. Az *abszolút geometria* tehát az euklideszi és a hiperbolikus párhuzamossági axiómától függetlenül felépíthető rendszer. Az abszolút geometria körében felépíthető tételeket és az itt definiálható fogalmakat, tulajdonságokat „abszolút” jellegűnek nevezzük. Ily módon az *Appendix* első paragrafusában adott Bolyai-féle meghatározás csakúgy, mint a mű első tizenkét paragrafusának tárgyalásmódja abszolút jellegű, méghozzá azon vonása miatt, hogy az először nem metsző (fél)egyenes ***ABN*** szögét, ezen keresztül pedig az ***BAM+ABN*** szögösszeg nagyságát nyitva hagyja, és ezáltal az euklideszi és a hiperbolikus geometria lehetőségét együtt kezeli, a két geometriát együtt tartja. Bár összefoglaló néven a Bolyai-Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi geometriáról szokás beszélni, ám szigorúan véve Bolyai-féle abszolút és hiperbolikus, illetve Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometriáról kellene beszélnünk. Bolyai ugyanis az abszolút és a hiperbolikus geometriát egyaránt felfedezte és kidolgozta, Lobacsevszkij felfedezése pedig csak az utóbbira koncentrálódik.

Az abszolút geometriai tárgyalásmód során nyitva hagyott két lehetőség közül azt a lehetőséget választva, hogy a szögösszeg 180°-nál határozottan kisebb (de változó érték), a hiperbolikus geometria Bolyai-féle rendszerét kapjuk. A hiperbolikus geometriában az először nem metsző ***BN*** (fél)egyenesnek két fontos tulajdonsága is van: *(1)* ***BN*** egyértelműen elválasztja a ***BD*** típusú metszőket a ***BN***-t követő (***BN***-en túli) és ***B***-n keresztül húzott, de ***AM***-et nem metsző (fél)egyenesektől, *(2)* ***BN*** az egyik irányban (az ***A***-tól az ***M*** és a ***B***-től az ***N*** felé mutató irányban) minden határon túl közeledik az ***AM***-hez, azaz: a köztük lévő távolság nullához tart. A ***BN*** és az ***AM*** tehát az egyik irányban egymáshoz aszimptotikusan közeledő, azaz aszimptotikus (nem metsző) (fél)egyenesek.

Ha Bolyai párhuzamos (fél)egyenesnek a forgatás során előálló először nem metsző (fél)egyenest nevezi, akkor az előbbiekből következőleg jogosultnak látszanak a következő átfogalmazások is: egyrészt, hogy a metsző és nem metsző (fél)egyeneseket elválasztó, határhelyzetű, illetve az ***AM***-hez aszimptotikusan közeledő nem metsző ***BN*** (fél)egyeneseket nevezi párhuzamosnak.[29]



1.ábra. Az abszolút és a hiperbolikus geometria párhuzamosság-meghatározásaihoz

A párhuzamosság ilyen módon történő értelmezése esetén a hiperbolikus geometriában a párhuzamos egyenesek valódi részhalmazát alkotják a nem metsző egyenesek halmazának:[30] minden párhuzamos egyenes nem metsző egyenes, ugyanakkor nem igaz, hogy minden nem metsző egyenes egyben párhuzamos is (egy adott egyeneshez képest). A „párhuzamos” és a „nem-metsző” a hiperbolikus geometria kontextusán belül nem tetszőlegesen fölcserélhető, azaz nem szinonim kifejezések. A párhuzamosok ekkor az egyik irányban aszimptotikusan közelednek egymáshoz (megmutatható, hogy az így értelmezett párhuzamosság szimmetrikus tulajdonság), anélkül, hogy végtelenül meghosszabbítva valaha is metszenék egymást. A Bolyai-féle párhuzamosság ilyesformán történő parafrazálására a $P_{NEM\text{-}METSZŐ}$ – a párhuzamos, mint az első nem metsző (fél)egyenes – rövidítéssel fogok hivatkozni. A bevett

---

[29] Az idézetek fényében külön tanulmányozásra érdemes kérdés lehetne, hogy valójában egyenesekről, félegyenesekről vagy úgynevezett félsugarakról van-e szó a párhuzamosság első paragrafusbeli meghatározásakor, ám ettől az értekezés keretei között eltekintek. A kusza helyzet a Bolyai-filológiai sajátsága. Ebből adódik, hogy a vizsgálat folyamán nem teszek különbséget közöttük, és a Bolyai-féle párhuzamossággal összefüggésben egyenesekről éppúgy fogok beszélni, mint félegyenesekről.

[30] Ez csak a hiperbolikus geometriában érvényes. Az abszolút geometriában eldöntetlen, hogy a párhuzamos egyenesek valódi részhalmazát alkotják-e a nem metsző egyenesek halmazának vagy sem. Az abszolút geometria euklideszi párhuzamossági axiómával kiegészített rendszerének modelljeiben az így körülírt párhuzamosok és a nem metszők halmaza egybeesik, míg az abszolút geometria hiperbolikus párhuzamossági axiómával kiegészített rendszerének modelljeiben a párhuzamosok a nem metszők valódi részhalmazává válnak. A részleteket illetően lásd Tóth (1979), valamint Tóth (2000a: 23-4).

nézet ily módon megragadható álláspont-változatait összefoglalóan a *Standard Nézet*$_L$ névvel, és az SN_L rövidítéssel jelölhetjük. Az indexben szereplő „*L*” arra utal, hogy Lobacsevszkij a neki tulajdonított párhuzamosság-értelmezés, illetve a szokásos történeti bemutatások szerint a metsző és nem metsző egyeneseket elválasztó, határhelyzetű nem metsző egyeneseket nevezi párhuzamosnak (Kagan 1953: 122; Lobacsevszkj 1951: 43; Reichardt 1985: 165-6). Ha az *Appendix* első paragrafusának előbbi kivonata helyes, továbbá a Lobacsevszkij-féle párhuzamosok iménti körülírása is helytálló, akkor a hiperbolikus geometriában mindketten ugyanazokra a geometriai objektumokra használják a „párhuzamos” kifejezést vagy az adott nyelven neki megfeleltethetőt.

A nézet sajátos heterogenitása azokban az előbbi körülíráson túlmutató további, pontosító szándékú magyarázatokban bújik meg, amelyek a Bolyai-féle párhuzamosság iménti körülírását nemegyszer követik. Ezek azonban még mindig nem a végső, pontos jellemzések, hanem csak olyanok, amelyeket egyes esetekben még tovább szükséges helyesbíteni. A helyesbítés helyesbítésével végül is három eltérő leírási szint jön létre a tekintetben, hogy mi található a mű első paragrafusában. Az egyik jellegzetes, rendszerint második szintű leírás úgy fest, hogy Bolyai az először nem metsző (határhelyzetű) (fél)egyenest nem egyszerűen párhuzamosnak, hanem „aszimptotikus(an) párhuzamosnak”, vagy „aszimptotikus parallelának” nevezi. Az eltérés talán csekélynek tűnik (legalábbis aszerint, ahogyan a Standard Nézet kezeli), de semmiképp sem elhanyagolható. Ha azt képviseljük, hogy Bolyai a forgatás során először nem metsző (határhelyzetű) egyeneseket aszimptotikusan párhuzamosaknak nevezi, akkor elvben két eset lehetséges. Az egyik szerint a „párhuzamos” jelentheti ugyanazt, mint az „aszimptotikus” és fordítva. Ekkor azonban az egyik szó fölöslegesnek, az egész pedig szóhalmozásnak tűnik. Ez olyan, mintha azt mondanánk: Bolyai a forgatás során előálló, először nem metsző (határhelyzetű) egyeneseket aszimptotikus aszimptótáknak, vagy párhuzamosan párhuzamosaknak nevezi. Feltehőleg a Standard Nézet sem ezt akarja mondani, hanem sokkal inkább azt, hogy az „aszimptotikus” jelző tartalmas: azaz kiválaszt valamit. Ám ahhoz, hogy az „aszimptotikus” jelző valóban tartalmas, megkülönböztető jelzővé váljon, az is szükséges, hogy az abszolút geometriát a hiperbolikusra szűkítsük, és az abszolút geometria tárgyalásmódról áttérjünk a hiperbolikus geometriai tárgyalásmódra. Ezzel a feltétellel az „aszimptotikus párhuzamos” (Dávid 1944: 179), valamint az „aszimpotikus parallela”, a „legközelebbi parallela” és a „legközelebbi nem vágó (nem metsző)” (Dobó és Szénássy 1985: 44) egészükben és megfelelő részeikben akkor azonos jelentésűek, és akkor vonatkoznak ugyanazokra az egyenesekre, ha az „aszimptotikus” a párhuzamosok halmazának bizonyos, de nem minden elemét választja ki. Azaz: az egyenesek irányítását figyelembe véve az „aszimptotikus” a párhuzamosok halmazának egy bizonyos elemét, az irányítást figyelmen kívül hagyva pedig két elemét specifikálja (a végtelen sok nem metsző egyenes közül), méghozzá azt az egyet vagy kettőt, amely a másikhoz minden határon túl közeledik. Ekkor azonban, azaz a hiperbolikus geometrián belül, a párhuzamos egyenes az összes nem metsző egyenest jelenti, és az aszimptotikus(an) párhuzamos egyenes jelenti az először nem metsző egyenest. Így azonban minden párhuzamos egyenes egyben nem metsző egyenes is, és minden nem metsző egyenes egyben párhuzamos egyenes is.[31] Ebből következik, hogy itt a „párhuzamos” kifejezés jelentése: „nem metsző”; a „párhuzamos” és a „nem metsző” tetszőlegesen felcserélhető, azaz szinonim kifejezések”.[32] Bár igaz, hogy minden aszimptotikus párhuzamos nem metsző egyenes, ugyanakkor nyilvánvalóan nem igaz, hogy minden nem metsző egyenes egyben aszimptotikusan párhuzamos is. Egy ilyen párhuzamosság-felfogást kézenfekvőnek tekinthetnénk és könnyen meg tudnák magyarázni. Elég volna visszautalni a párhuzamosság korábban látott 23. euklideszi meghatározására, amely szerint a párhuzamos egyenesek nem metsző egyenesek. Így azt mondhatnánk, hogy az *Appendix* első paragrafusában értelmezett aszimptotikus párhuzamosság mögött valójában a párhuzamosság eredeti euklideszi definíciójának konzekvens érvényesítése rejlik. A dolgot úgy láthatnánk, mint amely azt tartja szem előtt, hogy mindhárom geometriában (a Bolyai-féle abszolút geometriában éppúgy, mint a hiperbolikus vagy az euklideszi geometriára történő szűkítés esetén) a párhuzamos egyenesek egyben nem metsző egyenesek is, és fordítva. Az ily módon megfogalmazható Bolyai-féle párhuzamosságot a P_{ASZIMP} jelöléssel (a párhuzamos, mint nem metsző, és az

[31] Az egyszerűség kedvéért nem teszem mindig hozzá, hogy adott síkban adott egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton keresztül húzott egyenesek és az eredeti egyenes viszonyáról van szó, de így értendő.

[32] A hiperbolikus geometriának van olyan szisztematikus tárgyalása, amelyben a párhuzamos egyenesek nem metsző egyenesek. Ha viszont a párhuzamosság ily módon kerül meghatározásra, akkor nem csak aszimptotikus, hanem divergens nem metszőkről, következésképp aszimptotikus és divergens párhuzamosokról is lehet beszélni, abban az értelemben persze, hogy ezeket a tulajdonságaikat bizonyítani kell (Trudeau 1987: 177-218). Trudeau eljárása azért figyelemre méltó, mert konzekvens a párhuzamos egyenesek nem metszőkként történő értelmezéséből következő terminológiai következmények nyomon követésében. Ezen kívül azért is említésre méltó, mert az így felfogott párhuzamosságot az euklidészi párhuzamossági fogalomnak (meghatározásnak) a hiperbolikus geometriába való direkt bevezetéseként, azaz közvetlen átvételeként (átmentéseként) tárgyalja. A korábbi fogalom *felosztatlanságára* és a hiperbolikus geometriában *ebből következő* megkülönböztetések szükségességére vonatkozó megjegyzéseivel (Trudeau 1987: 182), valamint az aszimpototikus és a divergens párhuzamosokkal kapcsolatos bánásmódjával a szokásos tárgyalásmódnál sokkal árnyaltabban kezeli az új geometria fogalmi problémáit, illetve jelzi a lehetséges további dilemmákat. George E. Martin felépítésében a párhuzamos egyenesek szintén nem metsző egyenesek (Martin 1975: 334). Úgy tűnik, egyáltalán nem kézenfekvő, még a hiperbolikus geometriában sem, hogy csupán a határhelyzetű nem metszőket tekintsék párhuzamosnak – láthatóan nem okoz nehézséget az összes nem metsző egyenest párhuzamosnak tekinteni és nevezni.

aszimptotikusan párhuzamos, mint először nem metsző) rövidítem. A bevett nézet azon változatait, amelyeket a most tárgyalt körülírás fedi le, a *Standard Nézet*$_B$ névvel és az SN_B rövidítéssel jelölöm, a „*B*" index segítségével emlékeztetvén arra, hogy az értelmezések azt sugallják: *valójában* ez a Bolyai-féle párhuzamosság-felfogás.

A helyzet azért kiváltképp bonyolult, mert a Standard Nézet az *Appendix* első szintű értelmezésekor rendszerint úgy tesz (vagy azt állítja), mintha a $P_{NEM\text{-}METSZŐ}$ változatnak megfelelő SN_L felfogást képviselné, ám ezt nemegyszer úgy pontosítja, hogy *valójában* az SN_B-nek megfelelő P_{ASZIMP} értelmezést hirdeti. Ráadásul olykor még ez utóbbit, vagy közvetlenül az első szintű értelmezést is tovább gyengíti azzal, hogy hozzáfűzi: az *Appendix* első paragrafusában persze csak aszimptótáról vagy aszimptotikus egyenesről van szó. Itt tehát legvégül éppen az marad kimondatlan, hogy a szóban forgó helyen szó sincs párhuzamosról vagy aszimptotikusan párhuzamosról. Az első paragrafus tartalmának ilyen kivonatát $P_{HIÁNY}$-nak nevezhetnénk, arra emlékeztetendő, hogy az idetartozó SN_H álláspontok legvégül, *igazán valójában* a párhuzamosság hiányát állítják – ám ezt csak kizárólag implicit módon teszik, azaz anélkül, hogy a „párhuzamos" kifejezés hiányát (az egyetlen Salló Ervint kivéve) kifejezetten szóvá tennék, illetve beismernék.

Most már érdemes az idézeteket az értelmezési és leírási szintek, valamint a mesterségesen elkülönített SN_L, SN_B és SN_H álláspontok szerint csoportosítva is áttekinteni. Az egyik csoportosítás (*2. táblázat*) azt mutatja meg, hogy a Standard Nézet egy-egy képviselője az értelmezés hány szintjén foglal állást a Bolyai-féle párhuzamosság, illetve az *Appendix* első paragrafusának dolgában. Ez egyrészt segít tetten érni az egyes személyes álláspontok belső feszültségeit, másrészt érthetővé teszi, hogy miért olyan nehéz világosan megfogalmazott álláspontról beszélni olykor még egy adott képviselő esetében is. Ha ugyanis egy-egy képviselő több értelmezést, és több, egymástól különböző részálláspontot is képvisel a Bolyai-féle párhuzamos dolgában, akkor persze legalább olyan nehéz, ha nem éppen lehetetlen az egyes személyes álláspontok közös nevezőjét megtalálni. A másik csoportosítás ennek a nehézségnek a kikerülését szolgálja. Itt az egyes személyes részálláspontok a Standard Nézet előbbiekben elkülönített álláspont-változatainak (SN_L, SN_B, SN_H) megfelelően kerültek csoportosításra (*3. táblázat*). A álláspontrendszer szövevényessége itt válik igazán tapinthatóvá. Az egyik figyelemre méltó jelenség, hogy SN_L-t Salló kivételével mindenki képviseli: még azok is, akik SN_L mellett SN_B-t is hirdetik, vagy hallgatólagosan SN_H-t is „állítják". SN_L tehát valóban az egymást kölcsönösen megerősítő álláspontok elsődleges, fő köre: az álláspont, amiben mindenki egyetért, és amelyen keresztül a megegyezés hallgatólagosan létrejön – annak ellenére, hogy egyesek ettől különböző alapállást is felvesznek.

A másik érdekes jelenség, hogy bizonyos képviselők (a tizenháromból összesen hatan) az SN_L-től különböző SN_B vagy SN_H álláspontváltozatokban is reprezentálhatók, négyen pedig mindháromban előfordulnak.

A Standard Nézet egészében véve tehát megengedhetetlenül sok dolgot állít a Bolyai-féle párhuzamosság első paragrafusbeli szerepével összefüggésben. Úgy tűnik, hogy az elfogadott nézetnek éppúgy jó, ha az első paragrafusban szó van a párhuzamosról, mint ahogy az is, ha történetesen nincs. A Bolyai-féle párhuzamos dolgában a Standard Nézet egésze lényegében cáfolhatatlan. Ám ez csak akkor van így, ha elfogadjuk, hogy a nézet $P_{NEM\text{-}METSZŐ}$-től kezdve P_{ASZIMP}-on keresztül $P_{HIÁNY}$-ig mindent állít(hat), és SN_L-től SN_B -n keresztül SN_H-ig mindent képvisel(het). Ha nem szeretnénk, hogy a cáfolhatatlanság egyszeriben érdemmé és a párhuzamosság első paragrafusbeli hiányának be nem ismerése pozitívummá váljon, akkor csak az elsődlegesen képviselt álláspont-változatot, SN_L-t, valamint a még többé-kevésbé felvállalt és kifejezett álláspont-változatot, SN_B-t tekinthetjük a Standard Nézetet alkotó pozitív magnak. Ez az álláspontmag pedig már tudományosan kérdőre vonható, kritizálható és alkalomadtán cáfolható.

2.táblázat. Képviselők és leírások

<table>
<tr><th rowspan="2">A Standard Nézet képviselőjének neve</th><th colspan="3">A Standard Nézet magyar nyelvterülethez tartozó képviselőinek a Bolyai-féle párhuzamossággal kapcsolatos értelmezései</th></tr>
<tr><th>1. szintű (közvetlen) leírás</th><th>2. szintű (helyesbítő) leírás</th><th>3. szintű (helyesbítő) leírás</th></tr>
<tr><td>Dávid Lajos</td><td>B. J. szemléletesen indokolja, hogy bármely A-ból indul ki egyetlenegy párhuzamos félegyenes. (Dávid 1944: 37).</td><td>Bolyai János épen[33] ezért a párhuzamos szó helyett aszimptotikus párhuzamost ír (Dávid 1944: 179),</td><td>s magát az ilyen egyenest aszimptotának is nevezi (Dávid 1944: 179).
* * *
B. J. aszimptotikus egyeneseket mond párhuzamosak helyett… (Dávid 1944: 40).</td></tr>
<tr><td>Dobó Andor</td><td>Bolyai János (…) az APPENDIX-ben a párhuzamos új, euklideszinél általánosabb fogalmát a következőképpen értelmezte:
Egy adott egyenesen kívül levő ponton át húzzunk egy másik, az előbbit metsző egyenest. Ebből a kiinduló helyzetből, a választott pont körül – mindvégig a közös síkban maradva – kezdjük el az egyenest az óramutató járásával ellentétes irányban forgatni. Ekkor szükségszerűen bekövetkezik egy olyan helyzet, amikor a forgatott egyenes legelőször nem metszi a rögzítve hagyottat. A pont körüli forgatás révén ilyen állásba került határegyenesről mondjuk azt, hogy párhuzamos a vele egy síkban levő másik egyenessel. (Dobó 1989: 49).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Dobó Andor – Szénássy Barna</td><td>Bolyai János az APPENDIX 1.§-ban (…) a párhuzamosok új, az euklideszinél általánosabb fogalmát a következőképpen értelmezi:
Egy adott egyenesen kívül lévő ponton keresztül húzzunk egy másik, az előbbit metsző egyenest. Ebből a kiinduló helyzetből, a választott pont körül – mindvégig a közös síkban maradva – kezdjük el az egyenest az óramutató járásával ellentétes irányban forgatni. Ekkor szükségszerűen bekövetkezik olyan helyzet, amikor a forgatott egyenes legelőször nem metszi a rögzítve hagyottat. Ilyen állásban a pont körül forgatott egyenesről azt mondjuk, hogy párhuzamos a vele egy síkban lévő másik egyenessel.</td><td>Bolyai visszaemlékezéseiből tudjuk (…). hogy Szász Károllyal folytatott eszmecseréik alkalmával a forgatás során „legelőször elpattanó” egyenest „legközelebbi paralelának” vagy „nem vágónak” nevezték. János többnyire az „aszimptotikus paralela”…</td><td>… vagy röviden „aszimptota” kifejezést használta. (Dobó-Szénássy 1985: 44).</td></tr>
</table>

[33] A helyesírási sajátosságokkal kapcsolatban lásd a 25. lábjegyzetet.

<table>
<tr><th rowspan="2">A Standard Nézet képviselőjének neve</th><th colspan="3">A Standard Nézet magyar nyelvterülethez tartozó képviselőinek a Bolyai-féle párhuzamossággal kapcsolatos értelmezései</th></tr>
<tr><th>1. szintű (közvetlen) leírás</th><th>2. szintű (helyesbítő) leírás</th><th>3. szintű (helyesbítő) leírás</th></tr>
<tr><td>Kálmán Attila</td><td>Bolyai János nem egyenesekre, hanem irányított félsugarakra értelmezi a párhuzamosságot. Ha rögzítjük az irányt, akkor (akárcsak Euklidésznél) Bolyai szerint is egy és csak egy párhuzamos létezik egy adott félsugárral egy hozzá nem illeszkedő ponton keresztül.(Kálmán 1989: 96).
* * *
Az első tíz paragrafusban igen gondosan tisztázza [t.i. Bolyai János az Appendixben – T.J.] a párhuzamosság fogalmát és tulajdonságait. (Kálmán 1989: 105).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Kárteszi Ferenc</td><td>Ebben a paragrafusban [1. paragrafus – T. J.] a párhuzamosságnak olyan értelmezését adja Bolyai, mely a maradék axiómarendszerrel összeegyeztethető. A párhuzamosságnak ez az értelmezése tágabb, mint az euklideszi, s az euklideszi értelmezést speciális eset gyanánt magában foglalja. (Kárteszi 1973: 124).

2. § Az előző paragrafusban adott értelmezés olyan, hogy a B pont, mint a <u>BN</u> félegyenes kezdőpontja, kitüntetett szerepet játszik benne. A jelen paragrafusban azt bizonyítja, hogy a párhuzamosság független attól, hol foglal helyet a B pont azon az egyenesen, melynek a <u>BN</u> az egyik félegyenese. (Kárteszi 1973: 124).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Kiss Elemér</td><td>A c merőlegest forgassuk a P pont körül az óramutató járásával ellenkező irányban. Az ilyen módon forgatott egyenes eleinte metszi az a egyenest, az elforgatott c egyenes valamely pillanatban először nem metszi a-t.
Két eset lehetséges.
Ez a pillanat éppen akkor következik be, amikor c egybeesik b-vel. Ez valósul meg az euklidészi geometriában.
Van azonban egy másik lehetőség is. Előfordulhat, s ezt a geometria többi axiómái megengedik, hogy már előbb bekövetkezik ez a pillanat, valamely PQ helyzetben. Ha ezt megengedjük, akkor szimmetria okokból P-n keresztül kell léteznie még egy ilyen tulajdonságú PQ’ egyenesnek is, ha c-t ellenkező irányba forgatjuk. Bolyai János a PQ és PQ’ egyeneseket nevezi a P-n keresztül a-hoz húzott párhuzamosaknak. (Kiss 1999: 28).</td><td></td><td></td></tr>
</table>

A Standard Nézet képviselőjének neve	A Standard Nézet magyar nyelvterülethez tartozó képviselőinek a Bolyai-féle párhuzamossággal kapcsolatos értelmezései		
	1. szintű (közvetlen) leírás	**2. szintű (helyesbítő) leírás**	**3. szintű (helyesbítő) leírás**
Sain Márton	Az első paragrafus a párhuzamosságot definiálja (…). Bolyai a párhuzamosságot a félegyenesekre mondta ki a következőképpen: Az $\underline{AM} \parallel \underline{BN}$, ha *d)* $\underline{AM}$ és $\underline{BN}$ az AB egyenes ugyanazon oldalán van, *e)* $\underline{AM}$-nek és $\underline{BN}$ –nek közös pontja nincs, és ha *f)* a β szögtartomány minden $\underline{BP}$ félegyenese metszi az $\underline{AM}$ félegyenest. (Sain 1986: 623-4).		
Salló Ervin	BOLYAI JÁNOS szimbolisztikája bonyolult kifejezéseket pótol. S ezt nemcsak a tömörség kedvéért teszi, hanem azért is, mert el akarja kerülni a szemléletességtől átitatott hagyományos terminológiát. Az „*Appendix*” mondanivalója a párhuzamosok problémája körül kristályosodik, mégis a „párhuzamos egyenes”, ill. „párhuzamos” kifejezést BOLYAI J. az „aszimptóta” szóval helyettesíti és ezt is csak egyszer használja (egy lábjegyzetben), a szövegben mindig $\vert\vert\vert$ jel fordul elő. (Salló 1974: 34-5).	S joggal, hiszen az „*Appendix*” 1. §-ában meghatározott „párhuzamosság” tisztán *logikai* jellegű és összeegyeztethetetlen a párhuzamosságnak szemléletünk által megszokott, euklideszi meghatározásával. (Salló 1974: 34-5).	
Simonyi Károly	Azt természetesnek kell tartanunk, hogy az Appendixet a párhuzamosság definíciójával kezdi [Bolyai János]: az első paragrafus és a hozzá tartozó ábra erről szól. Mint látjuk, Bolyai János nem egyenesekre, hanem irányított félsugarakra értelmezi a párhuzamosságot. Kissé másként fogalmazva: a *bn* irányított félegyenesről akkor mondjuk, hogy párhuzamos az *am* irányított félegyenessel, ha *bn* a félsugaraknak *b* körüli forgása közben előálló első olyan félegyenes, amely már nem metszi am-et. (Simonyi 2001: 34-5).		

A Standard Nézet képviselőjének neve	A Standard Nézet magyar nyelvterülethez tartozó képviselőinek a Bolyai-féle párhuzamossággal kapcsolatos értelmezései		
	1. szintű (közvetlen) értelmezés	**2. szintű (helyesbítő) értelmezés**	**3. szintű (helyesbítő) értelmezés**
Suták József	Vonjunk *B* pontból (…) egy oly BC egyenest, hogy az AM-et *C*-ben messe, ha ezután BC-t addig forgatjuk, mígnem az ABC és BAM szögek összege 2R nem lesz, akkor ezen forgatás közben BC-nek minden esetre e kell jutni oly BN helyzetbe, midőn már nem metszi AM-et, de a forgás bármely előbbi pillanatában még metszette; az ilyen BN sugarat *Bolyai*-féle értelemben *AM*-hez párhuzamosnak nevezzük s jelölésére Bolyaitól eltérőleg a szokásos BN ‖ AM jelet használjuk. *A párhuzamosság imént adott definicziójából következik, hogy* AM *sugárhoz minden B ponton keresztül egy, de csakis egy párhuzamost vonhatunk.* Azonban a párhuzamosság *Bolyai*-féle definicziója *a párhuzamos egyenesekhez már irányt is köt* (…). (Suták 1897: 75). * * * *A Bolyai-féle definiczió értelmében tehát az egyenesek csak egyik irányban lehetnek párhuzamosak.* (Suták 1897: 76).		
Tóth Imre	Bolyai meghatározása szerint, *a* és *b* egyenesek akkor párhuzamosak, amikor az *a* egyenes *legelőször* nem metszi a *b* egyenest, vagyis: az elpattanás helyzetében.” (Tóth 1953: 293).	Az így definiált párhuzamosokat Bolyai plasztikusan „*aszimptotikus*” egyeneseknek nevezi, és szimbolikusan az alábbi módon jelöli: a ||| b.’ (Tóth 1953: 293).	
Vekerdi László	Aki csak belepillantott az *Appendix*be, tudja, hogy (…) az *Appendix* legelső §-a azt mondja ki, hogy az *AM* félegyeneshez a sík bármely kívüle fekvő *B* pontjából csak egy *BN* párhuzamos félegyenes húzható. Végtelen sok olyan félegyenes van, amelyik *AM* felé hajlik, s mégsem metszi azt, de ezek közül párhuzamosnak Bolyai csak azt az egyet nevezi, amelyik legelőször nem metszi! Vekerdi (1994: 8-9).		

<table>
<tr><th rowspan="2">A Standard Nézet képviselőjének neve</th><th colspan="3">A Standard Nézet magyar nyelvterülethez tartozó képviselőinek a Bolyai-féle párhuzamossággal kapcsolatos értelmezései</th></tr>
<tr><th>1. szintű (közvetlen, összefoglaló) értelmezés</th><th>2. szintű (helyesbítő) értelmezés</th><th>3. szintű (helyesbítő) értelmezés</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Weszely Tibor</td><td>Az Appendix 43 paragrafust tartalmaz.

Az 1. §-ban a párhuzamosság értelmezését találjuk. Legyen AM a sík egy tetszőleges egyenese és B egy rajta kívül fekvő síkbeli pont, amelyből az AM-re a BA merőlegest bocsátjuk (). Ha a B-ből kiinduló BN félegyenes nem metszi az AM-et, de az ABN tartomány bármely más BP félegyenese metszi, akkor Bolyai az AM és BN egyeneseket párhuzamosaknak nevezi, mely viszonyt így jelöli: BN ||| AM. (Weszely 1981: 83-4).</td><td>„… ha azt az egyenest, melyet valamely B pontból egy másik egyenesnek egyik C pontján keresztül húzunk, és ezt az egyenest a két egyenes meghatározta síkban a B pont körül forgatni kezdjük, akkor a forgó egyenes, mely a másik egyenest egy ideig a C pontban metszi, attól egy bizonyos helyzetben – Szász kifejezésével élve – elpattan, és a BN helyzetben, ezt az egyenest ő [mármint Bolyai társa, Szász Károly – T.J.] a legközelebbi paralelának vagy nem vágónak nevezte.”

János ennek az egyenesnek [azaz: a legközelebbi paralelának vagy nem vágónak – T.J.] a megnevezésére az aszimptotikus paralela …(Weszely 1981: 65).</td><td>… vagy röviden aszimptota kifejezést használta. (Weszely 1981: 65).</td></tr>
<tr><td>Az Appendix 43 paragrafust tartalmaz. A szövegében használt jelmagyarázat után az 1.§-ban a párhuzamosság értelmezését találjuk. (…) [l]egyen az AM a sík egy tetszőleges egyenese és B egy rajta kívül fekvő pont, melyből az AM-re a BA merőlegest bocsátjuk (…). A párhuzamosság újszerű értelmezése miatt Bolyai irányított egyeneseket használ. Emiatt a B ponton átmenő BN egyenesek helyett annak B kezdőpontú $\underline{BN}$ félegyenesével dolgozik. Ha a B-ből kiinduló $\underline{BN}$ félegyenes nem metszi $\underline{AM}$ félegyenest, de az ABN szögtartomány minden $\underline{BQ}$ félegyenese metszi $\underline{AM}$-et, akkor Bolyai az AM és BN egyeneseket párhuzamosaknak nevezi, mely viszonyt így jelöli: BN ||| AM. (Weszely 2002: 77).</td><td></td><td></td></tr>
</table>

3. **táblázat.** *Képviselők és álláspontváltozatok I.*

A Standard Nézet magyar nyelvterülethez tartozó képviselőinek a Bolyai-féle a Bolyai-féle párhuzamossággal kapcsolatos álláspontváltozatai (A ' #' jelek és a számok az előző táblázat értelmezési szintjeit jelentik.)		
SN_L ($P_{NEM\text{-}METSZŐ}$) **ÁLLÁSPONT**	***SN_B (P_{ASZIMP})*** **ÁLLÁSPONT**	***SN_H ($P_{HIÁNY}$)*** **ÁLLÁSPONT (IMPLICIT)**
Az először nem metsző (fél)egyenes: párhuzamos.	**Az először nem metsző (fél)egyenes: aszimptotikus párhuzamos.**	**Az először nem metsző (fél)egyenes: aszimptota vagy aszimptotikus (fél)egyenes.**
DÁVID #1	**DÁVID #2**	**DÁVID #3**
DOBÓ #1		
DOBÓ-SZÉNÁSSY #1	**DOBÓ-SZÉNÁSSY #2**	**(DOBÓ-SZÉNÁSSY #3)**
KÁLMÁN #1		
KÁRTESZI #1		
KISS #1		
SAIN #1		
SALLÓ #2		**SALLÓ #1**
SIMONYI #1		
SUTÁK #1		
TÓTH #1		**TÓTH #2**
VEKERDI #1		
WESZELY #1	**WESZELY #2**	**WESZELY #3**

3.4 A Standard Nézet nemzetközi vetülete

A Standard Nézet kialakításában és fenntartásában az idegen nyelvű szakirodalom is részt vesz. Az itt helyet kapó szerzők és vélemények alkotják a Standarnd Nézet nemzetközi vetületét: Bonola, Boyer, Fauvel, Gray, Frankland, Greenberg, Houzel, Kagan, Kline, Rosenfeld, Torretti.[34] Tulajdonképpen nem is kell csodálkoznunk azon, hogy nem képviselnek a magyar nyelvű kutatási centrumban kialakított és jóváhagyott felfogástól lényegesen eltérő álláspontot. Ez a források nehézkes nyelvi hozzáférhetősége miatt csak nehezen volna elképzelhető. Az *Appendix* beható tanulmányozása persze nem kívánja meg a magyar nyelv ismeretét. A baj az, hogy a matematikatörténeti munkák nem az eredeti művet veszik alapul, hanem a fordításokat, legtöbbször George Bruce Halsted angol fordítását. Ez a fordítások esetleges hibáira történő rámutatás és elemzés nélkül is vitathatónak értékelhető: a rendelkezésre álló elsődleges forrás felváltása és fordításával helyettesítése – nos ez filológiailag nem igazolható. Halsted fordításának elterjedtségéhez nagymértékben hozzájárult, hogy Roberto Bonola műve angol nyelvű fordításának (Bonola 1955) függelékeként könnyen hozzáférhetővé vált; Bonola munkája pedig mind a mai napig alapműnek, elrugaszkodási pontnak számít. Így aztán a Standard Nézet nemzetközi vetületét Halsted fordítása lényegében meghatározza. Akik ezzel a fordítással dolgoznak (Gray, Rosenfeld, Torretti) – és ezt az irodalomjegyzékek nyilvánvalóan elárulják (Gray 1979b: 219; Fauvel és Gray 1987: 616; Rosenfeld 1988: 431; Torretti 1978: 381) –, azok azt képviselik, ami a Halsted-féle átültetésből levezethető (*18.F* és *19.F ábra*).[35] Mivel pedig a fordítás a Standard Nézet SN_L változatával van összhangban, ezért a bevett nézet nemzetközi vetülete is döntően az SN_L változatnak megfelelő értelmezést teszi magáévá (*4. táblázat*). Ez vagy közvetlenül a Bolyai-féle párhuzamossággal, illetve a mű első paragrafusával kapcsolatos megnyilatkozásaikból derül ki, vagy abból vezethető le, hogy azt állítják: Bolyai és Lobacsevszkij, sőt Gauss is „lényegében azonos módon” definiálták a hiperbolikus párhuzamosságot. Ha a korábbiaknak megfelelően elfogadjuk, hogy Lobacsevszkij a metsző és nem metsző egyeneseket elválasztó határhelyzetű (fél)egyeneseket nevezi párhuzamosnak, akkor a „lényegében azonos módon való meghatározás” a finom különbségeket és

---

[34] A Bolyaiak munkásságát, illetve a nem-euklideszi geometria történetét tárgyaló szerzők és munkák listája természetesen terjedelmesebb ennél. Számosan azért nem szerepelnek, mert a vizsgált kérdésben, jelesül az *Appendix* első paragrafusának, illetve Bolyai-féle párhuzamosságnak a kérdését nem érintő áttekintéseket adnak (Kulczycki 1961: 54-6; Sommerville 1958: 14-5, 20-4; Stillwell: 1989: 259-60, 271-4;) .

[35] Houzel nem az angol, hanem Hoüel-féle francia fordításra hivatkozik. Ez mit sem javít a helyzeten, hiszen éppúgy hibás, mint az angol. Lásd a *21.F* és a *22.F* ábrákat. Az *„F”* kiterjesztéssel ellátott számozású ábrák (pld. *1.F ábra*) az értekezés függelékben találhatók.

jelentőségüket világosan tisztázó részletek hiányában úgy értelmezhető, hogy itt is a $P_{NEM\text{-}METSZŐ}$ párhuzamosság-értelmezésről, illetve a neki megfelelő SN_L álláspontról van szó. Ezek után lássuk az egyes képviselőket és az álláspontokat részletesen is.

Bonola három álláspontja sorban (Bonola#1, Bonola#2 és Bonola #3-al jelölve őket): Bolyai a forgatás során előálló először nem metszőt aszimptotikus parallelnek (Bonola 1955: 97), vagy aszimptotának nevezte (uo.), azonban Bonola a mű első részét tekinti a párhuzamosok definíciójának (Bonola 1955: 101) – ez utóbbiból pedig az következik, hogy szerinte a Bolyai-féle párhuzamos az először nem nem metszőt egyenes.

Carl Boyer álláspontja ez ügyben nem teljesen egyértelmű. Minthogy szerinte Bolyai az összes síkbeli nem metsző egyenest tekinti párhuzamosnak, ezért leginkább az SN_B álláspont alá sorolható be:

> The son, not dissuaded, continued his efforts until in about 1829 he came to the conclusion reached only a few years before by Lobachevsky. Instead of attempting to prove the impossible, he developed what he called 'Absolute Science of Space', starting from the assumption that through a point not on a line infinitely many lines can be drawn in the plane, each parallel to the given line. (Boyer 1968: 587).

John Fauvel és Jeremy Gray matematikatörténeti szöveggyűjteményükben (Fauvel és Gray 1987: 528) Halsted angol fordítását veszik át Bonolatól (Bonola 1955-ből) – eszerint pedig a mű első paragrafusa a „parallel" kontextuális definíciójaként fogható fel, és itt, mármint a fordításban, Bolyai valóban „parallel"-nek nevezi a forgatás során előálló első nem metsző egyenest:[36]

> If the ray *AM* is not cut by the ray *BN*, situated in the same plane, but is cut by every ray *BP* comprised in the angle *ABN*, we will call ray BN *parallel* to ray *AM*; this is designated by *BN* || *AM*. (Fauvel és Gray 1987: 528).

Gray legfrissebb, kifejezetten Bolyai János felfedezése bemutatásának szentelt munkájában azonban két álláspontot is magáévá tesz. Az első (Gray #1):

> While in the army, his interests had turned to the parallel postulate, doubtless because of his father. In Vienna he had fallen in with Carl Szász, who suggested to him that the line through a

[36] Jeremy Gray mértékadó munkája (Gray 1979b) ez ügyben nem explicit és nem is lehet pontosan kihámozni állásfoglalását. Mindazonáltal úgy kezeli a dolgot, hogy Bolyai és Lobacsevszkij ugyanúgy definiálja a párhuzamosságot. Ezen kívül itt is a Halsted-féle fordítással hivatkozik Bolyai művére, azzal a különbséggel, hogy itt Bonola könyvének 1912-es kiadásához utalja az olvasót (Gray 1979b: 96-8).

> point *P* parallel to a line *m* might be considered as the limiting position, a", of a line *a* through *P* as it rotates. It has the property of being the first line such that every line below it meets the line *m*. Bolyai later called it an asypmtotic parallel. (Gray 2004: 50).

Az *Appendix* első paragrafusának bemutatása azonban a következőképpen néz ki (Gray #2):

> He [Bolyai – T. J.] began by defining parallels in the way Carl Szász suggested.
>
> If lines *AM* and *BN* lie in the same plane and *AM* is not cut by *BN*, but every line in the angle *ABN* cuts *AM* then Bolyai said the line *BN* is parallel to the line AM. There is only one line through the point *B* parallel to *AM* the right, and there is another in the other direction. (Gray 2004: 55-6).

William Frankland a mű első paragrafusában szereplő először nem metszővel összefüggésben állítja – forráshivatkozása szerint az eredeti latin mű alapján (Frankland 1910: 39) –, hogy Bolyai ezeket nevezi párhuzamosnak:

> Starting from the strict definition of a parallel as the limiting position of a secant, Bolyai proceeded to solid geometry, and deduced the existence of *L*-lines and *F*-surfaces (called by Lobachewsky *horocycles* nad *horospheres*), which are the limiting forms of circles and spheres of infinite radius in hyperbolic space. (Frankland 1910: 40).

Bár Marvin Jay Greenberg eltér a szokásos terminológiától, amikor a „hiperbolikus párhuzamosságot" a „nem metszéssel" (nem pedig a „határhelyzetű nem metszéssel") azonosítja (Greenberg 1980: 159), továbbá Bolyainak a határpárhuzamosságot, illetve a „határpárhuzamos" („limiting parallel") kifejezést tulajdonítja (Greenberg 1980: 157), ám mindez nem elég ahhoz, hogy ne tekinthessük a bevett nézet képviselőjének.

Christian Houzel szintén a Lobacsevszkij-féle értelmezéssel való hasonlóságot hirdetők táborához tartozik. A mű 7. és 10. paragrafusára vonatkozó megjegyzéseiből az következtethető ki, hogy a mű első paragrafusát tekinti a Bolyai-féle párhuzamosság értelmezésének, és az ott szereplő határhelyzetű egyenest tekinti a Bolyai-féle értelemben párhuzamosnak:

> The definition of parallels and the first propositions concerning them in Bolyai's paper are almost the same as in Gauss' fragments; they are established by similar methods, principally based on the use of *Pasch axiom*. In addition Bolyai proves the transitivity of the parallelism for straight lines not in the same plane, but in 3-dimensional space (§7), and the same property for corresponding points on parallel lines (§10). (Houzel 1992: 9).

Morris Kline pedig azért alapozza kizárólag Lobacsevszkij művére a párhuzamosság ismertetését, mert „lényegében mindhárman [Gauss, Lobacsevszkij és Bolyai – T.J.] ugyanarra jutottak" (Kline 1980: 82).

Rosenfeld adja az *Appendix* egyik legkimerítőbb bemutatását és legfinomabb jellemzését. Ő is csatlakozik azonban ahhoz a felfogáshoz, hogy a mű a párhuzamosok (általunk kontextuálisnak nevezhető) meghatározásával kezdődik. Az általa adott idézet pedig szó szerint tartalmazza a „parallel" kifejezést (Rosenfeld 1988: 213).

Roberto Torretti a határhelyzetű első nem-metszőről állítja, hogy az „irányítást figyelembe véve párhuzamos (parallel) az adott egyenessel", továbbá, hogy „Gauss, Bolyai és Lobacsevszkij egymástól függetlenül a párhuzamosság [parallelism] lényegében azonos definícióit fogadták el" (Torretti 1978: 56-7).[37]

Kagan szintén a hasonlóság hangsúlyozásával kezdi (Kagan #1-es álláspontja):

„Lényegében természetesen ugyanígy [azaz mint Lobacsevszkij – T. J.] határozza meg a párhuzamost Gauss és Bolyai is; mégis meghatározásuk matematikai beállítása más." (Kagan 1953: 122):

A folytatás azonban zavarbaejtő:

> Ha a meghatározás ez utóbbi alakját tekintjük, nehéz megmondani, kinek a szövege – Bolyaié, vagy Gaussé – egyezik meg vele [mármint Lobacsevszkijéval – T.J.], mert a két szerző meghatározásai nemcsak tartalmukban, hanem megfogalmazásukban is teljesen megegyeznek; még a sugarak jelölésére használt betűk is azonosak. Bolyainál [Lobacsevszkijjel összevetve] a meghatározás szövege külsőleg valamivel rövidebb, mert szimbolikája folytán az elnevezések kifejtését szimbólumokkal cseréli fel, és még a „párhuzamos sugár'' (az ő terminológiája szerint „aszimptotikus sugár'') szavakat is kerüli és a CF ||| BA jelöléssel helyettesíti. (Kagan 1953: 122).

Azaz: egyfelől milyen csodálatos, hogy még az ábrák betűi is azonosak, másfelől még az a tartalmi különbség is elhanyagolható – vagy belefér a párhuzamosság „lényegében azonos" meghatározásába –, hogy Bolyai egyáltalán nem használja a párhuzamos kifejezést ott, ahol Lobacsevszkij igen! (Kagan #2-es álláspontja.)

Végezetül ismét érdemes áttekinteni, hogy a Standard Nézet nemzetközi képviselőinek megnyilatkozásai hogyan sorolhatók be a megfelelő álláspontváltozatokba (*4. táblázat*).

---

[37] Azért, hogy az Olvasó összevethesse ezeket a csekély különbségeket, mi máshoz is utalhatna bennünket Torretti könyvének lábjegyzetében, mint Halstednek a Bonola-féle műben közölt *fordításához*. (Torretti 1978: 56-7).

4. táblázat. *Képviselők és álláspontváltozatok II.*

A Standard Nézetnek az *Appendix* első paragrafusával illetve a Bolyai-féle párhuzamossággal kapcsolatos álláspontváltozatai (A ' #' jelek és a számok az előbbiek szerinti értelmezési szinteket jelentik azok esetében, akiknél egynél több van.)		
SN_L ($P_{NEM\text{-}METSZŐ}$) **ÁLLÁSPONT**	***SN_B (P_{ASZIMP})*** **ÁLLÁSPONT**	***SN_H ($P_{HIÁNY}$)*** **ÁLLÁSPONT (IMPLICIT)**
Az első nem metsző (fél)egyenes: párhuzamos.	**Az első nem metsző (fél)egyenes: aszimptotikus párhuzamos.**	**Az első nem metsző (fél)egyenes: aszimptota vagy aszimptotikus (fél)egyenes.**
BONOLA #3	**BONOLA #1**	**BONOLA #2**
	BOYER	
FAUVEL ÉS GRAY		
GRAY #2	**GRAY #1**	
FRANKLAND		
	GREENBERG	
HOUZEL		
KLINE		
ROSENFELD		
TORRETTI		
KAGAN #1		**KAGAN #2**

3.5 A Standard Nézet összegzése

Az értekezés következő szakaszában kísérletet fogok tenni a Standard Nézet globális cáfolatára, azaz a nézet által magába foglalt és felvállalt összes kijelentést egyszerre kívánom megcáfolni az alább megadott feltételek szerint. A felvállaltan képviselt megfogalmazások, kategorizációmat figyelembe véve, az SN_L vagy az SN_B álláspontok valamelyikébe sorolható megnyilatkozásokat jelentik. Az egy füst alatt cáfolhatósághoz egy olyan méltányos értelmezésre van szükségünk, amely a két elkülönített álláspontváltozatot a fontos vonatkozásokban egyaránt felöleli. Meg kell tehát adnunk egy olyan feltételhalmazt, amely mindkét változat (SN_L és SN_B) jóindulatú értelmezésének tekinthető és mindkettő számára szükséges feltételeket foglal magában.

Első lépésben azt mondhatjuk, hogy a Standard Nézet SN_L és SN_B változata azt állítja, hogy:

(1) az *Appendix* első paragrafusában

(2) nem más, hanem maga Bolyai János az, aki

(3a) a párhuzamosságot

(3b) vagy az aszimptotikus párhuzamosságot

(4a) értelmezi/definiálja,

(4b) vagy, Euklidészhez képest, újraértelmezi/újradefiniálja.

SN_L és SN_B között aszerint tehetünk különbséget, hogy a mű első paragrafusában szereplő, és a forgatás során előálló, először nem metsző (határhelyzetű) (fél)egyenesekkel összefüggésben Bolyai *(3a)* a párhuzamosságot, vagy *(3b)* az aszimptotikus párhuzamosságot értelmezi/definiálja, azaz, hogy az ilyen (fél)egyeneseket *(3a)* párhuzamosaknak, vagy *(3b)* aszimptotikusan párhuzamosaknak nevezi.

Látható, hogy a legfontosabb feladat a (3) és (4) feltételekből fakadó közös nevező megtalálása, jóllehet fontos hangsúlyozni – ez történik a (2) feltételben –, hogy nem a Standard Nézet képviselőinek párhuzamosság-felfogásáról van szó. Egyrészt a megfogalmazások is arról tanúskodnak, bár nem mindig elég világosak ez ügyben, hogy itt voltaképpen az a kérdés: Bolyai mit tekint párhuzamosnak (netalán aszimptotikusan párhuzamosnak), és nem arról, hogy az egyes képviselők mit tekintenek annak. Nem az a kérdés ugyanis, hogy a képviselők (modern nem-euklideszi vagy hiperbolikus geometriai) párhuzamosság-fogalma szerint tekinthető-e a párhuzamosság értelmezésének az *Appendix* első paragrafusa.

A (3)-ból és (4)-ből következő minimális feltétel az, hogy a mű első paragrafusában explicit módon megjelenjék a „párhuzamos” kifejezés – vagy: a mű nyelvének figyelembe vételével a

„párhuzamosnak” megfeleltethető terminus. Egyszerűbben: Bolyai Jánosnak a „párhuzamos” terminust – vagy a neki világos szempontok szerint megfeleltethető kifejezést – az inkriminált helyen *egyértelműen és világosan használnia kell*. Ennek a cáfolata, azaz annak megmutatása, hogy Bolyai az mű első paragrafusában egyáltalán nem használja a „párhuzamos” terminust, valóban egyszerre állítja igen komoly nehézség elé mindkét rekonsruált álláspontot (és az alájuk tartozó összes változat), tekintet nélkül az egyes vélemények további különbségeire.

Úgy vélem, hogy az iménti követelményeket komolyan kell vennünk. Nincs ugyanis olyan definíció-fogalom, legyen szó akár explicit, akár implicit definícióról, ezeken belül pedig akár bevezető (más megnevezésben nominális, konvencionális, stipulatív), vagy pontosító (explikatív), netalán lexikográfiai vagy kontextuális típusú meghatározás, vagy az értelmezés bármely más fogalmáról, amely ne követelné meg a definiálandó kifejezés explicit megjelenését (azaz szó szerinti használatát) a definiálás célját szolgáló szövegrészben.[38]

[38] A definíció típusaival kapcsolatban lásd Hempel (1993), valamint Margitay (2004: 379-84). A definíciók különböző fajtáinak az analiticitás, a szinonimitás (jelentésazonosság) és a kapcsolt problémák megoldásában betöltött szerepének vitatását illetően lásd Quine dolgozatát (1999: 134-6). A quine-i érvelésnek a konvencionális (bevezető, stipulatív) definíciók javára tett engedményből – a konvencionális definíció nem támaszkodik korábbi szinonimitásokra, és ráadásul képes létrehozni azt (Quine 1999: 136) – kibonatkozó kritikát illetően lásd (Grice és Strawson 1971: 122). Tanács (2002a)-ban amellett szálltam síkra, hogy az ellenérvek szem elől tévesztik Quine problémáját, illetve ellenvetéseinek lényegét. Ez úgy összegezhető, hogy még a konvencionálisan definíció révén bevezetett kifejezés definíciójának státusza sem állítható helyre a nyelvi viselkedés és a nyelven kívüli világhoz való kapcsolatának megfigyelése révén. A bevezetési aktust követően a kifejezés használatának megfigyeléséből a definíció csak, legjobb esetben lexikográfiaiként azonosítható. A különböző definíciófajták közötti bonyolult szemantikai viszonyok tisztázása, szemantikai-episztemológiai megkülönböztethetőségük indokoltsága a vizsgálódás aktuális szintjén nem központi jelentőségű. Ugyanakkor az előtérben álló probléma, a Bolyai-féle, illetve a nem-euklideszi geometria párhuzamosság-fogalma kapcsán hamar felbukkan. Ekkor ugyanis egy adott definíciótípus kitüntetése arra csábíthat, hogy a történeti értelemben vett euklideszi geometria fogalmi rendszeréből a nem-euklideszi geometria fogalmi rendszerébe vezető átmenet szemantikailag triviálisként legyen látható. Tanács (2002a)-ban a konvencionális (bevezető, stipulatív) valamint az explikatív, illetve lexikográfiai definíciók megkülönböztetése szemantikai-episztemológiai indokoltságának (Grice és Strawson által felvetett) kérdését vizsgáltam, különös tekintettel a konvencionális definíciók határozatlanná válásának azon jelenségére, amikor a definiáló (alap)fogalmak új, további, addig ismeretlen interpretációkra tesznek szert. Erre történetileg a legjobb példa éppen a történeti értelemben vett euklideszi geometria kontextusa mellett megjelenő Bolyai-féle abszolút és hiperbolikus geometria kontextusa. Valójában azt kellene, és azt lenne érdemes egy alapos elemzésben megmutatni, hogy ez a probléma nemcsak a történeti értelemben vett geometriák közötti átmenetben jelentkezik, hanem a modern logikai-matematikai értelemben vett geometriák közötti átmenetben is. Ez egyrészt azt mutatná, hogy a történetileg releváns probléma nem oldódik, nem oldható fel teljesen a modern tárgyalásmódban, legfeljebb első ránézésre nem nyilvánvaló. Ez egyúttal azt is megmagyarázná, hogy a történeti folyamat szükségszerűen realizálta a modern tárgyalásmódban is lappangó problémát.

A Standard Nézet cáfolata – az elveszett „paralella”

4.1 Előkészületek — a „párhuzamos” szó nyomonkövetése

A Standard Nézet ilyen hosszadalmas, részletekbe menő és esetleg szükségtelenül körülményeskedőnek tűnő ismertetését, majd körmönfontnak ható rekonstrukcióját – az eddig látott belső problémákon és az ebből fakadó bonyodalmakon kívül – a következő indokolja. Az első, általam bizonyítandó, majd védendő tézis egy negatív egzisztenciális állítás lesz. Közismert, hogy empirikusan lehetetlen valaminek a nemlétezését bizonyítani, vagy legalábbis jóval nehezebb, mint valaminek a létezését demonstrálni. Negatív egzisztenciális állítás empirikus bizonyítására csak akkor van egyáltalán esély, ha a vizsgálandó valóságdarab véges, jól körülhatárolható, továbbá, ha az empirikus azonosítás szempontjai is világosan megfogalmazottak és egyértelműek. Még ebben az esetben is igaz, hogy a nemlétezés bizonyítását csak az adott feltételekkel az adott valóságdarabra vonatkoztatva tekinthetjük befejezettnek. Ez mindenesetre óvatosságra int. Nos, ezen megfontolások szem előtt tartásával azt állítom, hogy Bolyai az *Appendix* első paragrafusában nem használja a „párhuzamos” vagy „aszimptotikus párhuzamos” kifejezést. Ergo: az inkriminált passzus nem tekinthető sem a „párhuzamosság” (esetleg: „párhuzamos egyenesek”), sem az „aszimptotikus párhuzamosság” (esetleg: „aszimptotikusan párhuzamos egyenesek”) meghatározásának vagy értelmezésének.

Még mindig nem tartunk azonban ott, hogy szemünket csak úgy egyszerűen a mű megfelelő passzusára vessük, majd az első paragrafust átfésülve eldöntsük, hogy tartható-e Standard Nézet vagy sem. Még mindig tisztázásra szorul, hogy mit is keresünk valójában: mi is az a terminus pontosan és milyen alakot ölthet, amelyet felbukkanni várhatunk? Világos ugyanis, hogy a keresett kifejezés nem lehet az eddig többnyire „párhuzamosként” említett kifejezés. Az óvatosság oka, hogy az *Appendix* nem magyarul, hanem latinul íródott — így a „párhuzamos” szóra, mint magyar kifejezésre nem számíthatunk. Amikor ugyanis a Bolyai-féle értelemben vett párhuzamosokról vagy a „párhuzamosság” Bolyai-féle értelmezéséről, meghatározásáról beszéltünk, akkor valójában mindvégig *arról* a kifejezésről kívántunk beszélni, amelynek a „párhuzamos” világos szempontok szerint megfeleltethető. A keresett kifejezéshez két irányból érdemes közelíteni. Az egyik szerint időben visszafelé haladva a mű keletkezésekor fennálló nyelvi körülményekig, míg a másik szerint a matematikai nyelvtörténeti előzmények felől a mű keletkezéséig. Az első szempont szerint azt kell kutatnunk, hogy a mű keletkezési idejét figyelembe véve a „párhuzamos” kifejezés melyik szóhoz vezet vissza? Ez a nézőpont azt teszi nyilvánvalóvá, hogy amikor a „párhuzamos” kifejezéssel fogalmazzuk meg a kérdést, akkor már egy igen komoly értelmezési lépést tettünk időben előrefele, amelyet most filológiailag visszafelé is meg kell tennünk. Az így kapott eredmény független megerősítésére szolgál a matematikai nyelvtörténeti előzmények felől történő másik irányú megközelítés. A dolog akkor van rendben, ha mindkét módon ugyanazt a kifejezést kapjuk.

Az első kérdés, abból kiindulva, hogy az *Appendix* latin nyelvű, a forráskifejezés tekintetében könnyen megválaszolható. A „párhuzamos” a magyar nyelvújítás forrongó korának terméke, amely csupán egy, de nem az egyetlen a latin eredetű „parallel” szó magyar matematikai műszóval történő helyettesítésére tett számos javaslat közül.[39] Az alábbi lista a „parallelus”, „parallel” terminusokra benyújtott nyelvújítási javaslatokat vonultatja fel, feltüntetve egyúttal a javaslatot tartalmazó mű megjelenésének évszámát és a kifejezéseket megalkotó személyt is:

mellékes (Apáczai Csere János, 1653),
egy köz arányu, egy arányos közü (Molnár, 1777),
egyarányozatu, menetelü párvonás (Benyák, 1786),
egyközü (Dugonics András, 1784),
párhuzamos (Pethe, 1812),
egyenközü (Kerekes, 1827),
egyforma-közü (Kereky, 1835),
egyenirányu, hasonirányu, hasonközü, parallel (Nagy, 1838),

[39] Ezt a rendkívüli intenzitást Tolcsvay azzal magyarázza, hogy a magyar nyelvújítás (sztenderdizáció) 1770-es évektől az 1840-es évek végéig tartó időszakában mind a négy nyelvtervezési probléma és a hozzákapcsolódó tevékenyég (szelekció, stabilitás, kibővítés, differenciáció, illetve politikai döntések, kodifikáció, kidolgozás, művelés) egy időben jelentkezett Tolcsvay 2004: 20-2).

közegyenes (Tarczy, 1841).[40]

Jelen esetben persze a „párhuzamos" visszavezetése a „parallelára" vagy „parallelre" kézenfekvő és nem igényel különösebb etimológiai kutatómunkát. Ám ez csak azért van így, mert a többi javaslattal szemben ugyan a „párhuzamos" megnyerte versenyt, ám, mint látható, a „parallel" terminus a hétköznapi emlékezet számára sem veszett a feledés homályába, hanem túlélte a felváltásáért folytatott küzdelmet. Ily módon a két kifejezés között fennálló szinonimitási és származási viszony is fennmaradt és öröklödött. Ebből az irányból megnyugtatóan lezárhatjuk a visszakövetést, és leszögezhetjük, hogy a „parallel" kifejezést keressük.

Mielőtt áttérnénk a másik nézőpont szerinti vizsgálatra, érdemes az előbbi nyelvújítási lista fényében eltűnődnünk, hogy miért indokolt az előbbi visszavezetés körültekintősége.

Most a kérdést úgy tehetjük fel, hogy Bolyai vajon mit használna azon szó helyett, amely helyett mi a „párhuzamos" kifejezést használjuk? Azaz, másként: Bolyai János vajon milyen nyelvújítási terminust használna a „parallel" helyett (feltéve persze, hogy a helyettesítő kifejezés egyáltalán rekonstruálható valahogy)? Egyáltalán nem nyilvánvaló ugyanis, hogy olyan magyar nyelvújítási kifejezést használna a „parallel" helyett, amely mindenhova behelyettesíthető, ahol mi az *Appendix*-szel kapcsolatban a „párhuzamos"-t alkalmazzuk. Korántsem kézenfekvő tudniillik, hogy az ugyanannak a latin szónak a felváltására született magyar nyelvújítási kifejezések egymással tetszőleges módon felcserélhetők volnának minden kontextusban és ellentmondás nélkül. Képzeljük el azt a szituációt, hogy „párhuzamos"-sal szemben egy másik, eredetileg szintén versenyben lévő nyelvújítási kifejezés, mondjuk az „egyenközű" nyer a „parallel" utódlásáért folytatott küzdelemben. Ebben az esetben, bár számunkra szintén a „parallel" utódja volna, bizonyosan nem alkalmazhatnánk az *Appendix* első paragrafusában szereplő először nem metsző, a hiperbolikus geometriában

---

[40] Keresztesi (1935: 144) alapján. A nyelvújítás szóalkotási módozataivla és elveivel kapcsolatban lásd Tolcsvay (2004: 28-32). Bolyai Farkas a larin Tentamen 2. kötetéhez csatolt *Egy kis toldalék és jelentés* című függelékében a magyar matematikai műszavak megalkotásával kapcsolatban a következő elveket fogalmazta meg: „A' tiszta Mathesisi műszókra nézve is, mellyeknek egy részével az *Arithmetika' Elejiben M.Vásárhelyt* 1830 óta éltem, (...) [a]zoknak formálásában ezen három fő régulám vólt: a) hogy a' mennyiben lehet rövidek, a' nyelv' természetéből folyók, legalább azzal nem ellenkezők, könnyen megszokhatók, 'a tudványba való igaz bélátással a dolog természetére mutatók legyenek. b) hogy azonegy szó ne tegyen külömbözőket; 's hogy egyebet jelentsen, egy kis helyes változtatás engedtessék meg c) hogy a' mellyeket okvetlen szükséges megkülömböztetni, azoknak külön (ha lehet más atyafiasból formált) név adattassék. A' mi az elsőt illeti: világos, hogy a' kezdő annál nehezebben érti a' dolgot meg, minél külömbözőbb a' szónak tulajdon értelme a' tudványitól, 's annál könnyebben érti meg, minél inkább magára a' dologra mutat. … Engedtessék azért meg, Hazánk 's Nemzetünk nevében ! az a kérés: hogy' a' mathesisi műszók adásában egyik fő tzél légyen, hogy azok a' mennyire lehet tudványi bélátással, a' kifejezendő dologra mutassanak." Bolyai (1904/2: 405).

aszimptotikussá is váló egyenesekre. Miről kellene ekkor a Bolyai-féle párhuzamosok helyett beszélnünk? Azt nem mondhatnánk, hogy az *Appendix* első paragrafusában a Bolyai-féle értelemben vett egyenközűekről van szó, ez ugyanis az „egyenközű" szokásos értelmében véve lehetetlenné tenné, hogy az első paragrafust abszolút tárgyalásmódúnak lássuk, a hiperbolikus geometriára történő szűkítést pedig kizárná vagy explicit fogalmi ellentmondásra vezetőnek mutatná. Úgy tűnik, csupán rendkívüli szerencsénknek tudható be, hogy a fogalmilag valamiképpen tágabb „párhuzamos" lett a nyelvújítási küzdelem nyertese, és nem a szűkebb „egyenközű". Ez az, ami egyáltalán lehetővé teszi számunkra, hogy olyan könnyedén használhassuk a „parallelt" felváltó „párhuzamos" szót az *Appendix* első paragrafusában szereplő először nem metsző, és a hiperbolikus geometriában aszimptotikusakká váló egyenesekre. Az óvatosság tehát indokolt: a látszattal szemben nem kézenfekvő és nem is fölösleges visszavezetésről van szó. Éppen ezért az sem árt, ha szemügyre vesszük a dolgot a „parallel" szótörténeti előzményei felől is.

4.2 A „parallela" terminus rövid matematikatörténeti etimológiája

A párhuzamosság problémájának történeti forrásául Euklidész *Elemek* című munkája számított, legalábbis a megoldásával kísérletező geométerek történeti közösségen belül (Tóth (2000c: 144-5). A „párhuzamos" terminusnak az *Elemek*ben szereplő kifejezése *'παραλληλοζ'* alakban Arisztotelész korára már ismert és használt kifejezéssé vált (Heath 1956: 190). Később ez a kifejezés átkerült a latin nyelvbe is, ahol két változatban, az eredeti görögös formát megtartó *parallelos, -on* alakban, valamint háromvégződésű melléknévként, *parallelus 3 (parallelus, -a, -um, mn.*: párhuzamos, egyközű) formában honosult meg (Finály 1991: 1412). Ez utóbbi forma egyes számú hímnemű alanyesetű alakja a *parallelus*, és egyes számú nőnemű, valamint többes számú semlegesnemű, egyaránt alanyesetű formája az általában éppúgy, mint a Bolyaiaknál gyakorta felbukkanó „parallela". A „parallelus" alakhoz képest a „parallela" forma előtérbe kerülését két dolog magyarázza. Az egyes számú nőnemű alakot az, hogy a „parallelus" ragozásának a szintén nőnemű *linea* (*linea, -ae*, *nn.*: vonal) szóhoz, vagy a már jelzővel ellátott és egyeztetett „linea recta" (egyenes vonal) szókapcsolathoz kellett igazodnia. Itt a „recta" maga is a szintén háromvégződésű *rectus 3* (*rectus, -a, -um*, *mn.*: egyenes) melléknév ragozott nőnemű alakja. A többesszámú semlegesnemű alakot pedig az magyarázza, hogy a melléknevek rendszerint ilyen alakban önállósultak. Így a „linea" főnévről leváló „parallelus" és „rectus" melléknevek főnévként önállósodó alakjai a „parallela” és a „recta”. Különösen címadásoknál gyakori, hogy a többes számú alakot használjuk – pontosan úgy, ahogy magyarul is a „párhuzamosok problémájáról” vagy a „párhuzamosok elméletéről” beszélünk. A latin nyelvvel összefüggésben pedig a melléknevekből önállósodott főnevek a többes számmal egyúttal semleges nemet vonnak maguk után.[41] Erre a legjobb példa Bolyai Farkas 1804-es sikertelen bizonyítási kísérlete, amelynek eredeti címe *Theoria Parallelarum* (*A párhuzamosok elmélete*).

Így összességében azt mondhatjuk, hogy vagy a „parallelus” terminust, vagy a semleges nemű, többes számú ragozásnak megfelelően a „parallela” alakot láthatjuk viszont *önállóan* (főként a művek címeiben, de esetleg szövegben is), vagy a „linea”, illetve „recta” szavakhoz társulva és ragozásban hozzájuk igazodva (azaz egyes vagy többes számban). Az egyes számú nőnemű ragozásnak megfelelő előfordulás, például „parallela linea”, „parallela recta” vagy „parallela linea recta” előfordulása inkább a szövegközi használatban várható.

A szóban forgó kifejezés az alkalmasan ragozott formában tényleg centrális terminusa volt a „párhuzamosok problémájának”, méghozzá éppen az előbbi alakok szerint: a teljes „parallela linea recta” kapcsolatban, vagy „parallela linea”, „parallela recta” rövidített alakok valamelyikében, esetleg csak „parallela”-ként, illetve az angol, német és francia nyelveken ez utóbbi alak könnyen azonosítható származékaként.

A központi szerepet a probléma megoldásával foglalkozó művek címadási szokásai kiválóan visszatükrözik: amikor a művek nem a párhuzamossági posztulátumon (5. posztulátum) vagy a párhuzamossági axiómán keresztül utaltak a problémára, akkor gyakorta hivatkoztak rá a „parallelus” terminus megfelelő változatán keresztül.[42] Hogy milyen gyakran, azt a *5. táblázat* mutatja.

[41] Ezért az információért Láng Benedeknek tartozom köszönettel.

[42] Az ötödik posztulátumnak az *Elemek* különböző kiadásaiban, fordításaiban és kommentárjaiban elfoglalt helyét (posztulátum vagy axióma) és számozását illetően lásd Bonola (1955: 17-8.)

5. táblázat. A „párhuzamosok problémája”: szerzők és műcímek[43]

	Szerző	Cím	Év	Kiadás helye
1.	Oliver of Bury, Thomas	De **Rectarum Linearum Parallelismo** et concursu doctrina geometrica	1604	Cambridge
2.	Hanke, F. G.	Principia theoriae de infinito mathematico et demonstrationem possibilitatis **parallelarum** publicae eruditorum examini subjiciunt Fredericus Gottlob Hanke et Benjamin Gottlob Binder	1751	Breslau
3.	Kraft, G. W.	De numero pari, **rectis parallelis** et principio actionis minimae	1752	Tübingen
4.	Hagen, Johann Jacob von	Dissertatio mathematica sistens **linearum parallelarum** proprietates nova ratione demonstratas, quam publicae eruditorum disquisitioni subjiciunt Fredericus Daniel Behn et respondens Johann Jacob de Hagen	1761	Jena
5.	Klügel, Georg Simon	Conatuum praecipuorum theoriam **parallelarum** demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel	1763	Göttingen
6.	Boehm, Andreas	De **rectis parallelis** dissertatiuncula	1771	Frankfurt és Leipzig
7.	Karsten, Wenceslaus Johann Gustav	Versuch einer völlig berichtigten Theorie der **Parallelen**	1778	Halle
8.	Kesaer, Franz Xaver von	Abhandlung über die Lehre von den **Parallellinien**	1778	Wien
9.	Hauser, Matthias	Theorie der **Parallelen**	1780	Wien
10.	Schultz, Johann	Vorläufige Anzeige des entdeckten Beweises für die Theorie der **Parallellinien**	1780	Königsberg
11.	Felkel, Anton	Neu eröffnetes Geheimniss der **Parallellinien**	1781	Wien
12.	Hindenburg, Karl Friedrich	Uber die Schwierigkeiten bei der Lehre von den **Parallellinien**	1781	Leipzig
13.	Pagnini, Joseph Maria	Theoria **rectarum parallelarum** ab omni scrupulo vindicata	1783	Parma
14.	Schultz, Johann	Entdeckte Theorie der **Parallelen**, nebst einer Untersuchung über den Ursprung ihrer bisherigen Schwierigkeit	1784	Königsberg
15.	Venturi, Gianbattista	Memoria intorno alle **linea parallele**	1784	Modena

[43] Az egyszerű áttekinthetőséget segítő kiemelések tőlem származnak. A „†” jellel jelölt két tétel Frankland művéből származik (Frankland 1910: 44, és 52). A többi a Friedrich Engel által összeállított és Paul Stackel által közzétett bibliográfia feldolgozása (Stackel 1895: 293-313).

	Szerző	Cím	Év	Kiadás helye
16.	Bendavid, Lazarus	Über die **Parallellinien**	1786	Berlin
17.	Eichler, Caspar	De theoria **parallelarum** Schulziana	1786	Leipzig
18.	Gensichen, J. F.	Bestätigung der Schulze'schen Theorie der **Parallelen** und Widerlegung der Bendavid'schen Abhandlung über die **Parallelen**	1786	Königsberg
19.	Hindenburg, Karl Friedrich	Noch etwas über die **Parallellinien** – System der Parallellnien	1786	Leipzig
20.	Karsten, Wenceslaus Johann Gustav	Über die **Parallellinien**	1786	Halle
21.	Lambert, Johann Heinrich	Theorie der **Parallellinien**	1786	Leipzig
22.	Schultz, Johann	Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe seiner Theorie der **Parallelen**	1786	Königsberg
23.	Franceschini, Francesco Maria	Teoria delle parallele rigorosamente dimonstrata	1787	Bassano
24.	Lindquist, Johann Hendrik	Dissertatio sistens theoriam **linearum parallelarum**	1789	Aboe
25.	Voigt, Johann Heinrich	Dissertatio mathematica exhibens tentamen ex notione distincta et completa **lineae rectae** axiomatis XI Euclidis veritatem demonstrandi	1789	Jena
26.	Cagnazzi, Luca	Memoria sulle **curve parallele**	1790	Napoli
27.	Schötteringk, M. W. von	Demonstratio theorematis **parallelarum**	1790	Hamburg
28.	Castillon (Castiglione), Giovan	Sur les **parallèles** d'Euclide	1792	Berlin
29.	Ebert, Johann Jacob	Programma academicum de **lineis rectis parallelis**	1792	Wittenberg
30.	[Saladini, Girolamo]	Trattato delle **parallele**	1795	
31.	Wildt, Johann Christian Daniel	Systematis matheseos proxime vulgandi specimen. Theses quae de **lineis parallelis** respondent Habilitationsschrift	1795	Göttingen
32.	[Anders]	Bemerkungen über die Theorie der **Parallelen** des Herrn Hofprediger Schulz und der Herrn Gensichen und Bendavid	1796	Libau

	Szerző	Cím	Év	Kiadás helye
33.	Langsdorf, Karl Christian	Theorie der **Parallellinien** in: Ch. v. Wolf's neuer Auszug aus den Anfangsgünden aller mathematischen Wissenschaften	1797	Marburg
34.	Hauff, Johann Karl Friedrich	Neuer Versuch einer Berichtigung der Euklidischen Theorie der **Parallelen**	1799	Leipzig
35.	[Schötteringk, M. W. von]	Demonstratio theorematis **parallelarum**	1799	Hamburg
36.	Gumaelius, S.	Dissertatio sistens novam theoriam **linearum parallelarum**	1801	Lund
37.	Hoffmann, Johann Joseph Ignaz	Versuch einer neuen und gründlichen Theorie der **Parallellinien**, nebst Widerlegung des Hauff'schen Versuchs	1801	Offenbach a. M.
38.	Schwab, Johann Christian	Tentamen novae **parallelarum** theoriae, notione situs fundatae	1801	Stuttgart
39.	[Seyffer, Karl Friedrich]	Besprechung der Demonstratio theorematis **parallelarum**, Hamburg 1799.	1801	Göttingen
40.	Voit, Paul Christian	Percursio conatuum demonstrandi theoriam **parallelarum** de iisque judicium	1802	Göttingen
41.	[Kircher, Adolf]	Nouvelle théorie des **parallèles**, avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des **parallèles** de A. M. Legendre.	1803	Paris
42.	Jacques, Matthieu Joseph	Démonstration directe et simple des propriétés des **parallèles** recontrées par une sécante.	1804	Paris
43.	Grashof, Friedrich Carl August	Theses sphaerologicae quae ex sphaerae notione veram **rectae lineae** sistunt definitionem, omnique geometriae firmum jacent fundamentum	1804	Berlin
44.	Hoffmann, Johann Joseph Ignaz	Critik der **Parallelentheorie**	1807	Jena
45.	Scheibel, Joseph Ephraim	Vertheidigung der Theorie der **Parallellinien** nach Euklides	1807	Breslau
46.	Schweikart, Ferdinand Karl	Die Theorie der **Parallellinien**, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie	1807	Leipzig
47.	Ouvrier, Carl Siegmund	Theorie der **Parallelen**, als Ankündigung eines neuen Versuches über das Erkenntnissvermögen	1808	Leipzig
48.	Abreu, Joao Manuel de	Supplément à la traduction de la géométrie d'Euclide de Peyrard, publiée en 1804, et la géométrie de Legendre, suivi d'un essai la vraie théorie des **parallèles**	1809	Paris és Bordeaux

	Szerző	Cím	Év	Kiadás helye
49.	Brunacci, Vincenzo	Elementi di algebra e geometria. Edizione riveduta ed illustrata con nuove correzione ed aggiunte fra le quali la teoria dell' interesse del denaro ed una nuova dimonstrazione del teorema fondamentale delle **parallele**	1811	Milano
50.	Gergonne, Joseph Diaz	Essai sur la théorie des **parallèles**	1812	Nismes
51.	Duttenhofer, Jacob Friedrich	Versuch eines strengen Beweises der Theoreme von den **Parallellinien**, vermittelst einer von jenen Theoremen unabhängigen Construction des Rechtecks	1813	Stuttgart
52.	Herrmann, Christian Alois	Versuch einer einfachen Begründung des eilften Euclidischen Axioms und einer darauf gebauten Theorie der **Parallelen**	1813	Frankfurt a. M.
53.	Guntz	Elementare Theorie der **Parallelen** Geraden	1815	Gratz
54.	Metternich, Matthias	Vollständige Theorie der **Parallellinien**. Nebst einem Anhange, in welchem der erste Grundsatz zur Technik der **geraden Linie** gegeben wird.	1815	Mainz
55.	Bürger, J. A. P.	Vollständige Theorie der **Parallellinien**. Nebst Anmerkungen über andere bisher erschienene **Parallel-Theorien**	1816	Karlsruhe
56.	Crelle, August Leopold	Über **Parallelen-Theorien** und das System der Geometrie	1816	Berlin
57.	Hoffmann, Johann Joseph Ignaz	Bemerkung zu der **Parallelen-theorie** von L[üdicke].	1816	
58.	Lüdicke, August Friedrich	Über die **Parallelentheorie**	1816	
59.	Vermehren, Carl Christian Hermann	Versuch dei Lehre von den **parallelen** und **convertegen Linien** aus einfachen Begriffen vollständig herzuleiten und gründlich zu erweisen	1816	Güstrow
60.	Exley, Thomas	The theory of **parallel lines** perfected, or the twelfth axiom of Euclids Elements demonstrated	1818	London
61.	Hessling, C. W.	Versuch einer Theorie der **Parallelen**	1818	Halle a. S.
62.		Critische Revision der im jüngst verflossenen Quinquennium erschienenen Schriften über **Parallelen-Theorie**	1818	Heildelberg
63.	Hauff, Johann Karl Friedrich	Nova **rectarum parallelarum** theoria	1819	Gandae
64.	Lüdicke, August Friedrich	Versuch einer neuen Theorie der **Parallellinien** im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie	1819	Meissen

	Szerző	Cím	Év	Kiadás helye
65.	Müller, Johann Wolfgang	Ausführliche evidente Theorie der **Parallellinien**	1819	Nürnberg
66.	Bürger, J. A. P.	Vollständige Theorie der **Parallellinien** nebst Anwendungen über andere bisher erschienene Paralleltheorien	1820	Karlsruhe
67.	Lüdicke, August Friedrich	Zur Theorie der **Parallellinien**	1820	
68.	Struve, K. L.	Theorie der **Parallellinien**	1820	Königsberg
69.	Creizenach, M.	Abhandlung über den elften Euklidischen Grundsatz in Betreff der **Parallellinien**	1821	Mainz
70.	Hauff, Johann Karl Friedrich	Nova **rectarum parallelarum** theoria, editio altera supplementis aucta	1821	Frankfurt a. M.
71.	Küster, J. C.	Versuch einer neuen Theorie der **Parallelen**. Mit Vorrede von Hofrath Bährens	1821	Hamm
72.	Mönnich, B. F.	Ein Versuch die Theorie der **Parallellinien** auf einen Grundbegriff der allgemeinen Grössenlehre zurückzuführen	1821	Berlin
73.		Sulla teoria delle **parallele** e su quella delle figure equivalenti	1821	Bologna
74.	Lüdicke, August Friedrich	Rein geometrische Theorie der **Parallellinien**	1822	
75.	Metternich, Matthias	Vollständige Theorie der **Parallellinien**, oder geometrischer Beweis des eilften Euklidischen Grundsatzes. Zweite umgearbeitete Auflage	1822	Mainz
76.	Müller, Carl Reinhard	Theorie der **Parallelen**	1822	Marburg
77.	Huber, Daniel	Nova theoria de **parallelarum rectarum** prorprietatibus	1823	Basel
78.	Wahl, Friedrich Wilhelm Ludwig	Dissertatio mathematica symbolas ad epicrisin theoriarum **parallelas** spectantium continens. Particula 1. Insunt IV theoriae earumque censura	1823	Jena
79.	Foex	Mémoire relatif à la théorie des **parallèles**. Rapport fait par MM. Ampère et Cauchy	1824	Paris
80.	Stein, Johann Peter Wilhelm	Examen de quelques tentatives de théorie des **parallèles**	1824	Nismes
81.		Essai de démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des **parallèles**	1824	Nismes
82.	Colburn, W.	Nouvelle théorie des **lignes parallèles**	1825	Boston

	Szerző	Cím	Év	Kiadás helye
83.	Hegenberg, F. A.	Vollständige, auf die bekannten Elementarsätze von den **geraden Linien** und Winkeln gegründete Theorie der **Parallellinien**	1825	Berlin
84.	Servois	Lettre au rédacteur des Annales sur la théorie des **parallèles**	1825	Nismes
85.	Taurinus, Franz Adolph	Theorie der Parallellinien	1825	Köln
86.	Hoffmann, Johann Joseph Ignaz	Vermischte Aufsätze aus der Physik, Philosophie und Mathematik für Liebhaber dieser Wissenschaften: Über das Verhältniss des **Parallelenproblems** zur Elementargeometrie	1825	Frankfurt a. M.
87.	Müller, Johann Wolfgang	Neue Beiträge zu der **Parallelentheorie**, den Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes und den Berechnungsarten der Pythagoräischen Zahlendreiecke	1826	Augsburg és Leipzig
88.	Knar, Joseph	Über die Theorie der **Parallellinien**. Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettingshausen	1827	Wien
89.	Koch, Christian Adolf	Über **Parallellinien**. Ein versuch, dem Urtheil Sachkundiger gewidmet	1827	Hamburg
90.	Neubig, Andreas	Die **Parallelentheorie**	1827	Bayreuth
91.	Knar, Joseph	Berichtigung seiner Ansicht von den **Parallellinien**. Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettingshausen	1828	Wien
92.	Lampredi, Urbano	Intorno ad un passo di Euclide sulla teoria delle **parallele**	1828	Roma
93.	Reinhold, H. J.	Theorie des Krummzapfens nebst einem Anhange: Versuch einer rein geometrischen Begründung der Lehre von den **Parallellinien**	1829	Münster
94.	Falck, Henrik	Practisk Lärobok i Geometrien och Trigonometrien med strängt bevis i lären om **parallela linier**	1831	Upsala
95.	Doppler, Christian	Beiträge zur **Parallelentheorie**	1832	Wien
96.	Bürger, J. A. P.	Vollständig erwiesene, von den ältesten Zeiten bis jetzt noch unberichtigt gewesene Theorie der **Parallellinien**, nebst einer Critik mehrer bisher erschnienener **Paralleltheorien** und Anführung anderer neuerfundener geometrischer Gegenstände	1833	Heidelberg
97.	Legendre, Adrien Marie	Réflexions sur différentes manières de démontrer La théorie des **parallèles** ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle	1833	Paris

	Szerző	Cím	Év	Kiadás helye
98.	Wiessner, Gottfried	Beweis über **Parallellinien** oder dem dass alle drei Winkel eines jeden Dreieckes zusammen genommen zwei rechten Winkeln gleich sind	1833	
99.	Bürger, J. A. P.	Neu aufgefundener Beweis von sem seit 21 hundert Jahren unberichtigt gewesenen eilften Euklidischen Grundsatze in der Geometrie in Betreff **Parallelentheorie**	1834	Hiedelberg
100.	[Crelle, August Leopold]	Théorie des **parallèles**	1835	Berlin
101.	Hill, Carl Johan	Conatus theoriam **parallelarum** stabiliendi praecipi, quos recensuit novisque superstruxit fundamentis atque auxit Auctor	1835	Lund
102.	Gaudain	Lettre à M. van Tenac sur la théorie des **parallèles.** Annales maritimes et coloniales	1836	
103.	Hennig, Karl August	Neue Begründung der **Parallelentheorie**	1836	Nürnberg
104.	Kaiser, Ignaz	Versuch die Theorie der **parallelen Linien** streng nachzuweisen	1836	Wien
105.	Lampredi, Urbano	Tentativo di una nuova teorica elementare delle **linee** perpendiculare, obblique e **parallele**	1836	Napoli
106.	Lemonnier	Nouvelle théorie des **parallèles**. Annales maritimes et coloniales	1836	
107.	Van Tenac	Nouvelle théorie des **parallèles**. Annales maritimes et coloniales	1836	
108.	Gräf, Carl	Der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks ohne Hilfe der **Parallellinien** bewiesen. Ein Beitrag zur Gründung des elften Grundsatzes des Euclides und die darauf ruhende Theorie der **Parallellinien**	1837	Rudolfstadt
109.	Horn	Das Parallellenproblem. Programm.	1837	Glückstadt
110.	Wiessner, Gottfried	Begründung der **Parallelentheorie**, auf den ohne Beihilfe der **Parallellinien** geführten Beweis, dass die Winkelsumme eines jeden Dreiecks zwei rechten Winkeln gleich sind	1837	Jena
111.	Meikle[†]	Theory of Parallel Lines	1844	Edinburg
112.	Dodgson[†]	A New Theory of Parallels	1895	London

4.3 A „parallela" használata a Bolyaiaknál az *Appendix* megjelenése előtt

Az *Appendix* megjelenése előtt a „parallela" az eredeti latinos formában fordul elő még a Bolyaiak egymással folytatott magyar nyelvű levelezésében is. Ezt alátámasztja a következő két (egyébként gyakran idézett) levélrészlet is, amelyekben a „parallela" feltűnik.

Bolyai Farkas 1820. április 4-i levelében a következő módon próbálja lebeszélni (valójában rábeszéli) fiát, Bolyai Jánost a parallelákkal való foglalkozásról:

> A parallelákat azon az útan ne próbáld: tudom én azt az utat is mind végig – megmértem azt a feneketlen éjszakát én, és az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne – az Istenért kérlek! Hagyj békét a paralléláknak – úgy irtózz tölle, mint akármicsoda feslett társalkodástól, éppen úgy megfoszthat minden idődtől, egésségedtől, csendességedtől s egész életed boldogságától. (Benkő 1975: 123)
>
> Tanulj te az én példámon; én a parallélákat akarva megtudni, tudatlan maradtan, életem s időm virágját mind az vette el – sőt minden azutáni hibámnak töve mind ott volt s a házi fellegzésekből esett reá. Ha a parallélákat feltaláltam volna, ha senki se tudta volna is meg, hogy én találtam, angyal lettem volna. (Benkő 1975: 124).

Bolyai János híres, apjához írott 1823. november 3-i levele szerint:

> A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz, a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe a pillanatba *nincs* kitalálva, de az az út, melyen mentem, csaknem bizonyosan ígérte a cél elérésit, ha az egyébaránt lehetséges … (Benkő 1975: 158).

Bolyai János szándéka tehát az volt, hogy a parallelákról adjon ki egy munkát. Szintén az ő egyik, 1819-1820-ra datált füzetében, amelyben négy olyan ábra látható, amelyek közül három a hiperbolikus geometria végtelen sugarú határkörével (az ún. paraciklussal) függ össze, a *Parallelarum Theoria* felirat szerepel.[44] Ez Bolyai Farkas előbb említett 1804-es művének címadására rezonál, és ezzel persze igazodik ahhoz a sémához is, hogy a „párhuzamosok elmélete" névvel utal a kérdéskörre. Az eddigiekben, mondhatjuk, semmi meglepő nincs. Azt kaptuk eredményül, amit vártunk: Bolyai Jánosnak ismernie kellett a „parallela" kifejezést, és valóban – ismerte és használta is.

[44] Lásd Kárteszi (1973: 31).

4.4 Az *Appendix* első paragrafusának „parallela”-jára várva

Az eddigi fejtegetések a következőképpen összegezhetők. Ahhoz, hogy a Standard Nézet álláspontjával összhangban az *Appendix* első paragrafusát a Bolyai-féle „parallela” definíciójának tekinthessük, Bolyai Jánosnak explicite használnia kell a szóban forgó kifejezést. A kérdéses helyen tehát a „parallelusra” grammatikailag visszavezethető terminusnak kell szerepelnie úgy, hogy a visszavezetés során csak a szövegkörnyezetet, valamint a latin nyelv grammatikai (például esetegyeztetési, ragozási és effajta) szabályait hívhatjuk segítségül. Az ilyen módon megmagyarázhatatlanul maradó eltéréseket pedig úgy kell értékelnünk, mint ami nem támasztja alá a nézet felfogását.

Ezek figyelembe vételével nekifoghatunk végre az első paragrafus átfésülésének abból a célból, hogy eldönthessük azt az empirikus kérdést: használja-e vajon Bolyai János a „parallelus” szó megfelelő alakját? (*2.* és *2.F ábrák.*)

§ 1. (Fig. 1.) Si rectam $\widetilde{am}$ non secet plani ejusdem recta $\widetilde{bn}$, at secet quaevis $\widetilde{bp}$ (in abn): designetur hoc per $bn \,|||\, am$. *Dari* talem $\widetilde{bn}$, et quidem *unicam*, e quovis puncto b (extra $\widetilde{am}$), atque $bam + abn$ non $>$ $2R$ esse patet; nam bc circa b mota, donec $bam + abc = 2R$ fiat, $\widetilde{bc}$ ex $\widetilde{am}$ aliquando *primum* exit, estque tunc $bc \,|||\, am$. Nec non patet esse $bn \,|||\, em$, ubivis sit e in $\widetilde{am}$ (supponendo in omnibus talibus casibus esse $am > ae$). Et si, puncto c in $\widetilde{am}$ abeunte in infinitum, semper sit $cd = cb$: erit semper $cdb = (cbd < nbc)$; ast $nbc \frown o$; adeoque et $adb \frown o$.

2. ábra. *A* Bolyai János-féle Appendix *első paragrafusa*

Mindent egybevetve azt képviselem, hogy a „párhuzamosok problémájának” története által kitüntetett, valamint a mű nyelvének figyelembevételével valóban a szövegbe illő, és a „parallelus”-ból grammatikailag levezethető kifejezés az Appendix *első paragrafusában egyáltalán nem szerepel. Következésképp: a Standard Nézet nem támasztható alá.*

*Azt állítom továbbá, hogy a mű önmagában tekintve nem szolgáltat további támpontokat – a jelmagyarázat (*Explicatio signorum*) révén sem – ahhoz, hogy a mű első paragrafusát és a* *benne foglaltakat közvetett módon kapcsolatba hozhassuk a „parallelus" kifejezéssel.* (*1.F ábra.*)

4.5 Az *Appendix* új ruhái

Kellő körültekintéssel válogatva a fordítások közül egyeseket nyugodtan segítségül hívhatunk az általam képviselt tézis megerősítéséhez. Ezek ugyanis pontosan azt mutatják a fordításban (jelesül magyarul) is, mint az eredeti. Itt a válogatás célja nem az, hogy a szelektív módon kezelt evidenciák támasszák alá tézisemet. A kérdés eldöntésében nyilvánvaló módon az eredeti latin nyelvű művet, mint elsődleges forrást kell szem előtt tartanunk, és a poszthumusz, ezért Bolyai János által ismeretlen, jóvá nem hagyott *nem szerzői* fordítások semmilyen szempontból nem lehetnek perdöntőek. A „parallela" első paragrafusbeli hiányára vonatkozó állítást tehát nem a körültekintően, de egyoldalúan összeválogatott fordítások fogják igazolni, mint ahogy egyetlen, a „parallela"-t az első paragrafusban tartalmazó fordítás sem cáfolhatja. Ugyanakkor az általam képviselt tézist alátámasztó fordítások – azok, amelyekből az első paragrafussal összefüggésben mégiscsak hiányzik a „parallela" vagy a „párhuzamos" bármiféle nyoma – éppen azt látszanak jelezni, hogy az eredetiben sincs szó ilyesmiről. Részint a tézismet alátámasztó fordítások bemutatása végett, részint további okokból, érdemes az *Appendix* átültetései felé fordulnunk.

Egyrészt most már lehetőségünkben áll megmutatni a Standard Nézet sokat kifogásolt működését. Egyfelől azt, hogy a nézet hogyan hozza létre a felfogását igazoló bizonyítékokat, másfelől azt, hogy részben ennek következtében vélekedésrendszere hogyan válik önigazoló és önfenntartóvá. Ezen kívül, másodikként, a tudományos tisztesség is úgy kívánja, hogy azok a történészek is meg legyenek nevezve, akikről joggal feltételezhető, hogy egyáltalán nem osztják, illetve nem osztották a bevett nézet SN_L vagy SN_B álláspontját. Végül pedig a Standard Nézet képviselőin belül is szükséges különbséget tennünk a tekintetben, hogy a felfogás mennyire nyomta rá a bélyegét az illető tevékenységére. Ez utóbbi ugyanis az *Appendix*-fordítások és utánközlésekbe történő beavatkozásokban jól tetten érhető és lemérhető.

Szóvá kell ugyanis tennünk – most már talán megalapozottan tehetjük–, hogy a nézet nem csupán azt sugallja, azaz nem csupán úgy értelmezi és mutatja be a művet, mintha az első paragrafusban szó szerint kiírva is megjelennék a „parallel" vagy a „párhuzamos" kifejezés, hanem számos esetben így is fordítja le. Ez az eljárás pedig tézisem fényében nem igazolható.

Ugyanakkor azonban az is figyelemre méltó, hogy a „párhuzamos” kifejezés hiánya egyes magyar fordításokon átsejlik. Így ezek valójában beismerő vallomások, amelyek aláhúzzák az általam képviselt tézist: pontosan azt teszik világossá, hogy a „párhuzamos” azért nem szerepel sem az első paragrafusban, sem a környékén, mert az eredetiben szó sincs a „parallela”-ról”. Ez pedig akkor igazán figyelemre méltó jelenség, ha az egyik ilyen – lényegében kifogástalan – átültetés készítője a Standard Nézetnek is képviselője.

Az eredeti latin műnek, azaz az *Appendix*nek két olyan teljes magyar nyelvű átültetése van, amelyek szemantikailag és filológiailag is hűek: az egyik Tóth Imre 1953-as fordítása (*3. ábra*, valamint *29.F* és *30. F ábrák*), míg a másik Rados Ignácz 1897-es munkája (*26.F* és *27. F ábrák*). Ha pedig csak egyet kell megjelölni, amely az említett szempontokból a legkorrektebb módon adja vissza az eredetit, akkor a Tóth Imre-féle átültetés javára kellene döntenünk. Az övé az, amely a nyomdatechnikailag nehezen reprodukálható Bolyai János-féle eredeti szimbólumhasználatot is a leghűségesebben adja vissza.

1. §.

(1. ábra.) Ha az $\widetilde{am}$ egyenest az ugyanabban a síkban fekvő $\widetilde{bn}$ egyenes nem metszi, de metszi azt minden (az *abn*-ben lévő) $\widetilde{bp}$: jelölje ezt

$$bn \,|||\, am$$

Világos, hogy ilyen $\widetilde{bn}$ *létezik* és csak *egyetlenegy,* mégpedig bármely ($\widetilde{am}$-en kívül fekvő) *b* pontból s nyilvánvalóan

$$bam + abn \quad \text{nem} > 2R;$$

ugyanis, ha *bc*-t mindaddig forgatjuk *b* körül, mígnem

$$bam + abc = 2R$$

lesz, $\widetilde{bc}$ valamikor *legelőször* nem metszi $\widetilde{am}$-et és akkor $bc \,|||\, am$.

Ugyancsak világos, hogy $bn \,|||\, em$, bárhol van is *e* az $\widetilde{am}$-ben (feltéve, hogy minden ilyen esetben $am > ae$).

És ha a *c* pont az $\widetilde{am}$-en a végtelenbe fut, miközben állandóan $cd = cb$: ugyanakkor állandóan $cdb = (obd < nbc)$; ámde $nbc \frown O$: ennélfogva *adb* is $\frown O$.

3. ábra. Az Appendix első paragrafusának Tóth Imre-féle átültetése

Tóth és Rados átültetését leszámítva a többi meglehetősen kifogásolható módon viszonyul a „parallela” hiányához és elég változatosan kompenzálja. Egyes esetekben a hiány pótlása végett közvetlenül és erőteljesen avatkoznak be a fordításokba. Ilyenkor az adott fordítási nyelven egyszerűen „belefordítják” az inkriminált szót a mű első paragrafusába (Halsted 1955: 5; Hoüel 1868: 23; Suták 1897: 38, *19.F* és *22.F ábrák*) vagy a művet bevezető jelmagyarázatba (Halsted 1955: 3; Hoüel 1868: 22; Suták 1897: 38, *18.F* és *21.F ábrák*). Máskor közvetve és finomabb módon orientálják az észlelést, és segítik a Standard Nézet

Appendix-olvasatának megfelelő látásmód kialakítását. Ennek egyik szokásos eszköze a műben eredetileg nem szereplő fejezetcímek használata: az első paragrafus felvezetésekor ez értelemszerűen „A párhuzamos" vagy a „Parallelism" alakot ölti (Kálmán 1989: 104-5; Kárteszi 1973: 71; Kárteszi és Szénássy 1987: 75; Weszely 1981: 137; *25.F és 34. F ábrák*). Egy másik szokásos eszköz a Bolyai által eredetileg az első paragrafus először nem metsző egyenesei között fennálló reláció jelölésére használt '|||' szimbólum megváltoztatása és kicserélése a párhuzamosság jól ismert '||' jelére (Halsted 1955; Kálmán 1989: 105; Kárteszi 1973; Kárteszi és Szénássy 1987: 75; Suták 1897; *18.F*, *19.F* és *25. F ábrák*). Természetesen ezeknek az eszközöknek a kombinálása sem kizárt és nem is ismeretlen (Halsted 1955; Hoüel 1868; Kárteszi 1973; Kárteszi és Szénássy 1987; Suták 1897).[45] Thomas Kuhn-nak a „művek meghamisításáról" szóló, provokatívnak ható és nehezen hihető állítása (Kuhn 2000: 154) itt tehát valóban tetten érhető. Nem azt akarom ezzel állítani, hogy azok a képviselők, akik fordítást vagy fordítás értékű interpretációt hoztak létre, a hamisítás tudatával és a félrevezetés szándékával folyamodtak ilyen eszközökhez. Sokkal inkább arról lehet szó, hogy igen erős az igény és a késztetés az *Appendix* első paragrafusát egy bizonyos módon, jelesül a „parallela" meghatározásaként, illetve szerepeltetéseként látni. Olyannyira erős, hogy passzív módon az észlelést, a tevékeny fázisba érve pedig konstruktív módon – vélhetőleg öntudatlanul vagy jószándékúan – a fordítások létrehozásának mozzanatát is befolyásolja. A fordítások pedig – mint az a Standard Nézet nemzetközi vetületénél a hivatkozási apparátus, illetve az irodalomjegyzékek révén láthatóvá vált – elsődleges forrásokká váltak. A fordítási beavatkozásokat tehát a másodlagos források létrehozásának „faktuálisan konstruktív" mozzanataként kell látnunk, magukat az átültetéseket pedig a forráskezelésben és a matemaikatörténet-írásban betöltött szerepük – az elsődleges források szerepében való tetszelgés – miatt kell igazán vitathatónak és elfogadhatatlannak tekintenünk. Így állt elő az helyzet, hogy a fordítások, mint közvetett és hamis, meghamisított történeti bizonyítékok – az elsődleges források helyét és szerepét átvéve – a nézetet igazoló dokumentumokká váltak, és

[45] Kárteszi a következőképpen indokolja és látja az általa megvalósított fordítási megoldásokat: „A II. rész az *Appendix* eredeti kiadásának hű másolatát és a latin szöveg fordítását tartalmazza. A fordítás a matematika mai magyar nyelvezetéhez igazodik, de pontosan tükrözi a tömör latin szöveg értelmét. Az eredeti műben nem szereplő, fejezetekre való tagolás, a ma szokásos jelölések használata, az ábrák szöveghez igazodó elosztása és a korszerű rajztechnika kivitelezése, néhány új ábra beiktatása elhárítja azokat a fölösleges nehézségeket, amelyek az ilyen régi nyomtatványok és szövegek olvasásának velejárója." (Kárteszi 1973: 7). Hasonlóan indokolja munkájának angol kiadásában (Kárteszi és Szénássy 1987: 8), továbbá: „For the sake of historical, I gave my book the title *Appendix*, *the scinece of space.* To bring out the historical point of view, the facsimile of a Bolyai's work printed in in June 1831 is also included, though I have prepared – in cooperation with György Hajós and Imre Trencsényi Waldapfel, late professor of classical philology – a carefull translation of the text into modern Hungarian and added it to the Latin original."(Kárteszi és Szénássy 1987: 8).

lényegében önfenntartóvá tették a Standard Nézet vélekedésrendszerét. Kuhn megjegyzésére visszatérve azt mondhatjuk, hogy a hamisítást nem az eredeti dokumentumra vonatkozó és faktuális szinten zajló szándékos meghamisításként, az eredeti hamisítványának elkészítésére irányuló szándékos cselekvésként kell értenünk, hanem az eredetit *elfedő* hamis pótlékok létrehozásának tevékenységeként, továbbá a filológiailag helytelen forráskezelés módszertani szintjén.

Így válik igazán érthetővé többek között az is, hogy miért kifogásolható az a bevett nemzetközi matematikatörténet-írási gyakorlat, amely az eredeti latin mű helyett Halsted angol fordításához folyamodik. Tézisem szerint ugyanis egy erősen hibás és félrevezető pótlékot használnak (*19.F* és *20.F ábrák*).

Így azután persze nem is csodálkozhatunk azon, hogy a „parallela" explicit hiánya a Standard Nézet részéről bevallatlan marad, hiszen azok az átültetések, amelyekhez fordulhatunk (ha módszertani alapon nem tudjuk, hogy nem fordulhatnuk fordításokhoz akkor, amikor a primer forrás is elérhető), és amelyekhez fordulni szokás, közvetlenül vagy közvetve valamilyen formában „tartalmazzák" azt.

Ezek után értékelhető csak igazán Rados Ignác, valamint Tóth Imre fordításának szemantikai és filológiai korrektsége, illetve hűsége. Tóth Imre azért is kiemelendő, mert a Standard Nézet fordításokat – Halsted (1896, 1897, 1955), Hoüel (1868), Kárteszi (1973), Suták (1897) és Weszely (1981)–, vagy fordítás értékű és megjelenésében az eredeti művet utánzó átdolgozásokat is készítő képviselői – Dávid Lajos (1944), Kálmán Attila (1989) – közül ő az egyetlen, némiképp megnyugtató példa arra, hogy az aktív fázisba lépve a nézetnek nem kell szükségképpen konstruktív módon is megnyilvánulnia, és nem kell szükségszerűen rányomnia a bélyegét a fordításra.

Rados Ignác (és vele együtt Paul Stackel) azért különleges esetek, mert ők nem számítanak a Standard Nézet képviselőinek. Ezt a tanulságot Stackel később más vonatkozásokban is fontossá váló *Appendix–Raumlehre*-közléséből (*43.F* és *44.F ábrák*), és az erről készített Rados-féle fordításból (*40.F* és *41.F ábrák*), továbbá Rados már említett saját, 1897-es átültetéséből szűrhetjük le (*26.F* és *27.F ábrák*). Az, hogy Stackel és Rados nem tekinthetők az elfogadott nézet képviselőinek, csak részben következik az *Appendix* első paragrafusához való kifogástalan filológiai-fordítástechnikai viszonyulásukból. Hogy melyek azok a további okok, amelyek miatt nem találhatjuk meg őket a „parallela" vagy a „párhuzamos" első paragrafusbeli jelenlétét hirdető képviselők között, arra részben a mű más, később fontossá váló passzusához való viszonyulásuk vet majd fényt.

A fejezetet pozitív módon azzal zárhatjuk, hogy van három olyan szerző, akik valamilyen módon érintetlenek maradtak a Standard Nézet befolyásától, vagy a befolyás érintetlenül hagyta matematikatörténészi tevékenységük egyik fontos aspektusát, a fordítási tevékenységet. Míg tehát Stackel és Rados teljes egészében a nézeten kívülállónak tűnik, addig Tóth Imre a nézeten belül annyiban egyedülálló, hogy elkerülte azt a jellemző hibát, amit rajta kívül a felfogás minden egyes átültetést készítő képviselője elkövetett – azt nevezetesen, hogy a fordítást is a Bolyai-féle párhuzamosról vallott felfogásához igazítsa. Ezt, a hibák jellegének kritikus jellege, valamint a hibás művek mennyiségének számottevő volta miatt nem lehet eléggé értékelni és csodálni.

Lehetséges ellenérvek és megmentési kísérletek – kontrákra rekontrák

Bár elvileg ezen a ponton befejezettnek tekinthetnénk az elfogadott nézet kritikai vizsgálatának és tudományos kérdőre vonásának folyamatát azzal, hogy a bizonyítási kényszert a Standard Nézetre hárítjuk. A bizonyítási követelmény átháríthatósága mellett szólhatna az is, hogy az elfogadott nézet elvileg episztémikusan lényegesen egyszerűbb helyzetben van. A bevett felfogásnak elvileg egyszerűbb lenne felmutatni az álláspontját alátámasztó bizonyítékokat, jelesül azt az *Appendix*-példányt, amelynek első paragrafusában Bolyai a „parallelus” terminus megfelelő alakjához folyamodik. A bizonyítás terhének rövid úton történő áthárítása helyett azonban a következőkben sorra veszem a várható ellenvetéseket és megvizsgálom a lehetségesnek tartott ellenérveket. A leginkább várható, legvalószínűbb ellenérvektől haladok a kevésbé valószínűek felé, ám ezt nem tekinthetjük az erősebbektől a gyengébbek felé haladásnak. Emiatt külön jelezni fogom az általam legerősebbnek vélt és előbbi tézisemet leginkább próbára tevő érvet, valamint bizonyítékait.

5.1 Első kísérlet: a háromvonalas jel, mint a Bolyai-féle „parallela” jele

A Standard Nézet megmentésének legvalószínűbb, és ezért első helyen tárgyalandó kísérlete a következő: a Bolyai által a mű első paragrafusában használt különös szimbólum, a háromvonalas ‘|||’ jel jelenti a „párhuzamos”-t, azaz a „parallela”-t. A „párhuzamos” vagy „parallela” ilyen közvetett módon jut tehát szerephez a kérdéses helyen. Bár ez ügyben is változatos véleményhalmazzal van dolgunk, mégis kihámozható egy bizonyos felfogás. Ez talán Salló álláspontjából vezethető le a legközvetlenebb módon: Bolyai jelhasználata kifejezéseket pótol, és a háromvonalas jel a párhuzamost helyettesítő aszimptóta – közvetett módon tehát a párhuzamos – helyett áll. Tegyük most egy pillanatra félre azt a nehézséget, ami abból adódik, hogy Bolyainál a „párhuzamos”-t egyes álláspontok szerint az

„aszimptóta", mások szerint pedig az „aszimptotikus egyenes" *helyettesíti*. Tekintsünk most el attól egy kis időre, hogy ekkor valójában szerintük a háromvonalas jel csupán az „aszimptóta" (Salló 1974: 34-5), vagy az „aszimptotikus egyenes" helyett szerepel (Tóth 1953: 293). Érdemes ugyanis fontolóra vennünk azt a lehetőséget, hogy Bolyai ezt a különös szimbólumot (azaz: az első paragrafusban használt '|||' jelet) tényleg direkte a párhuzamosság jelölésére kívánja használni. Ez utóbbi felfogásnak is vannak ugyanis képviselői (Suták 1897: 75; valamint Weszely 1981: 83-4, és uő. 2002: 77). Mindenképpen meg kell tehát vizsgálnunk azt a lehetőséget, hogy Bolyainál az *Appendix* első paragrafusában alkalmazott háromvonalas jel pótolja és jelenti a párhuzamosságot („parallela"-t). Méghozzá a „pótolja és jelenti" azon értelemében, hogy a háromvonalas jel úgy szerepel a „parallela" helyett, hogy eközben valamiképpen egyértelműen utal is rá.

Most tehát hasonló helyzetben vagyunk, mint a „parallela" kifejezés első paragrafusbeli empirikus azonosításának korábbi problémájánál: nem kell mást tennünk, mint az *Appendix* jelmagyarázatától (*Explicatio signorum*) az első paragrafus végéig terjedő részt áttekintenünk, hogy eldöntsük, a mű ezen szakaszában szerepel-e valamilyen módon a „parallela", és tarthatóvá válik-e ezáltal a nézet. Természetesen a mű további részei is fontosak és perdöntők lehetnek e kérdés eldöntésében, ám a kritikus rész a jelmagyarázattól az első paragrafus végéig terjedő szakasz. Egyrészt azért, mert, mint láttuk, a fordítások és az utánközlések a jelmagyarázattal hasonló módon járnak el, mint az első paragrafussal — nemegyszer a jelmagyarázatba is közvetlenül belefordítják a szóban forgó terminust (Halsted 1955: 3; Hoüel 1868: 22; Suták 1897: 38, *18.F* és *21.F ábrák*). Mivel ez azt sugallja, hogy a rejtély kulcsa a jelmagyarázatban lehet, ezért szigorúan le kell ellenőriznünk. Másrészt azt kell figyelnünk, hogy van-e az első paragrafus végével bezárólag olyan Bolyaitól származó lábjegyzet, amely a háromvonalas jel „parallela"-ként történő értelmezését támogatja. Bár a lábjegyzet-hivatkozás létének a későbbiekben még figyelmet kell szentelnünk (*5.6*), most elég annyi, hogy a Standard Nézet megmentése másik ígértes kísérletének az első paragrafusban bevezetett háromvonalas jelhez kapcsolt lábjegyzet igérkezik (Salló 1974: 34; *2. táblázat*).

Amennyiben azonban az *Appendix*ből indulunk ki, úgy nincs alapunk a „parallelus" és a háromvonalas jel összekapcsolására – a mű ehhez semmilyen támpontot nem ad. Az inkriminált jel verbális értelmezése ugyanis a mű jelmagyarázatából teljesen hiányzik, szemben bizonyos más jelek, például: a '∟', a 'Λ' vagy az '*R*' jelek előzetes explicit kifejtésétől, amelyek sorjában a *perpendicularis*t (merőleges), az *angulus*t (szög) és az *angulus rectus*t (derékszög) jelentik (*1.F ábra*). A jelmagyarázat után rögtön következő első paragrafusig pedig semmi olyan többlet-információ nincs – így nincs a háromvonalas jelhez kapcsolódó és a „parallelát” tartalmazó lábjegyzet sem –, amely indokolttá tenné a „parallela” összekapcsolását a különös ‘|||’ szimbólummal (*2.F ábra*). Az *Appendix*et mint elsődleges forrást önmagában tekintve nem alapozható meg a „parallela” és a ‘|||’ szimbólum közötti kapcsolat. Ha megalapozható, akkor másmilyen módon, azaz az *Appendix*en kívülre mutató eszközök révén tehető. Ekkor azonban világossá kell tenni, hogy egy filológiai rekonstrukcióról és bizonyításról van szó, és körültekintően kell eljárni, például a szövegértelmezés és a források kronológiai egymáshoz viszonyításának tekintetében. Ekkor adott esetben például különbséget kell tenni a forrás létrejöttének külső, valamint a forrás által érintett időszak belső kronológiája szerint, azaz nem lehet *ad hoc* módon váltogatni és keverni az *Appendix*hez képest később született, de korábbra utaló forrásokból származó, valamint a műből származó információkat. Nem lehet bármit az *Appendix*re és megjelenésének idejére érvényesnek tekinteni, ami valamelyest is egyezni látszik a mű tartalmával vagy formájával.

Nos: az *Appendix*en kívülre mutató forrásokat és eszközöket felhasználó érvelések közül kettő tűnik kézenfekvőnek, amelyek szóba jöhetnek annak bizonyítására, hogy a ‘|||’ szimbólumot a „parallela” kifejezés helyettesítőjeként kell látni és érteni.

Az első, az elvileg erősebb, a jelhasználati konvencióra alapozhatva állíthatná, hogy a ‘|||’ szimbólum mögött álló tradíció tette szükségtelenné a szó szerint értelmezést. A háromvonalas jel értelme olyannyira kézenfekvő és köztudomású volt, hogy szükségtelenné tette verbális kifejtését. Később látni fogjuk (*5.3*), hogy a háromvonalas jel eredete azonosítható, és a jel születési bizonyítványa a legjobb esetben is a Bolyaiak környezetére szűkíti a szimbólum konvencionális ismertségét. A háromvonalas jel *Appendix*en kívüli forrásokból ilyen módon levezett használatát és értelmét csak akkor tekinthetnénk kézenfekvőnek, ha a szimbólum a publikusan hozzáférhető korabeli művekben, például a tankönyvekben is előfordulna, és ilyen értelemben. Ekkor legalább azt feltételezhetnénk, hogy a háromvonalas jel a Bolyaiak környezetében ismertté és konvencionálisan elfogadott vált, a jelek szerint már 1831-1832 tájára. Ezeket a tankönyveket azonban 1829-től kezdődően nem más írta, mint Bolyai Farkas, ezért igazolásul ez ügyben jobb helyre nem is fordulhatnánk, mint az ő tankönyvi célzatú műveihez (Bolyai Farkas 1830, 1832-1833). Csakhogy ezek a művek nem szolgálnak a nézetet igazoló magyarázattal.

Ám még ha a Bolyaiakat körülvevő miliőben kimutatható volna is a háromvonalas jel ismerete, akkor is meg kellene küzdeni a következő nehézséggel. Bolyai János művét nem csupán, és nem is elsősorban a marosvásárhelyi, kolozsvári, vagy tágabban erdélyi tudományos közvéleménynek írta, hanem az európai tudományos közvéleménynek, például Gaussnak. Velük (és persze Gauss-szal) kapcsolatban pedig nem tételezhetjük fel, és Bolyai János sem tehette, hogy ismerik és kézenfekvőnek tekintik mondjuk az erdélyi jelhasználati konvenciót (ha lenne a háromvonalas jel dolgában ilyen). Az *Appendix* jelmagyarázatának éppen az a sajátossága, az az értelme, hogy nem tételez fel ilyesmit (ekkor más jeleket sem kellene értelmeznie), hanem megadja a megadni kívánt jelek értelmét.

Mindent egybevetve bizonyosra vehetjük, hogy a háromvonalas jel addig egyáltalán nem volt olyan módon használatos és általánosan elterjedt a párhuzamosság jelölésére, hogy *ez* – pláne más, Bolyai János által használt és verbálisan interpretált jelekkel összetve – a megcélzott olvasók számára kézenfekvővé tette volna értelmezését, és ezért szükségtelenné a szóbeli kifejtést. Ilyen alapon tehát meglehetősen abszurd volna állítani, hogy Bolyai a kérdéses jelet a párhuzamosság jelölésére, a „parallela" kifejezés kézenfekvő helyettesítőjeként kívánja használni. Ilyesmi volna a helyzet, és ezért könnyebben elfogadható az érvelés, ha Bolyai a mű első paragrafusában a párhuzamosság szokásos kétvonalas jelét használná. Ekkor valóban azt lehetne mondani, hogy támaszkodik egy közismert jelre és a mögött álló jelölési tradícióra, és ez tette szükségtelenné a jelmagyarázatban vagy máshol történő verbális értelmezést. Csakhogy nem ez a helyzet. Egyszerre állítani, hogy Bolyai egy addig nem használt, merőben új jelhez folyamodik a szemléletességtől átitatott régi „parallela" kifejezés helyettesítése céljából (*à la* Salló), és hogy minden további, az ilyen módon történő értelemzést segítő információ híján kézenfekvő (akár a mi számunkra, akár a korabeli olvasó számára) a jól ismert „parallela" kifejezésre utaló jelnek tekinteni — ez legalábbis ellentmondásosnak tűnik. Ennyi erővel ráadásul tetszőleges kifejezést választhatunk, és erről állíthatjuk, hogy a mű háromvonalas jele *azt* hivatott pótolni, hiszen ezt a tetszőleges kifejezést az *Appendix*en belül éppúgy nem kapcsolja semmi a háromvonalas jelhez, mint a „parallelát".

Hasonlóan: a korabeli vagy a Bolyai-filológiában járatlan olvasó számára pontosan úgy nem köti semmi a háromvonalas jelet az *Appendix*en kívüli, Bolyaiakkal kapcsolatos forrásokban található egyik kifejezéshez (mondjuk a „parallelához" vagy az „aszimptotikus parallellához"), ahogyan egy másikhoz sem.

Vagy tetszőlegesen választhatunk és társíthatunk kifejezést a háromvonalas jelhez a Bolyaiakra való tekintet nélkül, azt képviselve, hogy szerintünk a háromvonalas jel ezt a választott dolgot jelenti, ekkor azonban nem a Bolyaiakról és nem Bolyai Jánosról beszélünk. Vagy ragaszkodunk ahhoz, hogy a jel értelme csak a kéziratokból rekonstruálható tudományos alapossággal. Ekkor azonban a háromvonalas szimbólumot nem állíthatjuk be kézenfekvőként, a „parallela” vagy „aszimptotikus parallela” triviális helyettesítőjeként. Sőt: a kéziratok felé fordulás azt sem garantálja előre, hogy e kettő közül valamelyik, és nem egy harmadik terminus helyettesítőjének fog bizonyulni, például a Standard Nézet egyes véleményeivel összhangban a csupasz „aszimptóta” vagy az „aszimptotikus egyenes” pótlékának.

A háromvonalas jel értelmének az *Appendix*től különböző, de a Bolyaiakkal kapcsolatos forrásokból, azaz a kéziratos Bolyai-hagyatékból történő rekonstruálása, majd jelentésének kézenfekvőként történő előadása pedig megintcsak nonszensz lenne. A filológiailag rekonstruált jelentés – azon felül, hogy látni fogjuk: a Standard Nézet rekonstrukciója önmagában is vitatható és korántsem vezet egyértelmű eredményre –, csak a Bolyai-filológusok számára kézenfekvő. Így a háromvonalas jel értelmének kézenfekvőként vagy önmagát értelmezőként történő beállítása képtelenség, hacsak nem akarjuk azt állítani, hogy Bolyai egyenesen a kéziratot kutató történészeknek és filológusoknak írta művét. Ebben az esetben tehát világossá kellene tenni, hogy egy filológiai apparatus segítségével rekonstruált értelemről van szó, ennyiben tehát egyátalán nem kézenfekvő, és el kellene határolni az *Appendix* immanens tartalmától. Rögzíteni kellene, hogy ez nem az *Appendix*, és meg sem volna szabad kísérelni a mű erre alapozott „átírását” vagy ehhez igazított fordítását. Ezt az eredményt, a szóban forgó jel jelentését óvatosan kellene kezelni, és bizonyos értelemben a műtől különválasztva tartani.

Egyelőre úgy zárhatjuk, hogy nincs támpontunk az *Appendix* háromvonalas jelének „parallelaként” vagy „aszimpotikus parallelláként” történő értelmezéséhez. Egyetérthetünk abban, hogy Bolyai valami helyett akarhatta alkalmazni e különös szimbólumot, de a kérdés az, hogy mi helyett? Az ismeretlen jel éppen ismeretlensége és szokatlansága miatt nem engedi meg, hogy valami jól ismert és elterjedt kifejezés kézenfekvő pótléka legyen, hiszen nem utal arra, amit pótolni kíván.

5.2 Második kísérlet: a háromvonalas jel, mint az aszimptóta vagy aszimptotikus egyenes jele

Tovább romlanak a Standard Nézet kilátásai, ha visszatérünk ahhoz az előbb félretett nehézséghez, hogy egyes véleményeket komolyan véve Bolyai a háromvonalas jelet *valójában* az „aszimptóta” vagy „aszimptotikus egyenesek” jelölésére használja, és nem a párhuzamosokéra. Így az a fordulat, hogy „Bolyai a párhuzamos helyett az aszimptótát vagy aszimpotikus egyenest használja” azért veszélyes, mert elmossa, hogy itt arról van szó: *valójában nem használja*. Amiről itt valójában szó van, az megintcsak annak implicit beismerése, hogy a „|||” jel ennyiben legfeljebb az „aszimptótát” vagy „aszimptotikus egyenest” jelenti és helyettesíti, de nem a „parallellát” vagy az „aszimpotikus parallelát”.

Ezért azt mondhatjuk, hogy a nézeten lényegében nem segítene, ha az *Appendix* történetesen valóban támpontot adna (mint ahogy nem fog) az „aszimptóta” vagy „aszimptotikus egyenes” megfelelő változatának és a „|||” jelnek az összekapcsolásához. Nézzük meg, hogy miért.

Ha az *Appendix* valóban fogódzót adna az „aszimptóta” és a „|||” jel az összekapcsolásához, akkor elismerhetnénk, hogy a műben a „|||” jel az „aszimptóta” (vagy az „aszimptotikus egyenes, esetleg az „aszimptotikus nem metsző”) helyettesítésére szolgál, és hogy Bolyai a mű első paragrafusában az ennek megfelelő fogalmat definiálja. Ennél többet azonban nem kellene elismernünk. Mert mit bizonyítana mindez a „parallelus” terminussal kapcsolatban? Hol jönne itt a képbe a „párhuzamos”-nak megfelelő latin terminus egyáltalán? Továbbra is kérdéses volna ugyanis, hogy miért állítható jogosan: Bolyai a „parallela” vagy a „parallela (linea) recta” kifejezések *helyett* használja az „aszimptóta” (vagy „aszimptotikus egyenes”) kifejezéseket. Az „aszimptótától” (vagy az „aszimptotikus egyenestől”) mind az „aszimpotikus parallela”-ig, mind a puszta „parallela”-ig ívelő kapcsolat továbbra is hiányos maradna, miközben éppen a kritikus láncszem váratna továbbra is az igazolásra. Tegyük tehát nyilvánvalóvá: a különös „|||” jel sikeres összekapcsolását az „aszimptóta” kifejezés megfelelő változatával – például az *Appendix* lábjegyzet-hivatkozása révén – önmagában nem fogadhatjuk el a „párhuzamoshoz” vagy „parallelához” vezető láncszemnek – és így az elfogadott nézetet igazoló bizonyítéknak sem.

Ezzel az *Appendix* világára, jelhasználatának belső sajátosságaira épített érveket kimerítettük. Maradnak tehát azok az érvek, amelyek a művön kívüli eszközök és források bevonásával próbálják meg a „|||” szimbólum – vagy esetleg az „aszimptóta”, „aszimptotikus egyenes” – összekapcsolását a „parallelával”.

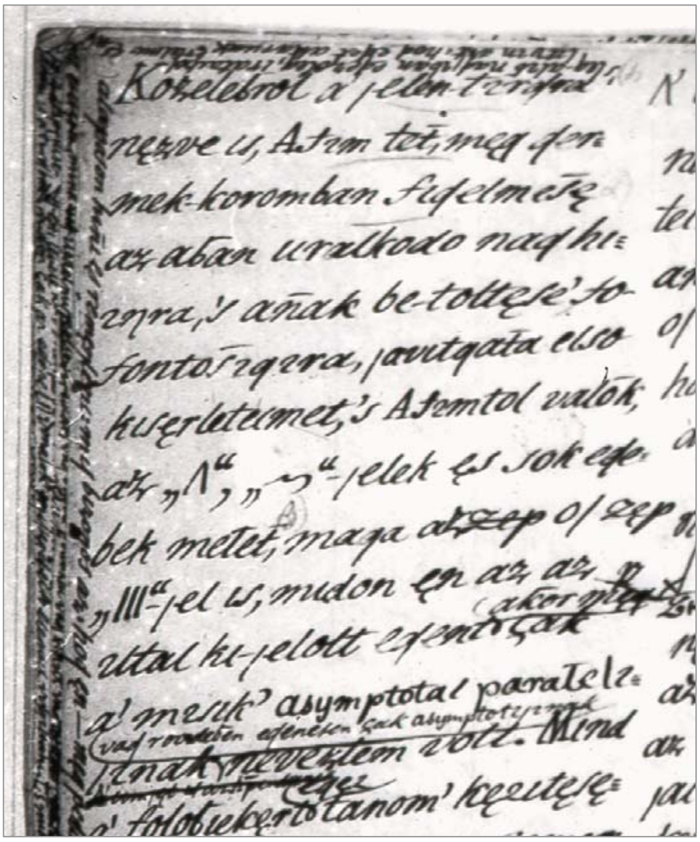
5.3 Harmadik kísérlet: a háromvonalas jel, mint az aszimptotikus paralléla jele

A következőkben tárgyalandó megmentési kísérletnek két jellegzetessége van. Az egyik, ahogyan ez korábban már láthatóvá vált, hogy a Standard Nézet egy ponton további forrásokhoz, azaz az *Appendix* világán kívülre mutató eszközökhöz kénytelen folyamodni a háromvonalas jel verbális interpretálációjához. Ez még az egyébként sikeres összefüggés-teremtés esetén is kényes manővernek minősül, ha annak megalapozására szolgál, hogy Bolyai mit is csinál az *Appendix* első paragrafusában. Egy dolog, hogy mit tesz a műben, míg bizonyos szempontból más dolog, hogy mit tesz a művön kívül, és ez utóbbi hogyan kapcsolódik az előbbihez. Látni fogjuk továbbá, hogy igen sok és jó okunk van arra, hogy a művet jelöléstechnikailag, általánosabban pedig tipográfiailag Bolyai által jóváhagyott kerek, lezárt egésznek tekintsük. De ne szaladjunk ennyire előre, mert a most vizsgálandó érv másik jellegzetessége éppen az, hogy az általam legerősebbnek ítélt bizonyíték a Standard Nézet mellett.

Először is érdemes emlékeztetni rá, hogy a Standard Nézet képviselői gyakran hivatkoznak olyasmire, hogy Bolyai a „párhuzamos” helyett „aszimptotikus párhuzamost” (Dávid 1944: 179), vagy „aszimptotikus egyenest” (Dávid 1944: 40; Tóth 1953: 293) használ, hogy „aszimptótának” az „aszimptotikus párhuzamost” (Dávid 1944: 179), az „aszimptotikus parallelát” (Dobó-Szénássy 1985: 44; Weszely 1981: 65) rövidíti, vagy vele a „párhuzamos egyenest” helyettesíti (Salló 1974: 34-5).

Jelentős különbség van azonban a között, ha Bolyai az „aszimptóta”-t az „aszimptotikus parallela”, és a között, ha az „aszimpotikus egyenes” rövidítésére használja. Az egyik esetben az aszimptótát tényleg az „aszimptotikus parallela” helyett használja rövidítés céljából, a másik esetben nem. Az első esetben az „aszimptóta” Bolyai János szerint is az „aszimptotikus parallela”-t rövidítené és helyettesítené, illetve az előbbit az utóbbi helyett használná, a másik esetben meglehet, hogy mi szeretnénk így látni. Ha azonban arról van szó, hogy szerintünk mi a „parallela”, akkor az a mi parallela-értelmezésünk, és nem a Bolyai-féle „parallela”. Márpedig most az utóbbiról szeretnénk kideríteni, hogy micsoda is valójában. Egyszóval: ha „aszimptóta” bizonyíthatóan az „aszimptotikus parallela” Bolyai-féle rövidítése, akkor az megteremtené a kívánt – és az előző kísérlet végén általam hiányolt – kapcsolatot, míg ha az „aszimptotikus egyenes” rövidítése, akkor nem.

Végeredményben tehát kulcsfontosságú lenne tudni, hogy Bolyai mit mi helyett használ, mit mivel rövidít. Elengedhetetlen lenne itt azt is tudni, hogy mi is a forrás, és hogyan is néz ki pontosan az a szöveg, amelyet idézni látszanak. A baj azonban az, hogy a Standard Nézet idézetszerű körülírásai, azon túl, hogy elég zavarba ejtő változatosságot mutatnak, pontos hivatkozások és forrásmegjelölések nélkül lógnak a levegőben. A változatosság így pontatlanságnak tűnik, amely az „íráshagyományban” történő terjedésből, az egymástól való átvételből látszik fakadni. Mindezek okán rám hárul, hogy megadjam azt a helyet, amely a terjedés kezdőpontjának tűnik. Bedőházi János az első, akinél a kifogásolt állításokhoz hasonló szövegű idézet található (Bedőházi 1897: 193-4). És, bár ő sem adta meg az általa használt forrás elérhetőségét, idézete mégis az eredeti kéziratos forrás jelenlétében készítettnek látszik és forráshűnek hat. Igazi érdeme persze az, hogy végül elvezetett, illetve segített felismerni a Bolyai-kéziratokat őrző terjedelmes mikrofilmanyagban az eredeti kéziratoldal kópiáját. Így lehetőségünkben áll ezzel dolgozni. Forduljunk hát felvilágosításért a kézirat-másolathoz és átiratához (*4. ábra*, valamint *16.F* és *17.F ábrák*):



Közelebbről a jelen tárgyra nézve is, Atyám tett még gyermekkoromban figyelmessé az abban uralkodó nagy hiányra, ’s annak betöltése főfontosságára, javitgatta első kisérleteimet, ’s Atyámtól valók az „∧” [szög – T.J.], „[→]”-jelek[1] és sok egyebek mellett maga az oly szép „|||”-jel is, midőn én az az által kijelölt egyent [értsd: egyenest – T.J. akkor még csak a’ másik’ asymptotai parallelájának, vagy röviden egyenesen csak asymptotájának neveztem volt.

4. ábra. A háromvonalas jel eredete

A kapcsolódó, Bolyai Jánostól származó feljegyzés egyik nem várt érdekessége, hogy a háromvonalas jel eredetére is fényt vet, és kétséget kizáróvá teszi, hogy egy Bolyai Farkas által megalkotott sajátos szimbólumról van szó. Eszerint legfeljebb a háromvonalas jel szűkkörű, a Bolyaiak környezetére kiterjedő ismertségét tételezhetjük fel, és nem a párhuzamosság jelölésének hagyományos kétvonalas jelével a tudományos közvélemény számára egyenértékű ismertségét.

Ezen túlmenően az idézet valóban alátámasztja a háromvonalas szimbólum és az „aszimptotikus parallela" kapcsolatát, továbbá az utóbbi „aszimptóta"-ként való rövidítését. Ámde a szöveg az „akkor még csak" fordulat következtében többféle értelmezési lehetőséget is megenged azzal kapcsolatban, hogy az idők során hogyan változott meg Bolyai felfogása, miközben egyetlen dolgot tesz kétségtelenné: azt, hogy a szóban forgó időszakhoz képest valamilyen irányban változás következett be. A szöveg azonban éppúgy megengedi a „parallela" elkopását az „aszimptóta" javára, mint ahogy az „aszimptóta" leválását is megengedi a „parallela" hátrahagyásával. Az azonban, hogy az „aszimptotikus parallelát" már akkoriban is „aszimptótaként" rövidítette, sokkal inkább abba az irányba mutat, hogy a „parallela" komponens vált fölöslegessé. Azaz: az így jelölt egyenesek később is aszimptóták maradtak, és valószínűleg nem parallelákká váltak – „aszimptotikus parallelaként" pedig a szöveg szerint nem maradhattak. Ez persze azt mutatja, hogy az *Appendix* megformálásának, illetve megjelenésének az idején már nem állt fenn az az állapot, amely szerint indokolt a háromvonalas jelet „aszimptotikus parallela"-ként interpretálni.

Az idézet az *Appendix* alaki és tartalmi megformálását (1829) jóval megelőző időszakra,[46] de még az egyáltalában vett Bolyai-geometria felfedezését (1823) is megelőző vagy korai stádiumára látszik visszautalni. A visszautaló jelleg miatt a korai időszakra jellemző terminológiáról és jelhasználatról tudunk meg valamit, ez azonban kevés közvetlen információt árul el az *Appendix* idején érvényes jel- és kifejezéshasználatról. Az idézetben éppen az marad nyitva, és éppen azt nem tudjuk meg, hogy milyenné vált a kiforrott Bolyai-geometria jel- és fogalomhasználata. Az *Appendix* keletkezésétől, illetve megjelenésétől való időbeli távolság, valamint a szövegértelmezési bizonytalanságok külön-külön is, együttesen pedig pláne kétségessé teszik, hogy sziklaszilárd és egyértelmű kijelentéseket tehetünk a háromvonalas jel művön belüli jelentéséről.

[46] Kiss Elemér datálása (Kiss 1999: 36).

Érdemes még egy dolgot észrevételeznünk. A „parallela”-nak az „aszimptotikus parallela”-ról való és az „aszimptóta”-t hátrahagyó leválása esetén a kifejezés egyszersmind fel is szabadul: olyan lekötetlen terminussá válik, amely esetleg a Bolyai-geometriában, illetve az *Appendix*ben máshol, más értelemben lesz felhasználható. A szöveg értelmezésekor ugyanis fontos, hogy valamilyen fontos változásra kívánja felhívni a figyelmet, méghozzá olyan előrelépésre, amely kihatással volt a fogalmi-terminológiai rendszerre is. A „parallela” máshol, más összefüggésben (és más jelentésben) történő *Appendix*beli alkalmazása megfelel annak a perspektívának, ahonnan a szöveg által jelzett értelmű megjegyzésre érdemessé válik a dolog, azaz, hogy a kezdetek kezdetén Bolyai a ‘|||’ jellel jelölt egyenest „még csak a másik assymptotai parallelájának, vagy röviden assymptotájának nevezte”.
A forrás elemzése a következőképpen összegezhető. A háromvonalas egyenesek végeredményben nem maradtak „aszimptotikus parallelák”: vagy „parallelákká” váltak, vagy „aszimptótákká”. A Standard Nézet nyelvére lefordítva: az idézet szerint Bolyainak a korai stádiumban képviselt és SN_B-hez illeszkedő párhuzamosság-felfogástól el kellett mozdulnia – vagy a Lobacsevszkijével megegyező értelmezés felé (ezt képviseli a nézet SN_L keretében), vagy a „parallelának” a három vonalas egyenesekről történő leválasztása és elhagyása felé (ezt nem képviseli). A Standard Nézet SN_L, illetve SN_B változatainak plauzibilitását, a forrás minden közvetettségével és két- vagy többértelműségével együtt, leginkább ez a bizonyíték mutatja. Vagy úgy értékeljük, hogy e bizonyíték ugyanannyira mutatja mindkét változat plauzibilitását, de akkor ez önmagában is probléma, hiszen SN_L és SN_B mégiscsak különböző dolgokat állít, vagy úgy, hogy a szöveg értelmezése egy hajszálnyival erősebben szól SN_L mellett – ez azonban SN_B-t egyúttal gyengíti is.

5.4 Negyedik kísérlet: az első nem metsző egyenes, mint a Szász Károly-féle elpattanó egyenes vagy legközelebbi parallela

A következő forrással és a rá alapozott érvvel megint egy lépést távolodunk — az *Appendix*től éppúgy, mint Bolyaitól. Távolsága és közvetettsége ellenére mégis érdemes számot vetnünk vele, több okból is. Részint azért, mert az „aszimptotikus parallelák vagy röviden aszimptóták” fordulatot tartalmazó és imént vizsgált szöveg hasonmását nemegyszer a következő, Bolyaitól idézett szöveghez fűzve találjuk:[47]

[47] Lásd még és v. ö. (Weszely 1981: 65), valamint (Kálmán 1989: 89).

> E fontos és termékeny gondolatok keletkezésére János és SZÁSZ Károly már említett baráti érintkezésének nagyjelentőségű befolyása volt. A parallelák elméletéről «vasár-, ünnep- és általában kimenőnapokon» folytatott beszélgetéseik közben egyszer SZÁSZnak a következő «szellemes, valóban geometriai és a XI. axiómától független tér-tudománya helyes kifejtésének alapjául szolgáló eszméje volt, hogy ha azt az egyenest, melyet valamely *b* pontból (…) valamely másik egyenesnek valamely *c* pontján keresztül húztunk, a két egyenes meghatározta síkban ama *b* pont körül forgatjuk, akkor a forgó egyenes, mely a másik *am* egyenest egy ideig metszi, attól egy bizonyos helyzetben – SZÁSZ kifejezésével élve – **elpattan**, és e [*bn*] helyzetben ő [mármint Szász Károly – T. J.] legközelebbi paralellának vagy nem vágónak nevezte». Később János ezt az egyenest asymptotikus parallelának vagy röviden *asymptotának* nevezte.
>
> Máskor SZÁSZ azt a kérdést vetette fel «vajjon abból, hogy *bn* (…) az *am* asymptotája, nem következik-e, hogy *am*=*bn*», és erre – mondja János – «rögtön nemmel feleltem».[48]

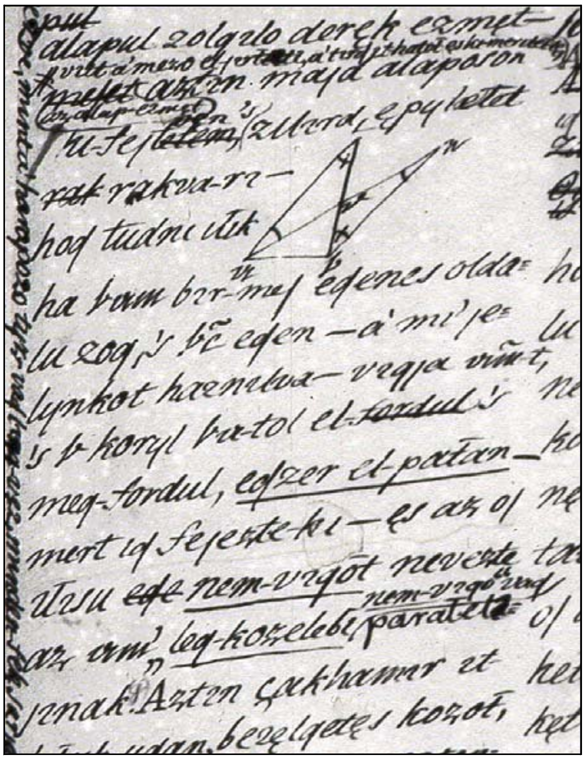
Bolyai a (belső) idézetben visszaemlékezik azokra az eredményekre, amelyekre társával, Szász Károllyal jutottak a bécsi Mérnökakadémián együtt töltött évek (1819-1820) alatt. A Bolyaitól származó (belső) idézet igen jól körülírja az *Appendix* első paragrafusában szereplő, forgatás során először nem metsző egyenest; első látásra valamelyest igazolni látszik a bevett nézetet. Emellett az idézetben megtalálható az először nem metsző egyenes újabb elliptikus körülírása is: az „elpattanó egyenesek”. Az elpattanó egyenest pedig hagyományosan a Bolyai-féle párhuzamos szemléletes, a felfedezés heurisztikáját tükröző megnevezésének tekintik (Prékopa 2003: 13), és azonosítják is vele (Kálmán 1989: 95, Weszely 1981: 84). A gondolatmenet úgy festhet, hogy az „elpattanó egyenestől” a „legközelebbi parallelán vagy nem vágón” keresztül egyenesen vezet az út az „aszimptotikus paralleláig”, majd az utóbbit rövidítő „aszimptótáig”.[49] Az utolsó lépéskor felmerülő nehézségeket már láttuk. Nézzük hát, hogy a megelőzők mennyiben plauzibilasak, vagy mennyiben válaszolják meg a korábban nyitva maradt kérdéseket.

Mivel a forrás azonosíthatóságával kapcsolatos gondok hasonlatosak az előző megmentési kísérletnél látottakhoz, ezért ugyanazt az eljárást érdemes követnünk: azzal a

[48] Idézi Stackel (1914: 77-8). A belső, Bolyaitól származó idézetek Stackel saját hivatkozása szerint Bolyai János *A tér tudománya* címen elkezdett számos tervezetének az egyik, 1851-es bevezetés-kezdeményéből valók. Lásd Stackel (1914: 236, 1914: 276).

[49] Emlékeztetnünk kell rá, hogy Stackel nem tekinthető a Standard Nézet képviselőjének, így a rekonstruált gondolatmenet neki nem tulajdonítható. Tulajdonítható azonban azoknak, akik az idézett szöveget tőle átveszik (Kálmán, Weszely).

rendelkezésünkre álló kéziratos forrással célszerű dolgoznunk, amely eléggé hasonlít az előbb idézett szövegre ahhoz, hogy eredetijének tekinthessük (*5. ábra*, valamint *14.F* és *15.F ábrák*):



alapul szolgáló derék eszmét –
(…)
melyet aztán majd alaposon
az alap-eszmét
ki-fejtvén, ’s szilárd épületet rakva rá –
hogy tudni illik ha *bam* bármely egyenes oldalú szög, ‘s *bc* egyen – a’ mi’ jelünköt használva – vágja *am*-t, ‘s *b* körül *ba*-tól el-(~~fordul~~)- ‘s meg-fordul, egyszer elpattan – mert így fejezte ki – és az oly állású ~~egye~~ nem-vágót nevezte az *am’* leg-közelebbi (nem-vágó vagy) parallelájának. Aztán csakhamar…

5. ábra. Az elpattanó egyenesek[50]

A „nem-vágó” betoldásának utólagos jellege a „legközelebbi nem vágó vagy parallela” szétbonthatóságát sugallja: Szász a szóban forgó egyenest „legközelebbi parallelának” vagy „legközelebbi nem vágónak” (értsd: „legközelebbi nem metszőnek”) nevezte.

A standard felfogást támogató gondolatmenet veleje a következőképpen hangozhat. Ha Szász Károly a Bolyaival való közös matematikai tevékenysége során „legközelebbi nem vágónak vagy paralellának” hívta a szóban forgó egyenest, akkor kézenfekvőnek tűnik, hogy Bolyai is így nevezte.

[50] „#” jellel jelölt sor a kéziratlap szélén található szöveghez fűzött Bolyai János-féle megjegyzés, amely tartalmilag nem az általunk elemzett részre vonatkozik.

Az idézet egy-egy fontos részlete közvetett eszközök révén külön-külön is hitelesíthető. Egyrészt az „elpattanó egyenesekkel” kapcsolatos szóhasználat megerősítést nyer Bolyai Farkas egyik, Bolyai Jánosnak szánt válaszából:

> Megvallom, hogy egyenesed elpattanásától nem várok semmit. Azt vélem, ezeken a tájakon is jártam; e pokoli holt tenger minden szirtje mellett elhajóztam és mindenhonnan szétzúzott árboczczal és elfoszlott vitorlákkal tértem vissza … (Stackel 1914: 79).[51]

Ez csakugyan azt mutatja, hogy akkoriban Szász kifejezései egyben Bolyai kifejezései is voltak. A szöveg másik, nem vágó egyenesekre vonatkozó részét pedig Szász Károly 1852-es keltezésű jegyzetfüzete igazolja, amelyben a párhuzamosakról (ezt a magyar nyelvújítási kifejezést használva!) mint nem vágókról beszél:

> §11. Három egyenes, melyek közül kettő bármeddig nyújtva is egymást nem vágja, a harmadik pedig mindegyiket. Az egymást nem vágó egyenesek neveztetnek párhuzamosnak, az őket vágó egyenes pedig mindegyikkel szöget formál.[52] (Szász 1852, MTAK, Bolyai–gyűjtemény, K 30/35-ös jelzet).

Ha abból indulunk ki, hogy a „legközelebbi parallela” és a „legközelebbi nem vágó” kifejezések egészükben és részeikben is azonos jelentésűek, akkor a „parallela” azonos jelentésű, mint a „nem vágó” (a továbbiakban „nem metszőt” használok helyette). Így a „parallela” (vagy „párhuzamos”) jelentése „nem metsző”. Úgy tűnik, hogy a „legközelebbi parallela” és az „aszimptotikus parallela” a Bolyai-geometrián belül a nem metsző egyenesek halmazából ugyanazokat a (fél)egyeneseket választja ki. Persze ha a Standard Nézet a védelmet erre a forrásra építi, akkor tisztában kell lennie vele, hogy az eredmény SN_L-re nézve kedvezőtlen. Ha ugyanis az „aszimptotikus parallela” és a „legközelebbi parallela”

---

[51] Lásd még (Weszely 1981: 66), valamint (Stackel 1900: 247).

[52] Lásd még Fráter (1968: 90). Szász Károly az egyik kéziratos jegyzetében (MTAK, Bolyai–gyűjtemény, K 30/26-ös jelzet) ugyanazt a Bolyai Farkas által megalkotott és Bolyaiakra jellemző sajátos határértékjelet használja, mint amelyről korábban az *5.3* pontban szó volt. A K 30/25-ös jelzet alatt számon tartott Szász Károly-féle kéziratos geometriai jegyzetek érdekessége, hogy ugyanazt az elliptikus alakot használja az „egyenesek” megnevezésére („egyen”), mint amely a Bolyaiakra is jellemző volt. Ezen kívül a szöget ugyanazt a szimbólummal jelöli Szász ('$\wedge$'), mint amely az *Appendix*ben és *Tentamen*ben is alkalmazásra kerül. Ugyanakkor a párhuzamos egyenesek jelölésére a kétvonalas jelet ('||') veszi igénybe. Az, hogy Szász ugyanebben a kéziratban a „párhuzamos” magyar nyelvújítási kifejezést alkalmazza, azért figyelemre méltó, mert ebben eltér a Bolyaiaktól. Dokumentálható, hogy Bolyai Farkas ismerte ezt a szót, de a „parallela” helyett nem ezt használta. Hogy mit, később látni fogjuk. A Bolyai János-féle nyelvújítási kifejezés rekonstruálása persze nehezebb ügy. Erre tettem kísérletet Tanács (2005)-ben. Ha a rekonstrukció helytálló, akkor Bolyai János nyelvújítási megfelelője a „parallela”-ra nem a „párhuzamos” lenne.

specifikáló és ugyanazt a (fél)egyenest kiválasztó tulajdonságát hangsúlyozzuk, akkor az SN_B álláspont igazát látjuk megerősítve.

A most vizsgált forrás egyik lehetséges értelmezése abba az irányba mutat, hogy az *Appendix* első paragrafusában körülírt egyeneseket verbálisan a „legközelebbi parallela" kifejezéssel interpretálhassuk. A baj az, hogy ezzel együtt is sok kérdés marad nyitva, és számos nehézséget kell félretenni. Ezek egyrésze hasonló az előző kísérletnél felmerült nehézségekhez, más részük éppen a kettő egymás mellé helyezéséből fakad, a harmadik típusú pedig sajátosan ezt a szöveget érinti.

Ami az első típusú nehézséget illeti: a forrás az *Appendix* fogalmi és jelöléstechnikai megformálásától (1829) időben távolra utal vissza. Ennélfogva keveset árul el a mű kidolgozott formában való megjelenése idején érvényes terminológiáról. Másrészt, és ez átvezet a második típusú nehézséghez, nem ad támpontot ahhoz, hogy időrendileg egymáshoz viszonyíthassuk és elrendezhessük a két visszatekintést. Nem tudjuk, melyik írja le az előbbi és melyik a későbbi állapotot. Márpedig ez fontos lenne, hiszen a két szöveg nem egyeztethető össze. Ily módon a két forrás eredményeiben kioltani látszik egymást. Amennyire megerősíti az egyik szövegértelmezés a Standard Nézet egyik változatát és gyengíti a másikat, pont annyira erősíti a másik szövegértelmezés a másik változatot és gyengíti az egyiket.

És végül a most vizsgált forrás esetében mégiscsak ott marad az a bizonytalanság – ez a harmadik típusú nehézség –, hogy a primer forrás szövege mégiscsak talányos Bolyai János parallela-felfogását illetően. Nem teszi teljesen egyértelművé, hogy ez tényleg az ő terminológiája-e is egyben vagy sem: Bolyai ugyanis kissé távolságtartó módon fogalmaz. Elfogadva, hogy az „elpattanó egyenes" egyaránt része volt Szász és Bolyai János kifejezéstárának – ahogyan azt a Bolyai Farkas-féle idézet mutatja –, valamint azt, hogy Szász az ily módon jelölt egyenest „legközelebbi nem vágónak" vagy „legközelebbi parallelának" is nevezte, még nem válik kétségtelenné, hogy Bolyai is így nevezte — akkor és később.

Mielőtt ezen – a maguk módján fontos, de egymáshoz képest időrendileg nehezen rendezhető, többértelmű és egymást eredményeikben kioltó – források szövegértelmezésének útvesztőjében végleg elvesznénk, haladjunk tovább. Az utóbbi két kísérlettel szembeni legsarkalatosabb ellenvetésem ugyanis nem a szövegértelmezésre támaszkodik, hanem más természetű. A két kísérlet során felhasznált „másidejű", visszautaló, de az *Appendix*re közvetlenül nem hivatkozó források kevesebbet nyomnak a latban az egyértelműen beszélő elsődleges forrásoknál: magánál az *Appendix*nél és a vele egyidejű, hozzá kapcsolódó vagy egyenesen rá vonatkozó, egyértelmű egyéb forrásoknál.

Emiatt is célravezető áttérni azoknak az ellenvetéseknek a tárgyalására, amelyek az *Appendix*, mint elsődleges forrás státuszának megkérdőjelezésére irányulhatnak, megpróbálva azt elvitatni, hogy a mű, mint elsődleges forrás valóban névértéken vehető és megbízható. Érdemes persze felfigyelni arra, hogy az ilyen típusú ellenvetések nem az első paragrafusban valóban felfedezhető „parallela" terminust mutatnák meg, hanem csak – legjobb esetben – azt képesek megmagyarázni, hogy miért nincs ott, ha nincs. Ilyesformán az általam képviselt tézis közvetett beismerésének számítanának. Az ellenvetések elhárítása egyúttal azt a kérdést is megválaszolja, hogy miért kell az *Appendix*et és a kapcsolódó egyidejű elsődleges forrásokat bizonyítóbb erejűnek tekintenünk, mint az előző két megmentési kísérlet alapját képező némiképp homályos szövegeket.

5.5 Ötödik kísérlet: az *Appendix* függelék-jellege

Az *Appendix* megjelenésének körülményeiből alkalomadtán a következő ellenvetések volnának származtathatók. Egyrészt felmerülhetne, hogy a mű Bolyai János apja, Bolyai Farkas *Tentamen*jének függelékeként jelent meg – innen ered, hogy Bolyai János műve a latin *appendix* (függelék) címen vált ismertté. Ilyesformán képviselhető, hogy a mű bizonyos sajátosságai (ha úgy tetszik: esetleges hiányosságai és hibái) a *Tentamen*nel való közös megjelenésnek tudhatók be. Ezzel összefüggésben egyrészt annak tulajdoníthatók, hogy a *Tentamen* megjelenését – és ebből kifolyólag, látni is fogjuk, jelentős mértéken az *Appendix*ét is – Bolyai Farkas gondozta, másrészt pedig a korabeli nyomdatechnika Bolyai Farkas által – többek között Gaussnak is – sokat panaszolt elmaradottságának. Nézzük előbb a megjelenés körülményeivel kapcsolatos kesergéseket.

Bolyai Farkas Gausshoz írott, 1835. április 20-i keltezésű leveléből:

> De munkám két kötetének megjelenése után is több mint egy esztendőt kellett várnom az ábrákra. És még azután is sokáig haboztam, vajon nem méltatlan-e Hozzád részint a nyomás (ez mutatja, hol állunk mi még), részint bizonyos nem kívánatos rendetlenség és a kicsiny, szerfelett természetesen s gazosan nőtt virágok miatt, melyek a Te fenséges cédrusaid alatt még kisebbek lesznek. (Benkő 1975: 176).
>
> Sajnálom, hogy nem nyomattam a Te részedre egy példányt szép papírra és nem köttettem be másképpen, már amennyire a mi rossz könyvkötőinktől telik. (…) Mindenesetre

kötelességemnek tartottam Veled közölni, különben még az a jó is, ami benne foglaltatik, részint a forma, részint némely hibák, részint a zavaros fejek okán valójában elsüllyedne. (Benkő 1975: 177).

Ha a rossz (jóllehet meglehetősen nagy) nyomás szemeidet (az Igazság templomának ékszereit) nem erőltetné meg s az erre szánt idő nem templomrablás volna, bátorkodnám a Te ítéletedet kikérni (…) Mindenestre bevallom, hogy fáj nekem ez a kérés; ha a nyomás jó s az írásmód jobb volna, semmiség volna számodra, ami nekem nagynak tetszik, így azonban semmit sem mondhatok. (Benkő 1975: 181).

Bolyai Farkas Gausshoz írott, 1836. október 3-i keltezésű leveléből:

Hogy mint áll nálunk a Matematika, ez mutatja: egy most magyarul megjelent munka az Aritmetika és Algebra alapelemeiről elnyerte a Tudós Társaság kétszáz aranyos díját, pedig egyéb érdeme nincs e munkának, mint hogy Bécsben szépen és helyesen nyomták; híján van a legcsekélyebb eredetiségnek, éleselméjűségnek, semmit se tisztáz, nyoma sincs a tömörségnek, tartalma csekély. (Benkő 1975: 188-9).

A megjelenés körülményeit figyelembe véve pedig azt sem lehet kizárni, hogy a mű tipográfiai gondozása nem viseli magán Bolyai Farkas kezének nyomait: felfogásának öntudatlan lenyomatát, vagy szándékos (de nem szántszándékkal korrumpáló) beavatkozásának következményeit. Bolyai Farkas ugyanis, mint köztudott, nem fogadta el „teljes mértékben" a fia eredményeit – éppen emiatt küldték a művet bírálatra Gausshoz. Bolyai Farkas elutasítása, legalábbis saját nézőpontja szerint, matematikailag indokolt volt; „finomabb" érvei pedig tényleg matematikai-geometriai természetűek voltak.[53] Bolyai Farkast összességében tehát egyfelől fia eredményeinek értő olvasójaként és kritikusaként kell számba vennünk, másrészről azonban olyasvalakiként, aki nem azonosult teljes mértékben az *Appendix*ben foglaltakkal. Az *Appendix* egynémely folyományát pedig, saját bevallása szerint, némely ponton nem értette és nem tudta követni.

A II. kötet [a *Tentamen* II. kötete – T. J.] végén az elsőben használt egynémely fogalmak tisztázása mellett megvan a két trigonometria bizonyos megegyezése is fiam felfogása szerint. Szívesen kinyomattam volna a tetradéder megoldását is (melyre fiam egy évvel az Appendix

[53] Bolyai Farkas fenntartásait lásd például a Gausshoz írott, 1831. június 20-i, az *Appendix*et kísérő levélben (Benkő 1975: 172-3). A közöttük fennálló matematikai véleménykülönbséget illetően lásd még Stackel (1914: 84-5), uő. (1914: 87), uő. (1914: 239).

kinyomtatása előtt rájött), de a képletek, amiket láttam, túlságosan bonyolultak voltak, és én nem tudom őket.[54] (Benkő 1975: 178-9).

A mű tartalmi elutasítása és következményeinek, illetve matematikai apparátusának korántsem maradéktalan megértése felvethetik annak lehetőségét, hogy Bolyai Farkas nem teljesen látta át az *Appendix* minden részletét és azok jelentőségét, és ha nem is tökéletesen, de legalábbis részlegesen félreértette fia munkáját. Nem vethető el tehát a gondolat, hogy a mű megjelenését gondozó Bolyai Farkas, a lehető legjobb szándéktól vezérelve, egyik-másik szempontból akaratlanul is a saját szája ízéhez igazította a művet.

Ezen kívül hozzászámíthatjuk a dologhoz, hogy Bolyai Jánosnak, éppen apja sürgetésére, sietősen kellett művét megjelentetésre alkalmas állapotba hozni. A sietség megmagyarázhatja a mű esetleges hiányosságait. Így például azt, hogy miért hiányzik a háromvonalas szimbólum az *Explicatio signorum*ból, és miért kerül bevezetésre és alkalmazásra – a többi jelhez képest szokatlanul – terminológiai interpretáció nélkül. Ez egyben indoklásul szolgálhatna arra is, hogy miért vonhatunk be az *Appendix* filológiai értelmezésének céljából a művön kívülről származó filológiai adatokat és összefüggéseket.

Összefoglalva: amíg tehát az egyik oldalról az vethető fel, hogy némiképp Bolyai Farkas „munkáját”, jelöléstechnikai és fogalmi apparátusát látjuk viszont, addig a másik oldalról az, hogy Bolyai János műve fogalmilag és jelöléstechnikailag nem teljesen befejezett, netalán hiányos. Ezek a lehetőségek persze nem zárhatók ki, azonban tényszerűségüket bizonyítani kell. Az első vélelmezés igazolásához a beavatkozás tulajdonképpeni megtörténtét – horderejét, de leginkább tényleges mikéntjét; míg a második gyanú esetében a mű befejezetlenségének tényét, de legfőképpen jellegét.

Úgy vélem azonban, hogy a dokumentumok csakúgy, mint a Bolyai János szigorúságáról – éppen a Standard Nézet által – kialakított kép az előbbi feltételezések ellen szólnak.

Mindenekelőtt: köztudott, hogy már 1831-ben, Bolyai Farkas művének 1832-es megjelenése előtt készültek Bolyai János művéből a *Tentamen*től különválasztott, önállóan kötött példányok. Ezek címe értelemszerűen nem *Appendix*, hanem *Scientia Spatii* (*A tér tudománya*). Gaussnak is ilyen különválasztott példányokat (összesen kettőt, mert az első elveszett) küldtek el véleményezésre. Bolyai Farkas a következőket írja Gaussnak abban az 1832. január 16-i keltezésű levélben, amelyet az elveszett első példány pótlása céljából küldött másodikhoz mellékelt:

---

[54] Bolyai Farkas 1835. április 20-i levele Gausshoz.

> A fiam nem volt itt mikor kis munkáját nyomták, az Erratát (hátul található) ő nyomtattatta. Én nagy részüket tollal korrigáltam, hogy Neked kevesebb alkalmatlanságot okozzak. (Benkő 1975: 175).[55]

Ez persze alátámasztja, hogy Bolyai János tényleg nem volt jelen az *Appendix* (vagy *Scientia Spatii*) nyomdai munkálatainál, de Bolyai János *látta* a címlapon kívül minden másban megegyező példányokat, megjelenésüket *jóváhagyta*, végül pedig az *Erratá*ban (*Hibajegyzék*) elvégezte az általa szükségesnek tartott korrekciókat, illetve kiegészítéseket. Ennek fényében az *Appendix Tentamen*hez kötött példányaira éppúgy, mint a tőle különválasztott és önállóan kötött *Scientia Spatii* című, egyébként az előbbivel azonos példányokra úgy kell tekintenünk, hogy az *Erratá*jukkal együtt teljes egészet alkotnak: a mű és hibajegyzéke együttesen minden információt tartalmaz, amely a szerző szándéka szerint a mű verbális interpretációjához szükséges lehet. Hiány, illetve tévedés sem Bolyai Farkasra, sem a közös megjelenés következményeire, sem a sietségre nem hárítható. Ha Bolyai János úgy szerette volna, hogy az értelmezés szempontjából korántsem szokásos háromvonalas jelet szó szerint „parallelának" vagy hasonlónak értelmezzék, akkor ezt az *Erratá*ban a jelmagyarázathoz vagy az első paragrafushoz fűzött kiegészítésben megtehette volna. De a jelek szerint nem tette, ugyanis a nézetet alátámasztó kiegészítés itt sem található (*9.F ábra* és *10. F ábra*). A bennünket foglalkoztató kérdés eldöntése érdekében tehát nyugodtan támaszkodhatunk az *Appendix*-facsimile azon elterjedt és ezért könnyen hozzáférhető kiadásaira (Biás 1907; Kárteszi 1973; Kárteszi és Szénássy 1987; Kincses és tsai 2002; Gray 2004), amely az *Erratá*t is magában foglalja – ezek ugyanis a jelöléstechnikailag és tipográfiailag hiánytalan, befejezett mű reprintjei. Azonban pontosan ezt tettük eddig is: a cáfolat, illetve a vizsgálat során pontosan az eredeti elsődleges forrás alakhű reprintjére támaszkodtunk (Kárteszi 1973: 39-67).

A kétségek végérvényes eloszlatását biztosítja a *Scientia Spatii* azon példánya is (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/3-as jelzet), amelyet Bolyai János csatolt a János főherceghez 1832-ben írott folyamodványához. Ehhez a példányhoz az ábrákat Bolyai János rajzolta (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/2-as jelzet).[56] A nyomtatott, *Tentamen*től különválaszott latin példányhoz a címlapot Bolyai saját kezűleg készítette, továbbá a művet egy-két helyen kézírással korrigálta. *A standard felfogást megerősítő javítást vagy kiegészítést azonban nem találunk e példányban sem!*

---

[55] Az eredeti német level közlését lásd Schmidt és Stackel (1899: 107).
[56] A forrásleírásokat lásd még Fráter (1968: 41-2), valamint az irodalomjegyzékben.

Ugyanerre az eredményre vezet a latinul írt *Appendix*ről Bolyai által készített és szintén a folyamodványhoz csatolt német nyelvű átdolgozás (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/1-as jelzet) tanulmányozása is. A Bolyai-féle átdolgozás teljes egészében kézzel írott munka, amelynek címe: *Raumlehre* (*Tértan*). A mű nem egy az egyben fordítása a *Scientia Spatii*nak, hanem Bolyai az átültetés során bizonyos változtatásokat hajtott végre. A *Raumlehre* első harmincegy paragrafusa néhány helytől eltekintve hű áttétele az eredetinek (de például az *Appendix* harmadik paragrafusa a német változatban hiányzik, továbbá a hetedik paragrafus bizonyítása során az *Appendix Erratá*jában javasolt második és harmadik esetek felcserélését elvégezte), a 32. és a 33. paragrafusok jelentősen eltérnek a latin eredetitől, a 34-43. paragrafusok pedig teljesen hiányoznak belőle.[57] Az átdolgozás során azonban sem a jelmagyarázatban, sem a jel- és terminushasználatban nem élt a bevett nézetet igazoló változtatással (*43.F* és *44.F* ábrák).[58]

Összességében tehát úgy tűnik, az *Appendix* legkülönbözőbb változatai (*Scientia Spatii* és *Raumlehre*) egyaránt azt támasztják alá, hogy az első paragrafussal összefüggésben szó sincs „paralleláról" (és persze „aszimptótáról" sem), miközben a forgatás során először nem metsző (fél)egyenes jelölésére továbbra is a háromvonalas jelet használja. A háromvonalas jel az említett változatok jelmagyarázatában sem szerepel. A Bolyai által jóváhagyott fő (nyomtatási) változat, továbbá azok az egyedi példányok, amelyek címbejegyzését saját maga készítette – mint például a János főhercegnek küldött példány, vagy a saját példányaként számon tartott darab (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, 545.091-es jelzet) is – végül pedig a német átdolgozás egyaránt a „parallela" (és persze az „aszimptóta") terminus első paragrafusbeli hiányát mutatják. Az *Appendix* függelék-jellegére történő esetleges hivatkozás csak növelné azon művek és példányok számát, amelyek tételesen mondanak ellent a nézet álláspontjának, miközben a nyomdai figyelmetlenségre, az akár Bolyai Farkas, akár Bolyai János tévedésére, vagy a sietségre és a mű befejezettlenségére hivatkozás egyre képtelenebbé válna. A „hitelesített" *Appendix*-példányok és változatok kizárják, hogy a háromvonalas szimbólum dolgában megvalósított jelhasználatot csakúgy, mint a „parallela" (és az „aszimptóta") első paragrafusbeli mellőzését ne megfontolt és tudatos tevékenység eredményének tekintsük. Pontosan ez felel meg annak a képnek, amelyet a standard felfogás Bolyai „szigorúságáról" kialakított, és amelyet akkor is illene komolyan vennünk, ha nem áll rendelkezésünkre ilyen mennyiségben az eredeti pontosságát hitelesítő redundáns forrás.

[57] Lásd Stackel (1914/2:197-199).
[58] A Stackel-féle közlés Rados-féle fordításáról (*40.F* és *41.F* ábrák) még lesz szó.

5.6 Hatodik kísérlet: az „aszimptótára” utaló lábjegyzet-hivatkozás az *Appendix*ben

Láttuk, hogy a „párhuzamos” (érvelésünk szerint pedig ez a „parallela”) hiányát legnyíltabban beismerő Salló azt állította: a „’párhuzamos egyenes’, ill. ’párhuzamos’ kifejezést BOLYAI J. az ’aszimptóta’ szóval helyettesíti és ezt is csak egyszer használja (egy lábjegyzetben), a szövegben mindig ||| jel fordul elő” (Salló 1974: 34).[59] Azt is láttuk, hogy az elfogadott nézeten nem sokat segítene a szövegben előforduló ‘|||’ jel és az „aszimptóta” kifejezés között bármilyen módon, akár lábjegyzet révén, akár máshogy létrehozott kapcsolat. A keresett szó, a „parallela” helye továbbra is üres maradna. Mindamellett egy ilyen *Appendix*beli lábjegyzet-hivatkozás reménykeltő lehet: talán olyan példány is van, amelyben a lábjegyzet-hivatkozás az „aszimptotikus parallelát”, vagy szerencsésebb esetben a „parallelát” tartalmazza.
Tegyük egy pillanatra mérlegelés tárgyává, hogy milyen helyzet állna elő, ha ilyesmit tartalmazó példány vagy példányok kerülnének elő. Ezek önmagukban tekintve alátámasztanák a bevett nézet egyik vagy másik változatát, míg a facsimile-kiadásokból ismeretes, könnyen hozzáférhető példány, valamint a Bolyai által láttamozott egyedi példányok és a német átdolgozás nem. Ebben az esetben a nyilvánvaló különbségek önmagukban tekintve – a különbségeket magyarázó elsődleges források nélkül – igen komoly nehézségek elé állítanának bennünket. Egyfelől ugyanis magyarázatra szorulna az előbbi számos, Bolyai által hitelesített példány, másrészt a nézetet igazoló sajátos példány (vagy példányok) és azok létrejötte. Ebben az esetben tehát meg kellene magyarázni az előbb felsorolt példányokban mutatkozó hiányt, lehetőleg Bolyaitól eredő és elsődleges forrásokból származó szöveggekkel, továbbá bizonyítani kellene a (remélhetőelg a „parallela”, az „aszimptotikus parallela” vagy az „aszimptóta” közül csak az egyikét tartalmazó) lábjegyzet

[59] Tóth Imre korábban látott idézetében (*2. táblázat*) kissé homályosan utal az *Appendix* első paragrafusára: egyrészt úgy, mintha ott a „párhuzamosság” definícióját találnánk, másrészt úgy, hogy ott valójában csak az „aszimptota” vagy „aszimptotikus” kifejezés várható. Az idézet szerint: „Az így definiált párhuzamosokat Bolyai plasztikusan „*aszimptotikus*”*⁾ egyeneseknek nevezi, és szimbolikusan az alábbi módon jelöli: a ||| b.” (Tóth 1953: 293). Tóth az idézet *⁾-al jelölt kifejezéshez kapcsolja saját végjegyzet-hivatkozását, és itt az *Appendix* első paragrafusát adja meg. Ily módon Tóth hivatkozási apparátusa azt sugallja, hogy az *Appendix* első paragrafusa valamilyen módon ténylegesen tartalmazza vagy a művön belül kapcsolatba hozható az „aszimpotóta” kifejezéssel.

hiteles, szintén Bolyai Jánostól eredő voltát. A „parallelát" vagy „aszimptotikus parallelát" tartalmazó lábjegyzet-hivatkozás – az összes többi „hiteles" példányban mutatkozó hiány miatt – nem billentené a mérleg nyelvét végérvényesen a bevett nézet oldalára, mindazonáltal igen ellentmondásos helyzet elé állítana bennünket. Ennél az „aszimptotát" tartalmazó lábjegyzet-hivatkozás jóval kisebb bonyodalmat okozna, hiszen a „parallela" helyét továbbra is üresen hagyná.

Mind a felmerülő gondok, mind az őket eloszlatni képes magyarázatok tekintetében ugyanebben a helyzet találnánk magunkat, ha olyan példány(ok)ra lelnénk, amely(ek) a szóban forgó kifejezést a főszövegben vagy a jelmagyarázatban tartalmaznák.

Salló persze ennél kevesebbel kecsegtet: azzal csupán, hogy létezik olyan példány, amelyben az „aszimptótát" legalább a lábjegyzet-hivatkozásban megtaláljuk. Ez még mindig azzal a várakozással tölthet el bennünket, hogy az egyes példányok között komoly, tartalminak minősülő megjelenésbeli különbségek lehetnek. *Akár* olyanok is, amelyekben esetleg a „parallela" valamilyen formában szerepel. Az aszimptóta-hivatkozást tartalmazó példány legalább az egymásra épülő remények sorozatának első láncszemét igazolná. Márpedig Salló – és némiképp Tóth megjegyzései – egy ilyen példány létezését sugallhatják. Ha még *ilyen* példány sem mutatható fel, akkor már komolyabb a baj – bár az, hogy valaha volt, hiszen Sallónak látnia kellett, ha egyszer hivatkozott rá, továbbra is a bizakodás alapjául szolgálhat.

Nos: én most kívánom megmutatni, hogy az „aszimptóta" első paragrafusbeli lábjegyzet-hivatkozása délibáb, és hogy az ezzel kapcsolatos várakozás hiú ábránd. A káprázat eloszlatása pedig tovább nehezíti, hogy a lábjegyzetben szereplő „aszimptóta" kifejezésről az „aszimptotikus parallelára" történő (egyébként indokolatlan) ugrással kíséreljük meg védeni az első paragrafusban a „|||" szimbólummal jelölt (fél)egyenesek verbális interpretációját.

Salló szerint tehát Bolyai János az *Appendix* lábjegyzetében adja meg a „|||" szimbólum értelmét. Több mint sajnálatos azonban, hogy nem specifikálja e példány adatait, illetve elérhetőségét. Mindazonáltal azt sem jelzi, hogy ennek valamilyen rendhagyó példánynak kellene lennie. Ezért elvileg úgy tekinthető, hogy állítása igaz bármely példányra, így például arra a „mintapéldányra" is, amely a facsimile-másolat alapjául szolgált és azután a sorozatos reprodukció következtében lényegében a mű standard közlésévé vált. Ámde Salló állítása erre a példányra nem igaz: a műben szó sincs „aszimptótára" utaló lábjegyzet-hivatkozásról. A standard példányban egyetlen Bolyaitól származó lábjegyzet-hivatkozás van: ebben Bolyai engedélyt kér ahhoz, hogy ugyanazzal a jellel jelölje a mértani kongruenciát, mint amellyel Gauss a kongruens számokat jelölte (*1.F ábra*). Ezen felül azonban lábjegyzet-hivatkozást egyetlen általam tanulmányozott *Appendix*-példányban sem találtam – legyen az akár a *Tentamen*nel egybekötött (a szegedi Somogyi Könyvtár E.a. 313-as és E.a. 610-es jelzetű példányai; az MTAK, Bolyai-gyűjtemény, 542.012-es jelzetű, Bolyai Farkastól származó és a Magyar Tudományos Akadémia elődjének, a Magyar Tudós Táraságnak ajándékozott példánya), akár önálló példány (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, 545.091-es jelzet: Bolyai János saját példánya; MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/3-as jelzet).[60] A kéziratos *Raumlehre* (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/1-as jelzet) is csak egyetlen további, a 28. paragrafushoz fűzött lábjegyzetet tartalmaz. Ám ennek sincs köze sem a „parallela"-hoz, sem az „aszimptóta"-hoz.

De akkor mi lehet a magyarázata ennek a már-már rejtélyes lábjegyzetnek? A válasz az, hogy feltehetően egy olyan hiba, amelyhez az alap több lépcsőben jött létre. A kéziratos Bolyai-féle *Raumlehre* Stackel-féle közlésében és ennek Rados-féle magyar fordításában ugyanis a lábjegyzet-hivatkozások meglehetősen félrevezetők: azok is Bolyaitól származónak tűnhetnek, amelyek nem is tőle erednek.

A *Raumlehre* Stackel-féle közlésében (Stackel 1913/2: 186; *43.F ábra*), illetve ennek Rados-féle magyar fordításában (Stackel 1914/2: 198; *40.F ábra*) az első paragrafus „*bn* ||| *am*" jelöléséhez azt találjuk a lábjegyzetben, hogy:

> Ez így olvasandó: bn asymptotikus am-hez. (Stackel 1914/2: 198).

A Stackel-féle közlés azonban nem az eredeti Bolyai-féle *Raumlehre* szóról szóra teljes közlése, és nem is az *Appendix* egy az egyben fordítása, hanem egy sajátos kompiláció, illetve ennek a sajátos összeállításnak a magyarra történő átültetése.

A *Raumlehre*, mint már utaltam rá, szintén nem az *Appendix* szóról szóra kivitelezett átültetése, hanem megvalósítja például az *Appendix Erratá*jában javasolt változtatásokat. Mivel azonban a 32. és a 33. paragrafusok jelentősen eltérnek a latin eredetitől, a 34-43. paragrafusok pedig teljesen hiányoznak belőle,[61] ezért Stackel ahhoz a megoldáshoz folyamodott, hogy az *Appendix* 32-43. paragrafusának német fordítását is hozzácsatolta a *Raumlehre*-közléshez. Az ilyenformán létrejött öszvér megoldás komplikációi a német kompiláció magyarra fordításnál ütköznek ki igazán, amely az *Appendix* címet viseli (Stackel 1914/2: 193), és az *Appendix* előzéklapjának facsimiléjét tüneti fel címlapként (Stackel

[60] A forrásleírásokat lásd még Fráter (1968: 41-2; 110-1), valamint az irodalomjegyzékben.

[61] Lásd Stackel (1914/2: 197-9).

1914/2: 195).[62] Rados munkája tehát a latin *Appendix* Bolyai-féle német nyelvű átdolgozása Stackel-féle közléséből *és* az *Appendix* Stackel-féle német nyelvű fordításából álló kompiláció magyarra fordítása, és nem az eredeti *Appendix*é, illetve a 32-43. paragafusok esetében pedig nem közvetlenül az eredeti latin nyelvű munkáé – holott Rados 1897-ben már lefordította az egészet.

A megjelentetések során tehát az egyértelműség végett a Stackel-féle kompilációnak, de különösen a Rados-féle fordításnak több dolgot is nyilvánvalóvá kellene tennei és félreérthetetlenül jelölnie. Így például, hogy mi szerepelt az egyik vagy másik eredeti mű (*Appendix* vagy *Raumlehre*) lábjegyzetében, hogy Bolyai az *Appendix Erratajá*nak megfelelően mit változtatott meg a latinról németre történő átültetéskor, hogy a kompiláció egyes részei melyik Bolyai-féle műből származnak, és végül, hogy mi a közlő-fordító Stackel, illetve a magyar tolmácsoló Rados saját lábjegyzete. Az egyértelműség és a félreérthetetlenség megkívánná a háromféle – a szerzőtől származó (Bolyai-féle), a közlőtől és németre fordítótól származó (Stackel-féle) és végül a magyarra fordító Radostól eredő – lábjegyzet világos szétválasztását a jelölés tekintetében és az erre vonatkozó figyelmeztetést.

Ezt a kiadó részben, a kompiláció címéhez tartozó lábjegyzetben meg is tette: szögletes zárójelben adta meg összeállításának alkotóelemeit és az indoklást (*40.F ábra* és *43.F ábra*), továbbá a fejlécben található kísérő információkkal próbálta segíteni a tájékozódást (*45.F* és *46.F ábra*).

Ami a mi szempontunkból igazán kifogásolható, hogy egyáltalán nem jelezték, pláne nem egyértelműen, hogy a Stackel-féle közlői-fordítói, illetve a Rados-féle fordítói lábjegyzetek az eredeti szerzői lábjegyzettől csupán a lábjegyzet-szöveget keretező szögletes zárójellel kerülnek megkülönböztetésre, vagy azt, hogy Bolyaitól eredetileg csupán egyetlen lábjegyzet származik, nevezetesen a kongruencia jeléhez kapcsolódó jelmagyarázati lábjegyzet.

A Stackel-féle *Raumlehre–Appendix*-kompiláció megtartja az eredeti, Bolyai-féle jelet, azaz a csillaggal történő hivatkozást a szerzői lábjegyzet-hivatkozás jelölésére, miközben sajátja hivatkozásai számára, külön figyelmeztetés nélkül, arab számokat használ. Ezenkívül a rendelkezésre álló további információ e tekintetben mindössze annyi, hogy a kompiláció alkotóelemeit leíró és indokló szöveg *zárójelének alakja* (a szögletes zárójel) és a Stackel-féle lábjegyzeteket keretező *zárójel alakja* megegyezik (*43.F* és *44.F ábra*). Ez a megoldás tehát

---

[62] Az előzékcímlap dolgában a Stackel-féle *Raumlehre*-közléshez hasonlóan jártak el a fordításkor (Stackel 1913/2: 183).

legalább közvetett módon segíti az éles szemű olvasót a különböző személyektől (szerző, illetve közlő-fordító) származó lábjegyzetek megkülönböztetésében.

A kompiláció Rados-féle fordítása azonban lényegesen félrevezetőbb módon jár el, ugyanis az eredeti, Bolyaitól származó lábjegyzetet, valamint a közlői-fordítói lábjegyzeteket egyaránt csillagokkal és a csillagok számának növelésével jelöli. Ezáltal a különböző személyektől (a szerzőtől, illetve a közlő-fordító Stackeltől és a fordító Radostól) származó lábjegyzeteket megjelenésükben összevegyíti. Itt az eligazodást segítő információ csupán a nem szerzői lábjegyzeteket keretező zárójelek alaki egyezése, és olykor a lábjegyzetek-szövegek értelme. Ám az eredeti, Bolyai-féle és az első paragrafushoz fűzött közlői-fordítói lábjegyzet például éppen nem olyan, amelynek szövege magáért beszélne. Ez pedig éppen a vizsgált első paragrafushoz tartozó lábjegyzet esetén kritikus, hiszen itt azt az illúziót kelti, mintha Bolyaitól származna (*40.F és 41.F ábrákat*).

Az Stackel-féle közlés, illetve Rados-féle fordítása már szerephez jutott. Elképzelhetőnek tartom, hogy a kedves Olvasó már akkor felfigyelt a háromvonalas jelhez kapcsolódó, és az „aszimptotikust" tartalmazó lábjegyzet(ek)re, és esetleg nem értette, hogy miért nem tárgyalom, mint a Standard Nézetet támogató lábjegyzetet. Nos, több okból nem tettem. Egyrészt azért, mert nem Bolyaitól származó, azaz nem forrásértékű lábjegyzettel volt dolgunk, és ezért közömbös bármelyik álláspontra nézve. Másrészt talán segít megértenünk azt a jelenséget, hogy hogyan jött létre az „aszimptotikusságot" tartalmazó lábjegyzet tüneménye: aki számára ugyanis ez a lábjegyzet önmagában, vagy jobb esetben a jelmagyarázathoz tartozó kiadói (és fordítói) lábjegyzetek együtt nem tették egyértelművé és kétségtelenné, hogy *nem* Bolyaitól származó lábjegyzetekről van szó, az maga is a félrevezetés áldozatává vált.

Az eddigieket összefoglalva a következőket kell rögzítenünk.

Akár a Stackel-féle kompilációt, akár annak Rados-féle fordítását tekintjük, a „*bn* aszimptotikus *am*-hez" lábjegyzet csupán a kompilátor, illetve a fordító műve, és nem Bolyaié. Ráadásul mindez, különösen a magyar fordításban, elég félreérthető módon jelenik meg (bár helyesebb lenne itt azt mondani, hogy „veszik el benne") – tökéletes táptalajt biztosítva ezáltal az összevágott mű félreinterpretálásához. Részint ez az, amiért úgy vélem, hogy az aszimptótára utaló első paragrafusbeli lábjegyzet-hivatkozás csupán a halmozódó hibák eredménye. Másrészt azért – és ezt fontos kiemelnünk, hiszen a hiba létrejöttének első lépésére világít rá –, mert a János főherceghez küldött eredeti, Bolyai-féle német átdolgozás, azaz az eredeti kéziratos *Raumlehre* első paragrafusa *nem tartalmaz* az aszimptotikusságra vonatkozó lábjegyzetet (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/1-es jelzet). Márpedig ez képezte Stackel számára a kompiláció összeállításának és közlésének alapját. Így az is kérdéses, hogy a *Raumlehre* Stackel-féle közzétételekor mi alapozhatta meg egyáltalán a lábjegyzetet érintő eljárást. A kéziratot figyelembe véve persze úgy tűnik, hogy semmi. Ugyanakkor az is gyanítható, hogy valójában éppen azok a visszautaló források látszottak megalapozni egy *ilyen tartalmú* lábjegyzetet, amely források többértelműségét és probémáit már láttuk. Ez a lépés tehát Stackel – filológiailag nem teljesen igazolható – lépése, és nem Bolyaié.[63] Ezzel mindaddig nincs is baj, amíg csupán Stackel segítő szándékú lábjegyzetének tekintjük, és nem Bolyaitól származó, az elsődleges forrás rangjára emelt hivatkozásként. Véeredményben ezért a Standard Nézet elé azt a követelményt állíthatjuk, hogy ha az első paragrafushoz kapcsolódó lábjegyzet-hivatkozással kívánja álláspontját igazolni, akkor a bizonyítás alapja csak eredeti kéziratos vagy elsődleges forrás értékű dokumentum lehet.

Azt, hogy az eredeti *Appendix*ben *sem volt* ilyen lábjegyzet, és hogy ezért ez a lépés az eredeti forrásból nem vezethető le, néhány további dolog is alátámasztja. Sem a Tóth Imre-féle, sem az 1897-es Rados-féle *Appendix*-fordítás első paragrafusához nincs az „aszimptotikusságot" tartalmazó lábjegyzet (*30.F* és *31.F ábra*). Ezek szerint a fordítás elkészítése során egyikük sem talált olyat az eredeti műben, amely arra késztette volna őket, hogy közvetlenül a szövegbe fordítsák az „aszimptotikusságot", vagy hogy Bolyaitól származónak tűnő hivatkozást kelljen használniuk, illetve, hogy tőlük, mint fordítóktól eredő és az „értelemzést segítő" lábjegyzetre kelljen ragadtatniuk magukat.[64]

Mindent egybevéve azt állítom, hogy nem várható olyan példányok előkerülése, amelyekben valóban találunk a háromvonalas jelet értelmező lábjegyzet, még olyan példányoké sem, amely az „aszimptotikusságra" hivatkozik. Jó okunk van azonban úgy vélni, hogy olyat sem fogunk találni, amely „parallelaként" vagy „aszimptotikus parallelaként" értelmezné a háromvonalas jelet. Ha ugyanis a Stackel-féle közlésnek és az ebből készült Rados-féle fordításnak hitelt adunk, akkor abban olyasmire lelhetünk, amely aztán végképp ellentmond a bevett nézet által az *Appendix* első paragrafusa és a „parallela" között feltételezett kapcsolatnak. Az iménti merész kijelentés mellett persze nem csupán a *Raumlehre* Stackel-

[63] Valójában nem akarom sem Stackelt, sem Radost elmarasztalni. Ugyanis az ő közléseik, illetve fordításaik legalább implicite és jól elrejtve, de magukban foglalják azt az információt is, amelyek az értekezés következő tézisével kapcsolatosak. Így Stackel és Rados megoldásai egészükben véve egyáltalán nem támogatják a Standard Nézetet, hanem nagyonis ellentmondanak neki. Ez pedig a 22. paragrafushoz fűzött és később tárgyalandó lábjegyzetükön múlik.

[64] Rados szükségét érezte azonban az *Errata*ban szereplő megjegyzéseket lábjegyzetként feltüntetni, például a 7., és a 17. paragrafusok esetében. Ekkor azonban egyértelműen jelzi, hogy a szerzőtől származó eredeti, az *Errata*ban szereplő megjegyzésekről van szó. (Kincses és tsai 2002: 36, 41).

féle közlése, és ennek Rados-féle fordítása szolgálnak bizonyítékok gyanánt. Bár a Bolyai-parallelák kérdésében elfoglalt Stackel-, és esetleg Rados-féle álláspontot nem könnyű tetten érni, mégis fontosak. Rejtett módon, az *Appendix* első paragrafusától különböző részhez kapcsolódó magyarázó lábjegyzetük révén azt sugallják ugyanis, amit magam is állítok. Nevezetesen, hogy a „parallela" terminus valójában ott van a műben, csak nem a forgatás során először nem metsző (határhelyzetű, elpattanó) egyenesekkel és nem a háromvonalas jellel összefüggésben, hanem máshol: más helyen és más jellel kapcsolatban. Az általam korábban megfogalmazott követelmény miatt azonban továbbra sem támaszkodhatunk az (esetleg) nem alakhű és hibás, azaz nem facsimile-jellegű utánközlésekre és fordításaikra. Így hát újból az elsődleges források felé kell fordulnunk. Az új tézis és bizonyítása azonban már átvezet az értekezés következő részéhez.

Második rész

A megtalált „parallela”

A Bolyai-féle „parallela" az *Appendix*ben

A következőkben a Bolyai-féle „parallela" *Appendix*beli azonosítására és lokalizálására teszek kísérletet. *Tételem szerint a „parallela" terminus a párhuzamosság szokásos jelölésére használt és Bolyai által a mű 22. paragrafusában bevezetett kétvonalas '||' szimbólummal hozható összefüggésbe.* Ez azzal a következménnyel jár, hogy ha a Bolyai-féle párhuzamosságon a Bolyai-féle „parallela" *Appendix*beli értelmét értjük, azaz arra vagyunk kíváncsiak, hogy a nem-euklideszi geometria egyik felfedezője milyen értelemben használja a műben, akkor nézetem szerint a válasz a következő. *Bolyai a „parallela" terminust ekvidisztáns értelemben használja az* Appendix*ben. A parallel vagy párhuzamos vonalak Bolyai számára az egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő vonalak.*

Az új tézis a következő módon viszonyul a „parallela" első paragrafusbeli hiányát állító tételemhez, valamint az alátámasztására felhozott érvekhez. Mindenekelőtt: a „parallela" első paragrafusbeli hiánya szemantikailag szükséges feltétele annak, hogy a kifejezés a mű más helyén, más összefüggésben és más szemantikai tartalommal bukkanhasson fel. Ehhez a Bolyai-féle abszolút és hiperbolikus geometria fogalmi apparátusával kapcsolatban két dolgot kell feltételeznünk, illetve elvárnunk. Egyrészt feltételezhetjük, hogy Bolyai mind az abszolút, mind a hiperbolikus geometria fogalmi apparátusának kialakításakor igyekezett a belső szemantikai ellentmondást elkerülni. Másrészt elvárhatjuk, hogy az abszolút geometria fogalmi apparátusát úgy alakította ki vagy megválasztotta meg, hogy az elég tág legyen mind az euklideszi, mind a hiperbolikus geometriában való alkalmazhatósághoz. Ekkor azok a kifejezések, amelyeket Bolyai az *Appendix* abszolút geometriai tárgyalása során vezet be, az euklideszi és a hiperbolikus geometriában való alkalmazhatóságot *egyaránt* meg kell engedniük. Márpedig az *Appendix* minden olyan tétele (paragrafusa) abszolút geometriai tétel (paragrafus) – ilyen a mű első tizenkét paragrafusa is –, amelyben Bolyai nem mondja meg, hogy az euklideszi vagy a hiperbolikus geometriáról van-e szó. Az abszolút geometria körében bevezetett kifejezések nem jelenthetnek implicit állásfoglalást egyik geometria mellett sem a másik rovására, azaz nem eredményezhetnek ellentmondást az abszolút geometria hiperbolikus geometriához vezető specifikációjakor. Ez pedig követelményt jelent a „parallela" kifejezés ekvidisztáns értelemben történő használhatósága számára. Amíg ugyanis a Bolyai-féle abszolút geometriában eldöntetlen, hogy az ekvidisztáns vonalak egyenesek-e vagy sem, és hogy a nem metsző egyenesek ekvidisztánsak-e vagy sem, addig a Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometriában a nem metsző egyenesek nem lehetnek ekvidisztánsak (azaz nem lehetnek ekvidisztáns vonalak), az ekvidisztáns vonalak pedig nem lehetnek egyenesek (és így nem metsző egyenesek sem) (Tóth 1979, valamint Tóth 2000a: 23-4).[65] A „parallela" terminus ekvidisztáns értelemben való használhatóságához az egyenesekre (és így a nem metsző egyenesekre, értelemszerűen tehát az *Appendix* első paragrafusának háromvonalas, legelőször nem metsző egyeneseire) való alkalmazás tiltott. A „parallela" terminus ekvidisztáns értelemben való alkalmazása csak akkor nem vezet ellentmondásra a Bolyai-féle hiperbolikus geometriában, és csak akkor nem jelent az abszolút tételek körén belül a hiperbolikus geometriát kizáró (és az euklideszi geometria melletti implicit) állásfoglalást, ha a „párhuzamos" (vagy a „parallela") terminust az abszolút és a hiperbolikus geometriában nem használjuk „nem metsző" vagy „legelőször nem metsző" értelemben, és nem alkamazzuk egyenesekre. Röviden: a „párhuzamos" (vagy a „parallela") kifejezés az abszolút és a hiperbolikus geometriában nem használható mindkét értelemben („ekvidisztáns", illetve „nem metsző"), de az egyikben és csak az egyikben: igen. A „parallela" ekvidisztáns értelemben való ellentmondásmentes használhatóságának szükséges feltétele a kifejezés első paragrafusbeli hiánya, illetve a nem metsző (csakúgy, mint a legelőször nem metsző) egyenesekre való alkalmazás elkerülése. A „parallela" ekvidisztáns értelemben való ellentmondásmentes használhatóságához tehát szükséges, hogy az *Appendix* első paragrafusában „a forgatás során előálló legelőször nem metsző egyenes" ne legyen a szóban forgó terminus meghatározása, a mű egészében pedig legyen ilyen értelemben használatva. Az általam képviselt két tézis ennyiben kiegészíti, illetve kölcsönösen feltélelezi egymást.

Az új tézis persze új helyzetet teremt a Standard Nézet számára azáltal, hogy megmondja, a szóban forgó kifejezés ténylegesen hol és milyen formában található meg a műben. Ez pedig felvetheti azt a kérdés, hogy vajon megtakarítható lett volna-e az előző szakasz megmentési kísérleteinek számba vétele és a megválaszolásuk? Az új tézist közvetlenül alátámasztó bizonyítékok fényében esetleg az ellenérvek és ellenvetések előzetes elhárítása feleslegesen elvégzett munkának tűnhet. A dolog azonban nem ilyen egyszerű. A korábban vizsgált ellenvetések egy részében éppen az a fondorlatos, hogy azt vonhatják kétségbe: az egyes dokumentumokat, adatokat, bizonyítékokat névértéken kelljen vennünk, illetve, hogy

[65] Lásd az 59. sz. lábjegyzetet.

hihessünk annak, amit látunk és annak, amit nem. A korábban vizsgált ellenvetések közül a harmadik, a negyedik és a hatodik megmentési kísérlet forrás- és érvanyaga részben, az ötödiké pedig teljes egészében felvethető volna az új tézis előadása és bizonyítása után is. Bár az alább következő okfejtést követően a korábban vizsgált kontra-érvek eredendően is gyengébb színben tűnnének fel, ám ettől még elő lehetett volna velük állni. Jelentős részükkel valamikor minden bizonnyal szembe kellett volna nézni, ezért legkésőbb a következő fejtegetés után célszerű lett volna megválaszolni őket. Úgy vélem azonban, hogy ez helyett kifizetődőbb volt a sorrendet felborítva preventív módon eljárni. A kontra-érvek előzetes elhárítása végeredményben azzal a haszonnal járt, hogy az általam újonnan hirdetett álláspont elő- és utóvédharcát egyaránt szolgálták.

Mindezekből kifolyólag a megmentési kísérletekre adott válaszaim jelentős részben előrevetítették azokat az érveket, amelyekből most építkezni fogok. Ezek röviden a következők. Elsőként: a Bolyaitól származó és a háromvonalas jel eredetére visszautaló forrás kínálta értelmezési lehetőségek, amelyek közül az egyik a „parallela" kifejezésnek az „aszimptotikus parallela"-ról történő és az „aszimptóta"-t hátrahagyó leválásának irányába mutatott. A „parallela" kifejezésnek a forrás által sejtetett szabaddá válása ugyanis megteremti a lehetőséget ahhoz, hogy a mű más helyén, más kontextusban és más értelemben bukkanhasson fel. Másik, komolyabb és erősebb érvként jön szóba a párhuzamosság kétvonalas jelének használata mögött álló tradíció, amely az egész tetejébe még a háromvonalas jel újszerűségével és ismeretlenségével is szembeállítható. Mivel azonban a kétvonalas jel használata mögött álló hagyománnyal kapcsolatos érvet korántsem aknáztam ki teljesen, így arra vissza fogok térni. És végül az az érv fontos, hogy a Standard Nézet által a nyelvi és jelölési szigorúság dolgában Bolyairól kialakított képet komolyan kell venni. Ez az a pont, ahol a Standard Nézettel többé-kevésbé egyetérthetünk. Ugyanakkor úgy vélem, hogy ezt a képet is árnyalni és finomítani kell. Ezek azok a fontosabb argumentumok, amelyeket már érintettünk, és amelyek önmagukban is megfontolandóvá kellene, hogy tegyék a kétvonalas jel és a „parallela" közötti szoros kapcsolatot. Lesznek azonban további, meglepetésszámba menő erős érveim is. Kezdjük azonban a Bolyai nyelvi szigorúságáról kialakított kép felidézésével és részleteinek tökéletesítésével.

6.1 Bolyai János „kijelelési szigorúsága”

A Standard Nézet Bolyai nyelvi szigorúságát kész tényként kezeli. Olyan ténynek tekinti, amelyet a legjobban az *Appendix* „tömörsége” bizonyít (Kálmán 1989: 103; Kárteszi 1973: 7-8; Weszely 1981: 82). Azon források döntő többsége azonban, amelyekre az elfogadott nézet a Bolyaira jellemző nyelvi szigorúság felfestése során alapoz, a mű születését követően sokára, hozzávetőleg 10-15 évvel keletkeztek. A nyelvre vonatkozó feljegyzések 1842 után kezdtek szaporodni (Benkő 1978: 296), bár Bolyai egyik 1852-es feljegyzése szerint bécsi tanulmányai idejére, egészen pontosan 1823-ra (a nem-euklideszi geometria felfedezésének idejére) datálható a szigorú és reflexív nyelvi hozzáállás kezdete:

> (…) még fiatal koromban valami tani eszméimet akarván, még pedig lehető *jól,* tehát jó írásmóddal föl-jegyezni, s csakhamar észre-vevén a nyelv tökélyetlenségét azonnal át-láttam s meg-is-állítottam ön-számomra a fő-elveket is 1823-ban. (Benkő 1968: 296, ‘781’; Benkő 1960: 1314).[66]

A Standard Nézet perspektívájából Bolyainak az 1842-t követő általános nyelvi megfontolásai egyrészt illusztrálják, másrészt általánosítják azt a nyelvi magatartást, amelyet az *Appendix* formában öntése során megvalósított. Számukra tehát az *Appendix* hibátlan előkép: a mű Bolyai nyelvi és jelölési magatartásának matematikán belüli kifogástalan megvalósulását rögzíti. Ily módon általában vett nyelvi szigorúságát valójában levezetik abból a hozzáállásból, amely szerintük az *Appendix*ben kifejezésre jut (Benkő 1978: 295; Weszely 2002: 180).[67] Annyiban mindenképpen igazuk van, hogy a források egészében véve tényleg azt sejtetik: Bolyai a fogalmi és jelölési rendszerre vonatkozó eszmefuttatások keretében azokat az általános elveket fogalmazta meg, amelyeket a nem-euklideszi geometria formába öntése során betartott, vagy amelyeket ebben a folyamatban megfigyelt és belőle leszűrt. A nyelvre vonatkozó feljegyzések kétségtelen értéke a retrospektív reflexivitás. Csakhogy a nyelvi és jelölési rendszerre vonatkozó észrevételek gyakorta túlságosan általános szinten

[66] Az egyszeres idézőjelben megadott számok Benkő Samu tanúsága szerint a marosvásárhelyi Bolyai-kéziratok leltári száma. Az azonosíthatóság végett a továbbiakban is mindig megadom.

[67] Ez ügyben Benkő Samu a leginkább explicit: „A latinul írt *Appendix* sokat emlegetett tömörsége és félreérthetetlen előadásmódja azt bizonyítja, hogy zseniális mondandójához egyszer már megtalálta a tökéletes formát. Az összes tudományokat összefoglaló Tant is hasonló igénnyel akarta megszerkeszteni. Nyelvészeti érdeklődésének kiformálódásában tehát döntő szerepe volt annak a szubjektív tényezőnek, hogy minden esetben már-már kínos precizitással törekedett mondanivalója félreérthetetlen megfogalmazására.” (Benkő 1978: 295).

mozognak. Az igazi kérdés pedig az, hogy ki lehet-e hámozni belőlük, mi számít utólagos tanulságnak és mi számít a mű megformálása során sikeresen megvalósított nyelvi-jelölési magatartásnak. Nézzük hát a nyelvre vonatkozó forrásokat:

> Nyölv (nem egyéb) jegytan (latinul definitiones) a része, mi néhány szó s szók (csoport, össz-rakat által), miknek értelmök taníthatlan (latinul indefinibile), (minden) más, a többi szó s szók értelmöket tanítja: miszerint világos és kétségen külüli, hogy az egész nyölvnek a tanban előforduló szükséges része a jegytanba való. (Benkő 1978: 294,'842').
>
> Magyar nyölv (ugyan) úgy nevezett míveltségnek, nem sok évi pallérozás után már szinte áll, sőt hiszem épen áll a fokon, melyen állnak leg-míveltebb nyölvek, úgy hogy elméleteket (csak legyenek előbb ilyenek készen) magyarul is kijelelni s meg-értetni jelöket, vagy is másokban is oly elméleteket okozni, épen úgy lehet, mint más akármely nyölven." (Benkő 1960: 1315, '782').
>
> Más a nyitanilag [azaz mennyiségtanilag, általánosan pedig matematikailag – T. J.][68] tökélyes, vagyis *véghetetlen* szigorrali jeltan, és más az *érzőszereink*-, vagyis *észrevevőképességünkre* nézve elég tökélyes jeltan közötti különbség: az utóbbi nemű jeltan által iródnak le a termények, például a világosság, a levegő, arany; a cserfa; az oroszlán, a ló; ... Hol ugyan, ámbár az ily tárgyakról, például a lóról s csak annak idomjáról is nyitani szigorrali jeltant nem lehet adni, sőt oly törekvés éppen célellenes volna – itt nem lévén a természettől tökélyesen megállított s áthághatlan mérték, sőt ahány ló, szigorán szólva annyiféle mértékű lévén – elég annyira, s oly határok közé szorítva leírni a lovat: hogy azt azonnali világosan és biztonságosan meg lehessen minden más tárgyaktól, például a szamártól vagy öszvértől különböztetni. (Benkő 1978: 306, '620').
>
> Némely bölcsész azt tartja, állítja: hogy elmélni önkényes vagy-is okos jelek nélkül *lehetlen*, vagy-is, elmélésre el-kerülhetetlenül okos jelek szükségesek. Az azonban nem úgy van. Ön számára, vagy is magában az ember minden okos jelek *nélkül* is, közvetlenüli világos képzelése által az illető-lényeknek s viszonyjaiknak; úgy hogy minden okos jelek s ki-jelelés nélkül is, oly módon el-lehet ugyan jutni mindenik okos ismerethez. Az okos jegyek azonban szükségesek és tömérdek hasz(n)úak s gyönyörűek a gondolatok *másokkali* közlésére, sőt az *önmagávali* közlésére nézve is később(i) időben, vagyis azoknak emlékben tarthatására, emlékbe vissza-hívhatására, idézhetésére, újonnani fölébreszthetésére; csak *látható, tapintható s egészben*, de *nem részeikben véve, mozgékony*, vagyis *kény szerént hordozható* jelek által biztosíthatván az

[68] Lásd Benkő (1978: 282-3).

elme szüleményeit állandóul a feledék, az elveszés ellen; s azért, minden magos becse, érdeme mellett a szájjali elő-adásnak, de elröpülvén, elhangozván *s az-után* többé nem lévén való: a tudat csak akkor nyeri-meg egész becsét: ha tökélyes jelek által megtestesül. (Benkő 1960: 1320; Benkő 1978: 308, '629').

S ha óhajtom jegyemet más által is ugyanolyan célra megismertetni s fölvevődni: akkor azon jegy mindenikünkre *egy*-értelmű jegy lesz. Egyébaránt minden jegy lehet, kény s cél szerént, *vagy* csak bizonyos *ideig, vagy helyig, vagy pedig* – bölcs fönnhagyásával csakugyan netalán lehető *tökélyesebb* általi száműzésének – örökre, legalább az idei életre állandóuli fönnmarasztásra, megtartásra szánt, intézett. (Benkő 1978: 308-9, '629').

Azonban, minthogy nyelvünk *eddigi* állapotjában (abban tudniillik: melyben azt szeretett anyámtól s a dicső magyar nemzettől vettem) tán *egy* szabályt sem lehet híven s minden olvasó kedve szerént (szerint) követni, azon egyszerű okból, hogy részint (minden számos foliántnyi nyelvtanok mellett) tudtomra, s mint hiszem, még eddig egy[etlen(ben) egy] *tökélyes* nyelv-szabály sem vala – nemcsak magyar, hanem már e fölgömböni nyelvtanban is – s ami volt is, vagy kivételt szenvedhető, határozatlan (az eddigi ingadozó, tántorgó elvek szerint kinek-kinek kénye szerint), vagy legalább rossz ízlésű, ami pedig a legveszélyesebb, két[értelmű]ségnek kitevő volt: könnyen érttetik (könnyű meg- vagy fölfogni – ezzel), hogy *tökélyesen* szabályszerűleg (tehát következetesen s híven egyidomúlag) csak úgy kezdhetnék: ha előbb Euklid[es]i vagy mathesisi szellemben és szigorral (rigorral, more geometrico, mit mathematischer Strenge) a követett nyelvszabályaimat kijelelném. (Benkő 1978: 304-5; '585').

Csak az a fatális körülmény szúr, fúr most is mi tanim kiadásától eddig is mind eltartott, hogy a Tan míg *tökélyes* rendben, idomban nincs, vagyis míg a kijelelésre is nem tökélyes (bármily tökélyesen is tudja az ember maga, mind értésre, mind kijelelésre nézve, de ha az olvasót is meg nem barátkoztatta még a helyes nyelvvel): olyan, mint mikor egy darázsfészekbe nyúl az ember. (Benkő 1978: 297, '445').

Bolyai tehát valóban lépten-nyomon hangsúlyozza az elméletek formába öntésére (az ő szóhasználatával: kijelelésére) vonatkozó szigorú követelmények megtalálásának, megfogalmazásának és betartásának fontosságát. A fogalmi és a jelrendszer többszörös, több szempontból levezetett szigorú ellenőrzésének követelményét írja elő. Ám még ha ezt az *Appendix* nyelv előtti, nem-nyelvi kialakulásától a fogalmi-terminológiai és jelöléstechnikai megformálásig ívelő folyamat utólagos lecsapódásának tekintjük is, akkor sem tartalmaznak túlságosan sok konkrétumot. A forrásokból tehát, eredeti kérdésünkre válaszolva, éppen azt nem lehet kihámozni, hogy mi tekintendő utólagos tanulságnak, és mi számít az *Appendix* idején érvényben lévő elvnek vagy sikeresen követett nyelvi és jelölési magatartásnak. Bár Bolyai általános (mindenekelőtt persze az 1842-t követő időszakot jellemző) nyelvi habitusáról képet kapunk, amely szerint „az igazi mathesisi, vagyis isteni elme nem elégszik meg azzal, hogy megértethesse, közölhesse elméleteit ... s viszont hogy megértsen mást, hanem kívánja a mondandókat mathesisi csínnal tökélyvel is jelelni”[69], ám az *Appendix* fogalmi, terminológiai és jelöléstechnikai formába öntésének tényleges elveiről és a folyamat igazi részleteiről nem tudunk meg lényegében semmit.[70]

6.2 Az *Appendix* felemás nyelvi szigorúsága: a nem-euklideszi geometria új fogalmai és jelölései

Az igazi nehézség abban áll, hogy csak kevés, az *Appendix* létrejöttével, megformálásával illetve megjelenésével egykorú, vagy a mű keletkezését követően nem sokkal született forrás áll a rendelkezésünkre. A rendelkezésre álló szövegek ráadásul egyáltalán nem érintik sem a két, sem a háromvonalas jelet, sem a „parallela” terminust – következésképpen műbeli jelenlétüket és szerepüket illetően nem tudunk meg semmit. Két okból mégis érdemes elemzés tárgyává tennünk e forrásokat. Egyrészt azért, mert mind időben, mind tényszerűségben ezek a dokumentumok visznek a legközelebb bennünket ahhoz, hogy a

---

[69] Idézi Benkő (1978: 295, ‘842’).

[70] Úgy tűnik, hogy Bolyai Jánost leginkább a természetes nyelv pontatlansága és a szinonimitásból fakadó redundancia zavarta: „Azonban, részint a nyelvbeli ízetlen bujaság, pazérlás szembetüntetésére, részint az azokkali (dusztigi) ismeretségemre, részint világosításra (gyakran zárójelek között) bővön és mind magamnak, mind (kétségen kívül) az olvasónak az unalomig szolgálok.” (Benkő 1968:199, ‘585’). „...minden izmos, vastag nagy számú eddigi nyelv-tanok mellett, *tökélyes* szabályok *telyes* hiánya, és számtalan következetlenség – *inconsequentia* – fonákság, önellenkezés, és részint a nyelv szegénysége, részint annak lepcses és ízetlen gazdagsága, ön-elégedetten úgy nevezni szokott „dús-tára” miatt; mi mellett könnyen észre-vehető: hogy a leg-első meg-szólalás vagyis ki-indulással már nem oly önkénytt és kényelmesen folyhat a dolog egyenesen, sőt egy úton a fő-cél felé: hanem út azonnal sok felé ágazik: ezen ágak is még alsóbb ágakra oszolván.” (Abafáy (1960: 19). „Eredett pedig minden baj s tűnődés, tepreny főleg (...) az eddigi nyelv teste, külsője nem tökélyes voltából, jelesen abból: hogy részint ugyanazon egy lényegű dolgot többnyire sok-féleképpen kifejezhetek.” (Abafáy 1960: 19). Stackel a következő megjegyzését fűzi Bolyai egyik észrevételéhez („Akadályt okoz a nyelv avval, hogy ugyanazt a fogalmat és még inkább ítéletet több, sőt sokféle módon lehet kifejezni”): „Ez a kijelentés szolgáltatja magyarázatát János egy már említett sajátosságának, mely először érthetlennek, sőt beteges állapotra mutatónak látszik, hogy t.i. előrehaladott korából származó, ha nem is minden, de sok följegyzésében a legtöbb szóhoz még egy, két, három egészen egy tuczatig is rokonértelmű szót tesz hozzá. Evvel kifejezésre akarta juttatni, hogy mennyire tökéletlen a mostani nyelv, a melyben ugyanazt a fogalmat, ugyanazt az itéletet többféle módon lehet kifejezni. A tökéletes nyelvet mint a gondolat egyértelmű leképezését tervezte.” (Stackel 1914: 190).

vizsgált időszakkal kapcsolatban részleteiben és árnyaltan lássuk Bolyai nyelvi-jelölési szigorúságát. Bár az említett kérdések vonatkozásában e források nem informatívak, de mondanak valamit a Bolyai-féle abszolút és hiperbolikus geometria néhány fontos objektumának elnevezésével, a mögöttük álló megfontolásokkal, általánosabban pedig Bolyainak a fogalomalkotásra vonatkozó felfogásával kapcsolatban. A fogalmi-terminológiai rendszer kialakításakor felmerült azon nehézségek és kezelésük szempontjai is itt érhetők a leginkább tetten, amelyek azután az *Appendix*ben, mint megoldások realizálódtak.
Az összes információ, amivel közvetett módon pillanatnyilag rendelkezünk, abból adódik, hogy Bolyai műve kommentárokat kényszerített ki Gaussból, majd Gauss megjegyzései Bolyait is magyarázatra késztették. Gauss ugyanis 1832. március 6-i válaszlevelében, Bolyai Farkas kérésének megfelelően, értékelte a neki bírálatra megküldött művet. Ebben szóvá tette az *Appendix* jelöléstechnikai sajátosságait – a Standard Nézet által sokat és pozitíve emlegetett „tömörséget”:

> Nagyon jellemzőeknek és rövideknek találom a jelöléseket: de azt hiszem, hogy jó lesz némely főfogalomra nemcsak jelet vagy betűt, hanem meghatározott nevet is megállapítani, és én már régen gondoltam néhány ilyen névre. A míg a dolgot közvetlenűl szemlélve átgondoljuk, nevekre vagy jelekre nincs szükségünk, ezek csak akkor válnak szükségessé, ha másokkal akarjuk magunkat megértetni.
> Így pl. azt a felületet, melyet fiad *F*-nek nevez, parasphaerának, az *L*-vonalat pedig paracyklusnak lehetne nevezni: alapjában ezek a végtelen sugarú gömb ill. kör. Hypercyklusnak volna nevezhető ama pontok összessége, melyek valamely egyenestől, melylyel együtt ugyanabban a síkban fekszenek, egyenlő távolságra vannak; hasonló volna a hypersphaera. Ámde mindezek csak jelentéktelen mellékes dolgok fő dolog a tartalom, nem a forma.[71]

Bár Gaussnak a jelölésrendszerre vonatkozó megjegyzései sem itt, sem a levél további részében nem érintik a párhuzamossággal kapcsolatba hozható két-, illetve háromvonalas jelet, ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy a válaszlevélben Bolyai Jánossal egyező módon használja a ‘|||’ szimbólumot. Gauss a nélkül veszi át Bolyai jelölését, hogy a háromvonalas szimbólummal jelölt egyeneseket megnevezné, vagy a szimbólumot verbálisan interpretálná.[72]

---

[71] Magyarul idézi Stackel (1914: 89). A levél eredeti, német nyelvű szövege megtalálható: Schmidt és Stackel (1899: 109). A levél *Appendix*re vonatkozó részének teljes, modernebb helyesírású fordítását közli Kárteszi (1973: 33).
[72] Lásd Schmidt és Stackel (1899: 110).

A Gauss által javasolt kifejezések – a „paraciklus”, a „paraszféra”, a „hiperciklus” és a „hiperszféra” – később a nem-euklideszi geometria bevett kifejezéseivé váltak. E kifejezések olyan nem-euklideszi objektumokra vonatkoztak, amelyek valamiképpen újak, azaz a történeti értelemben vett euklideszi geometria körében addig teljességgel ismeretlenek voltak.

Bolyai és Lobacsevszkij geometriája a hiperbolikus geometria mentén érintkezik: ez az, amit mindketten megalkottak (ezért lehet, illetve szokás Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometriának nevezni). Bolyai azonban világosan elkülönítette az euklideszi és hiperbolikus geometria közös magját alkotó abszolút geometriát (ezért szokás Bolyai-féle aszolút geometriát is megkülönböztetni). Ha figyelmen kívül hagyjuk, hogy eredetileg Gauss olyan vonalakra és felületekre javasolta az elnevezéseket, amelyek Bolyainál nem csupán hiperbolikus, hanem abszolút geometriai objektumok is, akkor azt mondhatjuk, hogy Lobacsevszkijnél a „paraciklus” helyett a „határvonal” („horociklus”), a „paraszféra” helyett pedig a „határszféra” („horoszféra”) elnevezések szerepel (Lobacsevszkij 1840: 37, 44; uő. 1951: 61, 63). Ugyanezekre, illetve egészen pontosan azokra az objektumokra, amelyek neveként Gauss a „paraciklust” és a „paraszférát” javasolta, Bolyai az *L*-vonal (*L-linien, linea L*), illetve az *F*-felület (*F superficies* vagy *F Fläche*) (*3.F ábra*) rövidítésszerű elnevezésekkel hivatkozik. (Ami a *superficies* rövidítésszerűségét illeti: egyrészt az ’*S*’ betű már foglalt, mivel Bolyai a hiperbolikus geometria rendszerének jelölésére használja. Másrészt az ’*F*’ a *superficies* szóban benne rejlő és lényegében azonos jelentésű, szintén latin *facies* rövítésének is felfogható.) Az *L*-vonalak az először nem metsző (a hiperbolikus geometriában aszimptotikussá váló) síkbeli egyenesek izogonális pontjainak összekötésével származtathatók egyfajta módon, az *F*-felületet pedig az ugyanilyen térbeli egyenesek izogonolis pontjainak összekötése (vagy az izogonális pontok alkotta *L*-vonal létrehozásához használt bármely egyenes körül történő megforgatása) eredményezi. Bolyai csakúgy, mint Lobacsevszkij, az egyenestől egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok alkotta vonalra, az ún. hiperciklusra nem vezet be külön nevet, még az iméntihez hasonló rövidítésszerű jelet sem.

Amikor tehát Bolyai az általa megalkotott (abszolút és hiperbolikus) geometria két fontos objektumára csupán rövidítésszerű nevekkel utal, és óvakodik a rájuk vonatkozó új terminusok bevezetésétől, akkor a mű „formális tartalmának” fogalmi-terminológiai interpretálása szempontjából megpróbál neutrális, de legalábbis tartózkodó álláspontot felvenni.

Bolyai Farkas elküldte fiának a Gauss-féle levél másolatát, Bolyai János pedig észrevételeket fűzött Gauss megjegyzéseihez. Minthogy Bolyai számára az apropót Gauss javaslatai szolgáltatták, ezért csak azokhoz a jelekhez és terminusokhoz fűzött magyarázatot, amelyeket Gauss kifogásolt, illetve javasolt.

Bolyai kapcsolódó jegyzeteit Stackel adta közre. Bolyai egy-egy megjegyzése, Stackel magyarázatának és adatainak tanúsága szerint a levélmásolat egy-egy sorára vagy jól beazonosítható passzusára vonatkozik.[73] Ezt az eredeti levél (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/4-es jelzet), valamint a róla készült másolat tanulmányozása egyaránt megerősíti (MTAK, Bolyai-gyűjtemény, K 24/133-as jelzet).[74] Ezekre alapozva a következő Bolyai-féle megjegyzés ahhoz a sorhoz kapcsolódik, amelyben arról van szó, hogy a „paraszféra" illetve a „paraciklus" „alapjában véve a végtelen sugarú gömb, illetve kör":

> Első pillanatra ugyan vagy felületesen tekintve (így jött reá a szerző is már 13 évvel ezelőtt [1819]), ámde szigorúbb vizsgálatban a v é g t e l e n r a d i u s u k ö r v o n a l kifejezést *helytelen*nek és alkalmatlannak találjuk, a mit GAUSS is meg fog engedni, ha a dolgot közelebbről megvizsgálja. (Stackel 1914: 233).

A „hiperciklust" és a „hiperszférát" tartalmazó sorokhoz fűződik, ám a Gauss által javasolt négy elnevezésre egyaránt vonatkozónak tűnik a következő, Bolyaitól származó kommentár:

> Ezek az elnevezések mindenesetre igen találóak és kitünőek, ámde majdnem hasonló elnevezéseket találhatni a szerző legrégibb irataiban, ki a jeleket csak később vezette be rövidség kedvéért. (Stackel 1914: 233).

Egy másik, Stackel datálása szerint 1834-ből származó cédulára pedig Bolyai János a következő fölfegyzést írta:

> Parasphaere – paracyklus. Ezeket az elnevezéseket, miután a jelen elmélet közöltetett vele, Gauss javasolta ugyan; ámde nem maradhatott el, hogy e tan első keletkezésekor nálam hasonló eszmék ne merüljenek fel; én akkor a paracyklust O ∞-nak[75] és [a hypercyklust O][76] hyper ∞-nek neveztem, bár az utóbbi hibás. Én valóban legrégibb irataimban egészen hasonló elnevezéseket használtam, az analógiát a parabolával észrevettem, a mennyiben valóban is [határérték] reláczió stb. [áll fenn – kieg. T. J.][77] (Stackel 1914: 233).

---

[73] V.ö. Stackel (1914: 89; valamint 1914: 233, és 1914: 273-4).

[74] A források rövid leírását és a kapcsolódó megjegyzéseket lásd Fráter (1968: 42; 46), valamint az értekezés irodalomjegyzékében.

[75] Lásd a 78. sz. lábjegyzetet.

[76] Ez a forrást csak nem sikerült eredetiben azonosítanom. Stackel közlése alapján nem egyértelmű, hogy a szögletes zárójel Bolyai sajátja kezű betoldás-e a kéziratban vagy Stackel kiegészítésének kell-e tekintenünk.

[77] Idézi Stackel (1914: 233.)

Bolyai megjegyzéseiben a Gauss-féle indítványok mérlegelésének két szempontja azonosítható. Az egyik a javasolt terminusok elfogadhatóságának szempontja, míg a másik a javaslat indoklása, azaz a terminológiát alátámasztó érvelés. Amíg azonban Bolyai a Gauss által javasolt kifejezéseket elfogadja, addig az alátámasztásukat szolgáló lehetséges érveléseket nem. Sem a Gauss-félét, amely a fogalmak tágan vett értelmére támaszkodik, sem a sajátját, amely a „kézenfekvően kínálkozó" analógiára épít. Egy másik, szintén 1834 táján keletkezett és *A tér tudománya* című művéhez szánt előszavából származó idézetben a felfedezés heurisztikus mozzanatának fogalmi leképzése is megjelenik az előbbi két érv mellett (Stackel 1914: 77; és 236):

> Azt is felismertem azonnal, hogy midőn a sugár [közelít] ∞: akkor a körvonalnak van egy térbeli határvonala vagy, ha a szót valamivel bővebb értelemben vesszük, felismertem a végtelen sugarú körvonal létezését, mely a véges sugarú körvonalokkal és az egyenessel egyenköző vonalokkal olyan olyan viszonyban áll, mint a parabola az ellipszisekkel és a hiperbolákkal. (Stäckel 1914: 77).

Bolyait a „végtelen sugarú kör" kifejezésben jól láthatóan az zavarta, hogy ehhez a dolgot nem a kívánt pontossággal, hanem „bővebb értelemben" kell tekinteni. A tágabb értelemben vett euklideszi kifejezésekre alapozott körülírást („végtelen sugarú körvonal") nem tartotta megfelelően pontosnak, mint ahogy a felfedezés heurisztikus mozzanatának fogalmi leképzését („a végtelenhez tartó sugarú kör térbeli határvonala") vagy a terminológia megalapozására szolgáló analógiát sem tartotta kielégítőnek. Úgy tűnik, hogy Bolyai számára egy kifejezés csak akkor használható, illetve publikációs célú használata csak akkor engedélyezhető, ha a kifejezés jelentése megalapozható. Ennek a megalapozásnak, legalább Bolyai saját szempontjai szerint, kellően pontosnak és egyértelműnek kell lennie. Az előbb látott három megalapozási lehetőség egyikét sem találhatta megnyugtatónak — ez végül is éppen abból látszik, hogy a gyakorlatilag rendelkezésre álló kifejezések egyikét sem vette igénybe az *Appendix* megformálásakor. Végeredményben azt mondhatjuk, hogy az új fogalmakhoz kapcsolódó újsütetű terminusok megalapozását biztosító mechanizmusokkal való elégedetlensége vezetett oda, hogy elállt az *Appendix*beli alkalmazásuktól és megmaradt a rövidítésszerű elnevezéseknél.

Bolyai tehát óvakodott a nem-euklideszi geometria bizonyos objektumainak és fogalmainak terminológiai interpretációjától akkor, amikor a közvetlen és egyértelmű megnevezés vagy a jelhasználat révén közvetett, de a „szó szerinti interpretálhatóság”[78] helyett rövidítésszerű jelekhez folyamadott. A rövidítésszerű jelek természetesen tágabb teret hagynak a fogalmi-terminológiai interpretációnak, és nem teremtik meg azokat a belső fogalmi összefüggéseket, amelyek például a para- és hiperciklus terminusokkal létrehozhatók vagy kiemelhetők. Bolyai megoldása egyfelől a fogalmi-terminológiai szigorúság következetes végigvitele: annyiban, amennyiben elkerüli az általa pontatlannak ítélt fogalmi körülírásokat vagy „helytelen” kifejezéseket. Másfelől azonban a szigorúság rovására tett engedmény. Engedmény annyiban, amennyiben a megfelelő terminusok hiányában, vagy – ami számára ugyanaz – a kínálkozó terminusokat alátámasztó mechanizmusokkal való elégedetlensége miatt lemondott a „mathesisi tökéllyel való kijelelésről”, és jellegtelen, az értelmezési lehetőségeknek tág teret adó rövidítésszerű jelekhez folyamodott.

A kommentárok sorozata jól láthatóan felemás: a Bolyai-féle abszolút és hiperbolikus geometria fogalmi, terminológiai és jelöléstechnikai megformáltsága csak egy jellegzetes vonatkozásban kényszerített ki egymást követő megnyilatkozásokat, míg más vonatkozásokban nem. A Gauss által szóvá tett jelek és az általa javasolt kifejezések az abszolút és a hiperbolikus geometriában újonnan megjelenő geometriai objektumok, tulajdonságok és viszonyok névalkotási nehézségeivel függenek össze. A Bolyai Farkasnak írott válaszlevélben Gauss által említés nélkül hagyott – és vizsgálatunk előterében álló – jelek közül a kétvonalas szimbólum használatával kapcsolatos kérdés nem más, mint a történeti értelemben vett euklideszi geometria fogalmainak, kifejezéseinek, illetve a velük kapcsolatban tradícionálisan használt jelek *további* alkalmazásának kérdése. Amíg tehát az egyik kérdés a teljesen új terminusok és jelek megalkotásával, illetve bevezetésével kapcsolatos, addig a másik a régi, ismert kifejezések és jele(i)k megtartásával, illetve a Bolyai-féle abszolút és hiperbolikus geometriában való további megfelelő alkalmazással függ össze. Mivel ez két különböző kérdés, illetve a felfedező számára lehet két különböző kérdés – még a fogalmi-terminológiai és jelölési rendszer kialakításának előbb látott nehézségeit figyelembe véve is –, ezért a válaszok és a megoldások lehetnek különbözőek. Attól ugyanis, hogy a geometria története szempontjából frissen alkotott és újonnan bevezetendő terminusokat Bolyainak saját perspektívájából nem sikerült kellőképpen megalapozni, nem nyilvánvaló, hogy a régi terminusokról és szimbólumaikról is le kell mondani. Az alkotó-felfedező, azaz Bolyai ugyanis minden további nélkül érezheti a kifejezések és a

[78] Az utóbbira lehetne példa a „paraciklus”-sal összefüggésben felmerült „O∞” jel, amely az *Appendix* jelmagyarázatának (*1.F ábra* valamint *29.F ábra*).fényében könnyen kifejthető lenne. Mivel a „O*r*” jel az „’*r’* sugarú körvonalat” jelenti, ezért a „O∞” jel értelemszerűen a „végtelen sugarú körvonal”-at.

szimbólumok jelentésénél fogva magától értetődőnek további alkalmazhatóságukat, vagy dönthet további alkalmazásuk mellett alapos és megfontolt mérlegelést követően is. Ezért Bolyainak az új terminusok alkotásával összefüggésben előbb látott nehézségeiből és a megoldás jellegéből egyáltalán nem következik, hogy le kellett mondania a „parallela" terminusról vagy a kétvonalas jelről. Még az sem következik, hogy alkalmazásuk kérdését az új kifejezésekéhez hasonlóan kellett volna látnia. Az *Appendix* vizsgálatával eldöntendő kérdés az, hogy végül is lemondott-e a „parallela" kifejezés, valamint a kétvonalas jel használatáról, vagy sem. A válaszokat azonban nem kell előfeltételeznünk, hanem helyette az *Appendix* mint elsődleges forrás vizsgálatára kell hagyatkoznunk.

Összegezve: a felemás észrevételsor Bolyai felemásan végigvitt nyelvi szigorúságát mutatta. Egyfelől transzparenssé tette a fogalmi, terminológiai és szimbólumrendszer kialakításának elveit. Ezzel megmutatta egyrészt a fogalmi-terminológiai reflexivitást, másrészt a fogalmi-terminológiai és jelölési szigorúság általános jellegét. Másfelől azonban napfényre hozta, hogy Bolyai e szigorúságnak a saját maga által felállított mérce szerint nem tudott megfelelni, és az új terminusok megalkotásának nehézségét nem sikerült (még saját magát kielégítően sem) megoldania. Az a viszonyulás azonban, amit ezáltal tetten érhettünk, valamint az az általa választott megoldás, hogy végül jellegtelen rövidítésszerű elnevezésekhez folyamodott, bőségesen elég ahhoz, hogy azt állítsuk: amit az *Appendix*ben találunk, az vagy alapos megfontolás eredménye, vagy az ennek szűrőjén is átment és a jelentés magától értetődő voltából fakadó következmény. A látottak egy bizonyos vonatkozásban árnyalják a Standard Nézet által kialakított képet, ám azt, hogy amit az *Appendix*ben találunk, névértéken kell venni, megerősítik.

Úgy vélem, hogy az *Appendix*beli matematikai szimbólumok általános és a kétvonalas jel specifikus használatának sajátosságai nem hagynak kétséget a régtől fogva ismert és centrális helyzetű „parallela" terminus műbeli helyét és értelmét illetően. Szó sincs arról, hogy az új terminusokhoz hasonló „bizonytalankodást" vagy a „parallela" kifejezés további alkalmazásának kérdésében elbizonytalanodást figyelhetnénk meg. A kétvonalas jel használatát és a „parallela" kifejezés *Appendix*beli szerepét illetően nagyonis világos és sokatmondó jelhasználattal, meglehetősen egyértelmű olvasattal van dolgunk. Ehhez pedig nincs másra szükség, mint komolyan venni a mű meglehetősen konzekvens, önmagában is árulkodó – a Standard Nézet által lényegében figyelmen kívül hagyott – jelhasználatát.

6.3 A kétvonalas jel, mint a Bolyai-féle „parallela” jele

6.3.1 Az *Appendix* jelmagyarázata

Az *Appendix* egyik megkülönböztető jegye a mű elején közölt *Explicatio signorum*, azaz a „jelek kifejtése”. A jelmagyarázat egyik sajátosságát az adja, hogy Bolyai a rendkívül precíz jelmagyarázatban számos olyan jelet vezet be és értelmez, amelyek teljesen eredetiek. Ezek használata csak a Bolyaiakra jellemző. A jelmagyarázat igazi értelmét persze a jelek későbbi használatának sajátossága világítja meg: az előzetesen bevezetett jelek mögött álló latin terminus verbalitására mind Bolyai János, mind Bolyai Farkas igen intenzíven támaszkodik.
Egyelőre az *Appendix*nél maradva: a jelmagyarázat nyújtja, többek között, például a ’∟’, a ’∧’, az ’*R*’, a ’≡’ és az ’O*r*’ jelek értelmezését, továbbá néhány más, tipográfiailag nehezen visszaadható jel verbális feloldását is. Ezek jelentése sorjában a következő (először a kifejezés magyar fordítását, majd zárójelben az eredeti Bolyai-féle latin kifejezés szerepel a megfelelő alakban:

∟ :	merőleges (*perpendicularis, -e, mn.*),
∧ :	szög (*angulus, -i, hn.*),
R :	derékszög (*angulus rectus, -i, hn.*),
≡ :	egybevágóság vagy kongruencia (*congruens, -entis, mn.*),
O*r* :	az ‘*r*’ sugarú kör kerülete (*peripheria circuli radii r*).

A tipográfiailag visszaadhatatlan jelek közé számít például a határérték Bolyaiak által használt jele, az izogonalitás (vagy egyenlőszögűség), valamint az *r* sugarú kör területének jele. Emellett sajátos jeleket vezet be az egyenesre illeszkedő pontok összességének, a félegyeneseknek, a síkbeli pontok összességének, a félsíknak, a szögtartománynak és a síktartománynak a jelölésére. Ezen felül Bolyai természetesen használ a műben olyan további matematikai jelöléseket is, amelyek a jelmagyarázatban nem kerültek és nem is szorulnak értelmezésre. A verbálisan kifejtetlen matematikai jelek a következők: ’+’, ’<’, ’>’, ’=', ’0’, ’π’, ’sin’, ’cos’, ’tang’, ’cot’, ’lognat’, ’Δ’, ’□’, ’sinvers’ és a hatványozás szokásos jelölései. Ezeket valóban úgy tekinthetjük, mint közismert, előzetes értelmezésre nem szoruló vagy önmagukért beszélő jelöléseket. Van azonban két további jel is, amelyet Bolyai nem fejt ki verbálisan az *Explicatio signorum* keretében. Az egyik a mű első paragrafusában bevezetett háromvonalas jel (‘|||’), míg a másik a mű huszonkettedik paragrafusában bevezetett kétvonalas jel (‘||’) (*4.F ábra*). A háromvonalas jelet a legelőször nem metsző (fél)egyenesekkel összefüggésben, míg a kétvonalasat az egyenlő távolságú *L*-vonalakkal – a nem-euklideszi geometria általánossá vált terminológiájával: a paraciklusokkal – kapcsolatban vezeti be. Bolyai ezáltal, pusztán a jelek kifejtését vagy bevezetését tekintve, egyik jelhez sem kapcsol *direkte* a történeti értelemben vett euklideszi geometriában gyökerező jelentésű terminusokat, így a „parallela" terminus megfelelő változatát sem. Bolyai ilyen szempontból sem a jelmagyarázatban, sem a jelek bevezetésének módjában nem tesz különbséget közöttük. Valójában éppen ezért nincs alapja annak, hogy a Standard Nézet Bolyai jelhasználatára hivatkozva megalapozott módon rendelhesse hozzá a „parallela" terminust az első paragrafusban bevezetett jelhez: a bevezetés módját illetően *nem indokoltabb* a háromvonalas szimbólumhoz hozzárendelni, mint a 22.§-ban bevezetett kétvonalas jelhez. Ebből a szempontból, már ami a jelmagyarázatbeli hiányukat vagy a főszövegbeli bevezetés jellegét illeti, a két jel teljesen egyenrangú bánásmódban részesül. Tágabb perspektívából tekintve azonban az egyenrangúságot két dolog is megszűnteti: a kétvonalas jel közismertsége és közkeletű használata, azaz a jelhasználati konvenció által biztosított kézenfekvő értelmezhetőség, valamint a jelhasználat azon általánosabb, Bolyaiakra jellemző vonása, amelyet a Bolyai János *Appendix*ét magába foglaló Bolyai Farkas-féle *Tentamen* is mutat.

6.3.2 A párhuzamosság kétvonalas jelének tradícionális használata

Nézzük elsőként a párhuzamosság kétvonalas jelének tradícionális jellegéből fakadó következményeket. A következőkben persze mindvégig érdemes szem előtt kell tartanunk, hogy a párhuzamosság közismert kétvonalas jele az újszerű háromvonalas jellel verseng a „parallela" terminussal való társíthatóságért. A Standard Nézetnek a háromvonalas jel *Appendix*beli szerepéről adott beszámolója, illetve az erre épülő tényleges érvelések, valamint az elképzelhető megmentési kísérletek éppen azt hagyják figyelmen kívül, hogy a párhuzamosság közismert jele igenis ott van a műben, csak más helyen és a nézet felfogásától eltérően az egymástól egyenlő távolságra elheyezkedő *L*-vonalakkal összefüggésben. Így a háromvonalas jelnek az *Appendix*től különböző, többértelmű, visszautaló forrásokból levezetett Standard Nézet szerinti értelmezése éppen azt nem magyarázza meg, hogy mit kezdjünk azzal a ténnyel, hogy a párhuzamosság konvencionális jele a nézet által kívánatosnak tartott helytől különböző helyen igenis ott van a műben.

Láttuk, hogy a kétvonalas jel első paragrafusbeli szereplése elfogadhatóvá tenne egy olyan magyarázatot, amely a jelhasználati konvencióra alapozná a magától értetődő verbális értelmezhetőséget, és ezzel magyarázná az *Explicatio signorum*beli kifejtetlenségét. Ebből azonban az következik, hogy a Standard Nézetet igazán megkérdőjelező jelenség nem a kétvonalas jel első paragrafusbeli hiánya, hanem máshol és más értelemben való felbukkanása. Ez az, ami kizárja, hogy a háromvonalas jelet a kétvonalas jel felváltásaként, lecseréléseként láthassuk.

Másfelől a háromvonalas jel legjobb esetben is szűkkörű, legfeljebb a Bolyaiak környezetére kiterjedő ismertsége, valamint a kétvonalas szimbólum széleskörű és hosszú múltra visszatekintő használata éppenhogy nem azt az olvasatot teszi magától értetődővé, amely szerint inkább az első paragrafusban bevezetett jelhez kell a „parallela" (vagy a „párhuzamos") kifejezést kapcsolni, és nem inkább a másik helyen bevezetett másik szimbólumhoz. Legalábbis akkor biztosan nem magától értetődő a bevett nézet szerinti olvasat, ha ehhez nem kapunk – mint ahogy a mű korabeli olvasója sem kapott – olyan útmutatást, amely a kétvonalas jel terminológiai értelmezését a tradícióval ellentétes irányba mozdítaná. Ellenben nagyon is kézenfekvő, hogy a jelhasználati konvenció alapján a párhuzamosság jelölésére addig is használt kétvonalas jelhez társítsuk – illetve, hogy a mű korabeli olvasója is ehhez társítsa – a párhuzamosságot, vagy a neki megfelelő terminust. A dolgot a Standard Nézet által sugallt látásmód helyett pontosan fordítva kell látni: Bolyai nem számíthatott arra, hogy a megszokott kétvonalas jel helyett a merőben újszerű háromvonalas jelhez fogják „parallelát" társítani. Arra sem számíthatott, hogy a „parallelát" *nem fogják* a kétvonalas jelhez kapcsolni. Ha a Standard Nézet felfogásának megfelelően elfogadjuk, hogy Bolyai jelhasználata, szimbólumai „bonyolult kifejezéseket pótolnak" azért, mert „el akarta kerülni a szemléletességtől átitatott hagyományos terminológiát" (*à la* Salló), akkor nem elég elkerülnie a hagyományos terminusokat – el kell kerülnie a hagyományos jeleket is. Ha pedig mégsem kerüli el a hagyományos jeleket, akkor milyen alapon állítható, hogy a parallelizmus szokásos kétvonalas jele Bolyainál nem a parallelizmust jelenti? Érdemes itt megjegyezni, hogy egyáltalán nem találtam olyan idézetet vagy forráshivatkozást, amellyel alátámasztható lenne a „szemléletességtől átitatott hagyományos terminológia elkerülésének" szándéka, ezért ezt egyelőre sokkal inkább tekinthetjük Salló értelmezési törekvésének, mint Bolyai terminus- és jelhasználati szándékának. Ám még ha a „szemléletességtől átitatott hagyományos terminológia elkerülésének" igazolható lenne is, akkor azt, hogy Bolyai a párhuzamosság jólismert kétvonalas jelét nem kerülte el, nem inkább annak bizonyítékaként kellene-e látnunk, hogy a hozzá kapcsolódó terminust sem akarta elkerülni? A párhuzamosság konvencionális jeléről nem lehet egyszerre állítani, hogy Bolyai elkerülte és megtartotta. Ha pedig szemmel láthatóan megtartotta, akkor mindaddig, amíg nem kapunk további fogódzókat, nincs alapunk ahhoz, hogy a megtartást az elkerülésnél kevésbé tudatos döntésnek, vagy „a jel jelentésének kézenfekvő jellegéből fakadóan önkéntelen”, de kevésbé releváns lépésnek tartsuk. Következésképp: a Standard Nézet által sugallt olvasattal szemben nincs indok arra, hogy ne a kétvonalas jelhez kapcsoljuk a „parallela” kifejezést, és hogy ne kapcsoljuk össze vele.

Ez a két szimbólum egymással folytatott küzdelmében igen erősen a kétvonalas jel felé billenti a mérleg nyelvét a „parallela”-ként való interpretálhatósághoz. A továbblépéshez a Bolyai János által az *Appendix*ben és a Bolyai Farkas által a *Tentamen*ben követett jelhasználat azon vonásáról kell beszélnünk, amelyet eddig egyáltalán nem érintettünk, és amelyet lényegében figyelmen kívül szokás hagyni. A Bolyai János által megvalósított jelhasználat ugyanis rendelkezik egy olyan jellegzetességgel – egy olyan kódolási eljárást követ – amely céljából adódóan a mű megfelelő, egyértelmű olvasatát hivatott biztosítani. Ez a kétvonalas jelhez hozzárendelendő és egymással versengő terminusok közül csak az egyiket támogatja. Ehhez az olvasathoz nem csekély további muníciót a *Tentamen* jelmagyarázatának szemrevételezéséből is nyerhetünk.

6.3.3 A kétvonalas jel és a „parallela” a Bolyai Farkas-féle *Tentamen* jelmagyarázatában

Vessünk egy átható pillantást Bolyai Farkas *Tentamen*jének *Explicatio signorum*ára is. Amikor ugyanis korábban azt állítottam, hogy az *Appendix*et Bolyai János által jelöléstechnikailag, általánosabban pedig tipográfiailag jóváhagyott műnek kell tekintenünk, akkor sem gondoltam azt, hogy a *Tentamen*től teljesen függetlenítenünk kellene. Nem képzelem, hogy a *Tentamen*t teljesen irrelevánsnak kellene tekintenünk az *Appendix*re nézve. Csak azt állítom, hogy az *Appendix*re nem tekinthetünk úgy, mint amely nem tükrözi Bolyai János jel- és kifejezéshasználatát. A dolgot sokkal inkább úgy kell felfogni, hogy az *Appendix*et önálló műként és függelékként egyaránt szemügyre kell vennünk, és az *Appendix* önálló, valamint *Tentamen*ből következő olvasatára egyaránt szükségünk van. A kétfajta olvasatnak egymással egyezőnek, de legalábbis ellentmondásra nem vezetőnek kell lennie.

Hogy mi szól az *Appendix* tipográfiai zártsága és az önálló műként való értelmezhetőség mellett, már láttuk. A két Bolyai közötti szoros matematikai kapcsolatot figyelembe véve azonban az sem feltételezhető, hogy ne ismerték volna tökéletesen egymás jelöléstechnikai apparátusát és módszereit. Márcsak azért sem, mert ennek előnyeire támaszkodtak az egymással folytatott levelezés során is. Az is elgondolhatatlan, hogy a közös megjelentetés során nem kellett ismerniük és szem előtt tartaniuk egymás jelölésrendszerét, valamint a jelhasználat alapelveit. Ha másért nem, hát a függelék-jelleg miatt éppen azt nem gondolhatjuk, hogy Bolyai Jánosnak műve megformálásakor nem kellett tekintettel lennie, és nem volt tekintettel a *Tentamen* megformálásának sajátosságaira. Nem képzelhető el, hogy a két művet ne kellett volna tipográfiailag egységesíteni, azaz a különösen nehézkes nyomdai előállítási körülmények miatt, illetve a mű egységes megjelenése végett harmonizálni. És végül azt se felejtsük el, hogy az egyik korábban vizsgált forrásban Bolyai János éppen azt tette egyértelművé, hogy az általa használt sajátos jelek (a szög és a határérték jele, valamint a háromvonalas szimbólum) eredetileg Bolyai Farkastól eredtek, és hogy tőle vette át ezeket.

Végeredményben tehát a *Tentamen*hez két célból is fordulhatunk. Egyrészt a jelhasználati egyezések ellenőrzésének szándékával, másrészt támaszkodhatunk rá további információk szerzése céljából, ha az ily módon nyert ismereteket az *Appendix* megerősíti.

Az első fontos egyezés, hogy Bolyai Farkas szintén a műve elején adja meg a jelmagyarázatot. Bár a *Tentamen* első kötetének nagy formátumú, kihajtható *Explicatio signorum*a csak a könyv kötését követően került beragasztásra, a második kötet már az átszerkesztett, normál méretű lapokra nyomott és a műbe rendesen bekötött jelmagyarázatot tartalmazza. További fontos párhuzam, hogy bizonyos jelölések és kifejtéseik megegyeznek a két műben (a *Tentamen*ben és az *Appendix*ben). Egyezést mutat például a derékszög és a szög jele, valamint feloldásuk. Bolyai Farkas *Tentamen*jének első kötete azzal a további sajátossággal is rendelkezik, hogy néhány, Bolyai János által kifejtetlenül hagyott, de önmagáért beszélő jelet is értelmez, például ’Δ’ (háromszög; *triangulum, -i, kn.*) illetve a ’□’ (négyszög; *quadratum, -i, kn.*).

Különbség azonban, hogy Bolyai Farkas a *Tentamen* jelmagyarázatában is szerepelteti a ‘||’ jelet és megadja a verbális interpretációját: egyszer a „parallelus”, másszor a „parallela” kifejezéseket társítja hozzá a megfelelő, ragozott alakban. A két különböző változat forrása, értelemszerűen, a *Tentamen* két különböző kötete: a „parallelus” változat a mű 1832-es első, míg a „parallela” az 1833-as megjelenésű második kötetének jelmagyarázatában szerepel.

A ‘||’ jel feloldása az első kötetben:

A || B ------------ A parallelum ipsi B[79]

Az 1833-as második kötet esetében pedig a következő:

A ∟ B denotat, quod A ad B *perpendicularis* sit.[80]

[79] Azaz magyarul: „A parallel (párhuzamos) magához B-hez.”

A || B significat, quod A *parallela* ad B sit.[81]

Ez tehát kétségtelenné teszi, hogy a kétvonalas jel értelme, a tradíciónak megfelelően: „parallela" („párhuzamos").

A *Tentamen* önmagán túlmutató jellemvonása pedig számunkra az, hogy a Bolyai Farkas-féle *Explicatio signorum*ban felfedésre kerül a műben – és majd az *Appendix*ben is – követett kódolási eljárás mikéntje és a visszafejtés alapelve. Az *Appendix* ugyanis nem pusztán a jelmagyarázat stílusában, hanem a Bolyai Farkas által alkalmazott „sifrírozási eljárásban" is követi a *Tentamen*t. Ami különbség, hogy amíg az *Appendix* kapcsán ezt a – nem túlságosan nehéz – feladványt az olvasónak magának kell megoldania, addig a *Tentamen* ezt sem bízza az olvasóra. A *Tentamen* egyértelművé teszi, hogy a szóban forgó jelek a továbbiakban a szó rövidítését szolgálják, és ragozásra is kerülnek. A *Tentamen* jelmagyarázatában ugyanis a következő, a visszafejtést segítő jelkulcsot találjuk:

Δla, Λli, ||la, ||logrammum, ||lepipedum, ∟ris etc. tantum est, ac *triangula, anguli, parallela, parallelogrammum, parallelepipedum, perpendicularis* etc.[82]

Mindent egybevetve a *Tentamen*t két szempontból is mérvadónak tekinthetjük. Egyrészt speciálisan, a kétvonalas jel és „parallela" terminus közötti viszonnyal kapcsolatos útmutatásban, másrészt általánosan, a jelmagyarázati jeleknek – a mű egyértelmű olvasatát szolgáló – „desifrírozásában".

6.3.4 A „parallela" megkerül

Az imént a *Tentamen*re elmondottak az *Appendix* helyes olvasatához is iránymutatással szolgálnak – Bolyai János pontosan ugyanazt a jelölési-kódolási eljárást követi, mint Bolyai Farkas. Bolyai Farkas *Tentamen*jének jelkulcsa így egyúttal az *Appendix* jelkulcsa is. Hogy ez valóban így van, azt a legegyszerűbb ellenőriznünk a jelmagyarazátban értelmezett jelek

---

[80] Azaz magyarul: „A ∟ B jelölje, hogy A merőleges B-re."

[81] Azaz: „A || B jelölje, hogy A parallel (párhuzamos) B-vel."

[82] Azaz magyarul (de az eljárás kidomdorítása céljából a geometriai tárgyak latin neveit nem fordítva): „Δla, Λli, ||la, ||logrammum, ||lepipedum, ∟ris stb. annyit tesz, hogy *triangula, anguli, parallela, parallelogrammum, parallelepipedum, perpendicularis* stb." Bolyai Farkas egy lényegesen későbbi megjegyzése szerint a kétvonalas jel még mindig „parallelt" jelent, hiszen: „|| és ∟ esmert jegyek; az első parallelt, a' 2dik pedig perpendicularist teszen" (Bolyai 1843: XXXIX).

szövegbeli használatán, hogy azután áttérhessünk a kifejtetlenül maradt jel (vagy jelek) használatának megfigyelésére is.

A jelmagyarázat verbálisan interpretált jelei közül a szög ('∧') vagy a merőlegesség ('∟') jeleit a szövegben a következő sajátos formákban találjuk meg:

∧lus, ∧lum, ∧li, ∧lo, ∧los, ∧lorum

∟ri, *∟re, ∟res, ∟ris, ∟ria, ∟rium, ∟ribus*, *∟riter*

A szög és a merőlegesség jelét összesen hatvanszor találjuk meg az *Appendix*ben ilyen, toldalékkal ellátott formában (*3.F* és *11.F ábra*). Az *Appendix* szövegében azonban vannak olyan további, toldalékkal ellátott jelek, amelyek a jelmagyarázatban nincsenek kifejtve. Ilyen verbálisan értelmezetlen, de toldalékkal kiegészített jel összesen harminchatszor fordul elő a műben. A jelmagyarázatban ki nem fejtett, de az *Appendix* szövegében ragozott formában szereplő szimbólumnak számítanak a számnevek önmagukért beszélő jelei, a „triangulum" Bolyai Farkasnál kifejtett, Bolyai Jánosnál kifejtetlen szimbóluma, és végül a kétvonalas jel Bolyai Farkasnál úgyszintén kifejtett, Bolyai Jánosnál megintcsak kifejtetlen jele (*6.F ábra* és *12.F ábra*). A jelmagyarázatbeli kifejtettségre tekintet nélkül Bolyai tehát mindösszesen kilencvenhatszor használ az *Appendix*ben ragozott, toldalékolt marematikai szimbólumot. Lényegesen többször annál, hogy – függetlenül az *Explicatio signorum*beli szóbeli értelmezettség tényétőé – ne tudatos és ne következetesen alkalmazott jelölési módszernek tekinthessük (*6. táblázat*). De mi a toldalékok funkciója, és mire lehet belőlük következtetni? Nos: az alapjeleket a jel által fedett latin kifejezés ragozott alakjainak megfelelő toldalékok egészítik ki. Hasonlóan ahhoz, mint amikor a háromszög rövidítése céljából saját használatra bevezetett 'Δ' jel használata mellett is szeretnénk megőrizni a szöveg helyes, értelmes és összefüggő kiolvashatóságát. Ekkor például a „háromszögek" a 'Δ*ek*', esetleg 'Δ-*ek*', vagy 'Δ*gek*' a „merőlegesen" pedig a „∟*en*", esetleg „∟-*en*" vagy „∟*sen* formában volna kifejezhető. E séma szerint ellenőrizve a szóban forgó szimbólumokat és a nyelvtani jellemzőket (szófaj, nem, ragozási típus és esetei) figyelembe véve a jelmagyarázati jelek által fedett latin szavak éppúgy tökéletesen simulnak bele a szövegbe, mint az összes többi. Ezt az *Appendix* 1902 és 1903-as akadémiai kiadása is megerősíti (Kürschák József és társai 1902, 1903), amely éppen ennek a sémának megfelelően „írta" át a mű új kiadását – eltüntetve ezáltal a jelenség kiugró, vagy egyáltalán megfigyelhető jellegét (*38.F ábra* és *39.F ábra*). Ugyanakkor az eredeti megjelenési forma kilencvenhat esete Bolyai Farkas *Tentamen*jének jelkulcsa nélkül is felismerhetővé és egyértelművé teszi a szerzői szándékot: a szövegbeli jelhasználat önmagában is útmutatással szolgál a jelek verbális visszafejtéséhez. Mivel pedig ez a sajátos jelölésmód az *Appendix Errata*jában is visszaköszön (amelyet, mint láttuk, Bolyai János „nyomtattatott" saját kezűleg), ezért kétségek nélkül tekinthetjük Bolyai János-féle írásmódnak is (*9.F ábra* és *10.F ábra*).

A Bolyai Farkas-féle jelkulcs mellett ugyanis a latin nyelv grammatikai szabályai, mindenekelőtt a ragozási szabályok, járulékos ellenőrzési lehetőséget biztosítanak számunkra. Ez azért van így, mert a Bolyaiak által alkalmazott eljárás nemcsak a ragozási osztály (*declinatio*) esetről esetre változó végződését, hanem a változatlan szótő utolsó betűjét is feltünteti. A szótő utolsó betűjének feltüntetése nélkül például az *angulus* jele ('∧') a következőképpen ragozódna, illetve a következő formák fordulna elő a szövegben: '∧us', '∧um', '∧i', '∧o', '∧os', '∧orum'. Ehhez képest jelent többlet-információt a Bolyaiak által követett eljárás, amely a szög '∧' ragozott jelét a '∧lus', '∧lum', '∧li', '∧lo', '∧los', '∧lorum' formában alkalmazza. Mindez nagymértékben leegyszerűsíti a jel által takart kifejezés visszafejtését és a szóba jöhető lehetőségek szűkítését azokban az esetekben is, amikor a Bolyai János által interpretálatlanul hagyott jelekről van szó.

Rátérve ezekután a kétvonalas jel *Appendix*beli előfordulására a következőket mondhatjuk: a '||' jel (a ragozatlan előfordulásokon kívül) a következő formákban fordul elő toldakékkal kiegészített alakban: ||lam, ||la, ||lae és ||las (Kárteszi 1973: 54-5, *7.F, 8.F* és *13.F ábra*). Mind a négy eset az *Appendix* 32. paragrafusának III. pontjában található.

A jelhez járuló toldalékok két komponense – a változatlan szótő utolsó betűje plusz a változó rag – együttesen megszabja a '||' jellel lefedhető kifejezések körét, és lényegében a „parallela"-ra" szűkíti le a szóba jöhető jelölteket. Mindez tökéletesen egybevág a Tentamen*ből következő, Bolyai Farkas jelkulcsa segítségével előrevetített olvasattal.*

Ami igazán meglepő, hogy a Stackel-féle *Raumlehre-Appendix*-kompiláció, valamint ennek Rados-féle fordítása, továbbá a Tóth Imre *Appendix*-fordítás is megfelel az általam adott olvasatnak. Stackel a *Raumlehre* közlésekor (Stackel 1913/2: 193) és Rados a fordításban (Stackel 1914/2: 206) ugyanis a 22. paragrafus kétvonalas jeléhez olyan, az értelmezést segítő közlői, illetve fordítói lábjegyzeteket kapcsoltak, amely szerint: „Így olvasandó: *párhuzamos*" (*42.F ábra* és *45.F ábra*).

Külön érdekesek Stackelnek, Radosnak és Tóthnak az *Appendix* 32. paragrafusának átültetésekor választott fordítási megoldásai. Ekkor ugyanis a fordítóknak szembe kellett találniuk magukat a kétvonalas jel ragozásával. Vajon hogyan oldották meg a kérdést? A Stackel-féle *Raumlehre*-kompiláció 32. paragrafusában (ne feledjük: ez már az *Appendix*

Stackel-féle fordítása) a kétvonalas jel a következő formában szerepel: ’||en’ (Stackel 1913/2: 205, *46.F ábra*). Ez az eredeti ragozott latin jel „parallelen”-ként való értelmezését sugallja, ami összhangban is van Stackel 22. paragrafushoz fűzött lábjegyzetével. Rados fordítása is ehhez igazodik: „Az előbbiek alapján ugyanis könnyen kimutatható, hogy a síkban az L-en, a körön és az egyenessel ||-okon kívül más egyenletes vonal nincsen.” (Stackel 1914/2: 219-220.

Tóth Imre pedig úgy oldja meg a dolgot, hogy a kétvonalas jelhez egyszer az „-os”, másszor az ”-osokon” toldalékot illeszti, vélhetően az eredetiből való fordítás és a magyar szöveg értelmessége által együttesen megkívánt követelményeknek megfelelően. Ez pedig az adott helyeken a „párhuzamos” kifejezés behelyettesíthetőségét sejteti. Míg Stackel esetében kétszeresen is megerősítést nyert, hogy a Bolyai-féle „parallela” kérdésében nem tartozik a Standard Nézet képviselői közé (legfeljebb részlegesen, a háromvonalas egyenesek „aszimptotikus”-nak minősítése miatt), addig Tóth Imre esete bonyolultabb. Fordítási megoldása, feltéve, hogy az átültetés során valóban a „párhuzamos” szót tartotta szem előtt, nem felel meg annak, amit egyébként képvisel. Egyfelől megintcsak arról van szó, hogy fordítási metódusára és konkrét megoldásaira az általa is képviselt Standard Nézet nem nyomta rá bélyegét, ugyannakkor másfelől mintha valami megakadályozta volna abban, hogy az általa tapasztalt jelenség konzekvenciát mind a saját álláspontjára, mind matematikatörténet-írásra nézve levonja.

Ami a Standard Nézet többi képviselőjének megoldását illeti: Kárteszi a 32. paragrafus fordításakor az ekvidisztáns értelemben használt kétvonalas jelet szó szerint kiírva többször is „párhuzamos”-nak fordítja (Kárteszi 1973: 101-2; Kárteszi és Szénássy 1987: 104).[83] Figyelembe véve, hogy az első paragrafussal kezdődő résznek is a „A párhuzamosság”

---

[83] A helyzet kaotikus jellegét mi sem mutatja jobban, mint hogy Kárteszi a 22. paragrafushoz fűzött magyarázó kommentárjában is (majd folytatólagosan) egymással szinonim kifejezésként használja a „párhuzamos” és az „egyenlőközű” kifejezést: „Ha a paraciklust önmagában eltoljuk – a tengelyeket a görbéhez mereven kötöttnek képzeljük –, egy tengelynek bármely pontja paraciklust ír le. Az így származtatott paraciklusokat egymáshoz képest *párhuzamos* vagy *egyenlőközű* paraciklusoknak nevezzük. A párhuzamos paraciklusoknak minden normálisa közös és két paraciklusnak a normálison mért távolsága mindenütt egyenlő. (…) Ha a paraciklust a tengelyéhez kötjük mereven és a tengelyt toljuk el, önmagában, akkor a paraciklus a vele párhuzamos paraciklus helyében lép … Két párhuzamos paracikluson – a közös normálisok metszéspontjait egymáshoz rendelve – egy-egyértelmű megfeleltetés létesül.” (Kárteszi 1973:141). Kálmán hasnlóan egyszerre tartja Bolyai-féle értelemben párhuzamosnak az először nem metsző egyeneseket, valalmint az egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő paraciklusokat (Kálmán 2003: 39-41). Ezekből látszik, hogy mennyire nem kézenfekvő még modern matematikában, és ezen belül a nem-euklideszi geometriában jártas matematikusok számára sem az euklideszi párhuzamosság pusztán nem metszőként értelmezése, és hogy mennyire kézenfekvő az „ekvidisztáns”, „egyenlőközű” értelemben való használata. V. ö. az *Appendix* 1-3. paragrafusához fűzött magyarázataival (Kárteszi 1973: 124); valamint az értekezés 3.2 pontjával.

fejezetcímet adta (Kárteszi 1973: 71; Kárteszi és Szénássy 1987: 75), valamint hogy az első paragrafust „az euklideszi értelmezést speciális eset gyanánt magába foglaló tágabb párhuzamosság-értelmezésnek” tartja (Kárteszi 1973: 127), eljárását összességében is inkoherenssé teszik. Az *Appendix* 1902 és 1903-as új akadémiai kiadásának pedig az a sajátossága, hogy miközben egyetlen kivétellel minden ragozott matematikai szimbólumot visszaalakít és szó szerint kiír, addig egyedül a ragozott kétvonalas jelet hagyja meg eredeti formájában (Kürschák József és társai 1902, 1903: 22).
A Standard Nézet többi képviselőjétől származó fordítások a szóban forgó helyen egyszerűen ignorálják a kétvonalas jel toldalákait.

Mindent egybevetve: a kétvonalas jel tradícionális használatából adódó olvasat, Bolyai Jánosnak az Appendix*ben alkalmazott következetes és informatív jeléléstechnikai eljárásmódja, figyelembe véve a mű tágabb kontextusából – a Bolyai Farkas-féle* Tentamen*ből fakadó értelmezési útmutatást és a geometria története által kitüntetett fogalmi-terminológiai apparátust –, külön-külön és együttesen egyaránt arra mutatnak, hogy a* ‘||’ *jel rejti a „*parallela*” terminust, azaz a „*parallelus*” megfelelő alakját.* Erre az eredményre és a kétvonalas jel *Appendix*beli használatára alapozva lehetségessé válik, hogy kiderítsük: Bolyai számára mit jelent, azaz milyen értelemben használja a műben a „parallela” kifejezést. Ez az, amit Bolyai-féle „parallela”-nak tekinthetünk. Ha pedig a „parallelát” a párhuzamossal azonosítjuk, akkor a Bolyai-féle párhuzamosságról is ebben az értelemben kell beszélnünk.

6. táblázat. Az Appendixben használt ragozott matematikai szimbólumok

A ragozott jel eredeti, *Appendix*beli előfordulási formájában	A ragozott jel teljes kiírt alakja	Az *Appendix*beli előfordulás helye és darabszáma (paragrafus/db)	A ragozott alak összes előfor-dulása (db)	Az alapjel rago-zott előfor-dulása (db)
∧lus	angulus	5.§/1	1	32
∧lum	angulum	7.§/1, 10.§/1, 18.§/1, 37.§/1	4	
∧li	anguli	32.§/1, 35.§/1, 39.§/1, 42.§/1	4	
∧lo	angulo	5.§/2, 20.§/1, 25.§/1, 33.§/1, 35.§/2, 39.§/1	8	
∧los	angulos	31.§/1, 33.§/1	2	
∧lorum	angulorum	25.§/1, 26.§/1, 39.§/2, 40.§/1, 41.§/2, 42.§/4, 43.§/2	13	
∟ri	perpendiculari	17.§/1, 41.§/1, 43.§/2	4	28
∟re	perpendiculare	17.§/2	2	
∟res	perpendiculares	30.§/1, 39.§/1	2	
∟ris	perpendicularis	19.§/2, 35.§/1, 36.§/1, 38.§/1, 40.§/1, 41.§/1	7	
∟ria	perpendicularia	27.§/1	1	
∟rium	perpendicularium	20.§/1, 32.§/1	2	
∟ribus	perpendicularibus	32.§/1	1	
∟riter	perpendiculariter	8.§/1, 10.§/4, 18.§/1, 32.§/1, 35.§/1, 43.§/1	9	
Δlum	triangulum	33.§/1	1	22
Δli	trianguli	41.§/1, 42.§/4, 43.§/1	6	
Δlo	triangulo	25.§/2, 26.§/1, 41.§/3	6	
Δla	triangula	40.§/1, 42.§/1	2	
Δlorum	triangulorum	30.§/2, 37.§/1, 39.§/2, 42.§/2	7	
1mo	primo	31.§/1	1	1
2dum	secundum	32.§/1	1	5
2do	secundo	31.§/1	1	
2dae	secundae	32.§/1	1	
2darum	secundarum	32.§/1	1	
2di	secundi	Errata/1	1	
3tio	tertio	31.§/1, Errata/1	2	3
3tae	tertiae	Errata/1	1	
4tum	quartum	37.§/1	1	1
||la	parallela	32.§/1	1	4
||lam	parallelam	32.§/1	1	
||lae	parallelae	32.§/1	1	
||las	parallelas	32.§/1	1	

6.4 A Bolyai-féle „parallela” értelme

Most tehát adott, hogy hol rejtőzködik a műben a „parallela” terminus — a kérdés már csak az, hogy milyen értelemben jut szerephez.

Ha az *Appendix*ben a kétvonalas jel fedi a „parallelus” kifejezést (vagy a belőle grammatikailag levezethető formájú „parallela”-t), akkor a '||' jel minden előfordulási helyéhez ezt kell társítani. Ez azonban lényegesen több esetet jelent, mint ahol a ragozásból következő és az alapjelet kiegészítő toldalékot találunk. Ragozott alakban ugyan csak a 32. §-ban tűnik elő, de már a mű 22. §-ától alkalmazásra kerül. A kiegészítések pedig csak akkor jönnek szóba, ha a matematikai szöveg „összefüggő olvashatósága” szükségessé teszi, és ekkor is csak a „parallela” formához képesti változások nyomon követésére szolgálnak.

Ha a kétvonalas jel takarja a „parallela” szót, akkor jelentése azokkal a geometriai alakzatokkal, illetve azzal a közöttük fennálló relációval van összefüggésben, amelyekkel kapcsolatban Bolyai alkalmazza. A kifejezés értelmének rekonstruálásához az összes ilyen használatot kell figyelembe vennünk.

Bolyai a kétvonalas jelet az egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő, úgynevezett *L*-vonalakkal összefüggésben vezeti be, és a műben mindvégig használja az egymással ekvidisztáns viszonyban álló *L*-vonalakkal összefüggésben. Bolyai mindazonáltal más vonalfajtákkal összefüggésben is a szóban forgó jelhez folyamodik – akkor is tehát, ha más vonalfajták *ugyanolyan* viszonyban vannak egymással, mint az egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő *L*-vonalak. Így a kétvonalas jelet veszi igénybe akkor is (bevezetésszerűen a mű 27. §-ában), amikor a szóban forgó reláció két olyan vonal között áll fenn, amelyek közül az egyik egyenes, míg a másik olyan vonal, amelyre az egyenestől egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok illeszkednek.

Két tetszőleges paraciklus (*L*-vonal) nem szükségképpen ekvidisztáns, mint ahogy egy hiperciklus és egy egyenes sincs szükségképpen ilyen viszonyban. Bizonyos paraciklus-párok és bizonyos egyenes-hiperciklus párok azonban ilyen viszonyban vannak, azaz egymáshoz képest ekvidisztánsak – Bolyai pedig éppen ennek a sajátos viszonynak a jelölésére használja a „parallela”-t helyettesítő kétvonalas jelet. Érdemes felfigyelni arra is, hogy a relációt az uniformis (önmagában eltolható) vonalfajtákon belül vonaltípustól függetlenül használja, azaz tekintet nélkül arra, hogy paraciklus-paraciklus, vagy hiperciklus-egyenes vonalpárról van-e szó.

Erre alapozva azt mondhatjuk, hogy Bolyai számára a „parallela” kifejezés az „ekvidisztánsat”, azaz az „egyenlőtávolságút” vagy „egyenlőközűt” jelentette. Megengedve, hogy a „párhuzamos” azt jelenti, amit a „parallelus” vagy a „parallela”, azt is mondhatjuk, hogy Bolyai számára a „párhuzamos” az „ekvidisztáns”-at, a „párhuzamos vonal” pedig az „egyenlőközű vonal”-at jelentette.

Ez egyszeriben érthetővé teszi azt is, hogy Bolyai miért nem használja – miért nem használhatja – semmilyen módon sem a „parallela” vagy a „parallela linea recta” kifejezést az *Appendix* első passzusának először nem metsző (határhelyzetű) (fél)egyenesére. Mint korábban láttuk, az *Appendix* első paragrafusa abszolút geometriai tétel. Az először nem metsző (fél)egyenes meghatározása nyitva hagyja a kérdést, hogy az „először nem metszés” milyen szögnél következik be, azaz, hogy a közös transzverzálissal alkotott belső szögek összege mennyi. Ha ez az összeg egyenlő π-vel (Bolyai jelölése szerint $2R$-rel), akkor az „Euklidész XI. axiómájának feltevésén alapuló” rendszerről, azaz a logikai értelemben vett euklideszi geometria rendszeréről van szó (Σ-rendszer). Ha pedig az összeg kisebb, mint π (Bolyai jelölése szerint kisebb $2R$-nél), akkor az „Euklidész XI. axiómájával ellentétes feltevésén alapuló” rendszerről, azaz a nem-euklideszi (egészen pontosan a hiperbolikus) geometriai rendszerről van szó (S-rendszer). Míg az első, euklideszi eset megengedi, hogy az először nem metsző (fél)egyeneseket „parallel”-nek tekintsük és nevezzük a szó „ekvidisztáns” értelmében, addig a második, hiperbolikus eset nem. Minthogy a hiperbolikus geometriában az először nem metsző (fél)egyenes az egyik irányban meghosszabbítva végtelenül közeledik, a másik irányban meghosszabbítva pedig végtelenül távolodik a másik egyenestől – kizárt tehát, hogy pontjai a másikhoz képest egyenlő távolságra helyezkedjenek el. Ha a „parallela”-t megtalálnánk az *Appendix* első cikkelyének háromvonalas (először nem metsző) egyenesére alkalmazva, akkor az a jelen körülmények között igen nagy baj lenne: a Bolyai-féle abszolút geometriára vonatkoztatva fogalmi következetlenséget, a Bolyai-féle hiperbolikus geometrián belül pedig egyenesen fogalmi ellentmondást jelentene. Így az általam képviselt tézispár második fele tökéletes összhangot mutat az elsővel, mintegy magyarázza és indokolja azt.

Bolyai terminológiájával, azon túl, hogy nem felel meg a Standard Nézet által kialakított képnek, önmagában tekintve semmi baj nincs: fogalmi ellentmondástól mentes, koherens és konzekvens.

Összegzés

A következőkben röviden áttekintem a disszertáció legfontosabb mozzanatait és eredményeit, valamint jelzem a vizsgálat további távlatait és kutatásra érdemes kérdéseit.

A disszertáció keretében bemutatásra és rekonstruálásra került a Bolyai János-féle „parallela”, illetve „párhuzamos” elfogadott matematikatörténeti felfogása. A felfogást összefoglalóan a Bolyai-féle „parallela” vagy „párhuzamos” Standard Nézeteként jellemeztük. A vizsgálódás megmutatta, hogy a matematika története, azaz a „párhuzamosok problémája” által kitünetett terminus a „parallela”, és ezért jogos a Bolyai-féle „párhuzamos” átfogalmazása a Bolyai-féle „parallela” kérdésévé.

A Standard Nézeten belül három olyan álláspontot sikerült (SN_L, SN_B, SN_H) elkülöníteni, amelyek tartalmilag is különböző dolgokat képviselnek a Bolyai-féle „parallela”-nak az *Appendix* első paragrafusában betöltött szerepét illetően. A három álláspontból kettő volt olyan (SN_L, SN_B), amelyből levezethető volt, hogy a „parallela” valamilyen formában ténylegesen is jelen van a mű első paragrafusában, míg a harmadik (SN_H) valójában a szóban forgó kifejezés hiányát vetítette előre. A bevett nézet által felvállalt két álláspontváltozat (SN_L, SN_B) elkülönítése lehetővé tette egy olyan feltételrendszer megfogalmazását, amelynek tagadása ugyan negatív egzisztenciális állításhoz vezetett, de filológiailag tekintve alkalmasnak mutatkozott arra, hogy empirikusan cáfolható legyen.

Az értekezés egyik legfontosabb állítása az volt, hogy a „párhuzamosok problémájának” története által kitüntetett, valamint a mű nyelvének figyelembevételével valóban a szövegbe illő „parallela” kifejezés az *Appendix* első paragrafusában egyáltalán nem szerepel. Ezen túlmenően azt állítottam, hogy a mű önmagában tekintve nem szolgáltat semmilyen további támpontot – a jelmagyarázat (*Explicatio signorum*) révén sem – a mű első paragrafusának a „parallela” kifejezéssel történő összekapcsolásához. Mindezekből következően az *Appendix* első paragrafusa nem tekinthető a Bolyai-féle „parallela” vagy „párhuzamos” meghatározásának, illetve definíciójának.

A Bolyaiakkal kapcsolatos irodalomban lappangó véleményekből alkalomadtán származtatható ellenvetések megválaszolását követően sor került egy merőben új és a Standard Nézettel homlokegyenest ellentétben álló tézis megfogalmazására, illetve bizonyítására. A tétel szerint Bolyai János az *Appendix*ben a hagyományos kétvonalas jel fedi a „parallela” terminust. Ezt számos érv mellett az a sajátos jelhasználat támasztja alá, amely a jelek által fedett latin kifejezések ragozásában, egészen pontosan a jelekhez járuló és a szöveget grammatikailag helyessé és teljessé alakító toldalékok alkalmazásában nyilvánul meg. A jelmagyarázatban verbálisan is értelmezett, valamint az itt értelmezetlenül hagyott, de magukért beszélő jelek kapcsán egyaránt megfigyelhető jelhasználat összességében egy könnyen megfejthető és félre nem érthető jelkulcsot adott a kezünkbe. Mindezek figyelembe vételével, valamint a szövegben a kétvonalas jelhez járuló ragok alapján, hozzávéve az egészhez a „párhuzamosok problémájának” története által kitüntetett terminológiát és fogalmi kapcsolataikat, kíséreltem meg bizonyítani, hogy a kétvonalas jel rejti a „parallela” kifejezést. A kétvonalas jel műbeli használatának megfigyelésével lehetségessé vált a „parallela” értelmének, jelentésének rekonstrukciója. Ez arra vezetett, hogy Bolyai a „parallela” terminust „ekvidisztáns”, „egyenlőközű” értelemben használja, és uniformis (önmagukban eltolható) vonalfajták (kör, egyenes, paraciklus, hiperciklus) között fennálló sajátos viszonyra alkalmazza. Ez egyrészt alátámasztja, hogy – Bolyai fogalmi ellenmondásmentességre törekvését feltételezve – miért nem használja és miért nem használhatja a mű első paragrafusában az először nem metsző, azaz a hiperbolikus geometriában aszimptotikussá váló egyenesekre a szóban forgó terminust. Másrészt az eredmény a „parallela” terminusnak a történeti értelemben vett euklideszi geometriából származó fogalmi kapcsolatait figyelembe véve – „nem metszés” és „ekvidisztancia” –könnyen értelmezhetőnek tűnik. A „parallela” „ekvidisztáns” értelemben való használata a műben mintegy visszaigazolja azt a feltevést, hogy a kétvonalas jel mögé, a toldalékokat is figyelembe véve, valóban a „parallela” terminust kell helyettesíteni.

A vizsgálat egyik legfontosabb hozadéka azonban az értekezésnek keretet adó szemantikai tézisre adott negatív válasz. Mint láttuk ugyanis a „párhuzamosok problémájának” és a nem-euklideszi geometria történetírásának szemléletét a *horror aequidistantiae* légköre hatja át. Az „ekvidisztanciától való félelemben” az a történeti tapasztalat látszott testet ölteni, hogy a „párhuzamosok ekvidisztáns-elmélete” szükségképpen látszik az ötödik posztulátum bizonyításának kudarcához és ezáltal a nem-euklideszi geometria felfedezése folyamatának megrekedéséhez vezetni. Úgy tűnhetett, hogy a nem-euklideszi geometria ekvidisztáns-alapon felfedezhetetlen. Ez a szemantikai felfedezhetetlenségi tézis egyúttal megmagyarázni látszott azt is, hogy lényegében miért egyöntetű és egymáshoz közel álló a két felfedező, Bolyai János és Lobacsevszkij fogalmi-terminológiai rendszere, és ennek másik oldalaként azt, hogy miért nem látunk egymástól lényegesen elütő fogalmi-terminológiai rendszereket. Az értekezés eredményeként készen kapjuk e két tézis, illetve állítás együttes cáfolatát.

A „parallela” „ekvidisztáns” értelemben való Bolyai-féle használata ugyanis aláássa azt a gondolatmenetet, amely ahhoz a konklúzióhoz vezet, hogy a „parallela–ekvidisztáns” kapcsolat a felfedezés folyamatának szemantikai feltételei következtében nem megvalósulhat meg. Mivel a disszertáció eredményei szerint a „parallela–ekvidisztáns” szemantikai kapcsolat a felfedezők számára igenis realizálható, ezért az a gondolatmenet, amely ennek lehetetlenségét állítja, nem lehet helyes. Eszerint a felfedezés folyamatának nincs olyan általános szemantikai feltételrendszere, amely magában hordaná, mintegy determinálná és előrevetítené a nem-euklideszi geometria lehetséges fogalmi-terminológiai rendszereit, megmutatva egyúttal az önmagukat automatikusan kizáró kombinációkat. Ha van ilyen feltételrendszer, akkor nem az általánosság ilyen szintjén, hanem például, esetleg, a választott módszerhez kötve ragadható meg.

Feltételezve, hogy a Lobacsevszkij-féle párhuzamosság-felfogásra adott jellemzésünk szabatos – és nem hasonlóképpen téves, mint amilyennek egykori megingathatatlansága ellenére mostanra a korábbi Bolyai-féle tűnik – az adódik következményként, hogy Bolyai és Lobacsevszkij egymástól lényegesen eltérő fogalmi-terminológiai rendszert alakított ki, legalábbis az egész problémakör centrális terminusát illetően. A „parallela” „ekvidisztáns” értelemben való Bolyai-féle használata mellé állítva a „parallellinien” „először nem metsző”, „határhelyzetű nem metsző” értelemben való Lobacsevszkij-féle használatát, a két fogalmi-terminológiai rendszert lényegi különbözőségét látjuk — egyöntetűségük vagy lényegi egyezésük helyett. Ez néhány további tanulság leszűrésére is alapot ad.

Egyrészt a felfedezés folyamata mögé nem állíthatunk, vagy nem feltételezhetünk olyan szemantikai mechanizmust, amely oly módon vezeti a fogalmi általánosítás, fogalmi kiterjesztés folyamatát, hogy szükségképpen egyöntetű vagy jól egyező fogalmi-terminológiai rendszert eredményezzen. Nincs olyan, a „fogalmakban lakozó kényszerítő erő”, amely legalább az ismert kifejezések esetében konvergens fogalomalkotási-fogalomkiterjesztési folyamatot eredményezne.

Ugyanez a másik oldalról úgy fogalmazható meg, hogy a jelentésnek, jelen esetben a „parallela” kifejezés (történeti értelemben vett) euklideszi geometriabeli jelentésének nincs olyan összetevője, amelynek feladására a felfedező inkább hajlamos, mint a másikra. Másként: a „parallela” kifejezés jelentésének nincs olyan összetevője, amelynek feladására a „párhuzamosok problémáján” dolgozó geométernek – mint a nem-euklideszi geometria potenciális felfedezőjének – inkább hajlamosnak kell lennie, mint a másikéra, ahhoz, hogy a nem-euklideszi geometriát egyáltalán felfedezhesse, és potenciális felfedezőből ténylegessé válhasson.

Az értekezés téziseinek fényében a nem-euklideszi geometria fogalmi-terminológiai rendszereinek Bolyai- és Lobacsevszkij-féle változatai között körvonalazódó különbségek alapján két további tanulmányozásra érdemes kérdéscsoport jelölhető ki.

Az egyik a matematikai fogalmi-rendszerek közötti választás problémája, amely a tudományos elméletek közötti választás problémájával parallel. A fogalmi rendszerek különbözősége valamilyen további szempont szerinti választhatóságot feltételez, teret hagyva például az utólagos egyezkedésnek, vagy valamilyen további (akár kontingens történeti) mechanizmus szerinti kiválasztódást enged meg. Ha valóban a nem-euklideszi geometria lényegileg különböző fogalmi-terminológiai rendszerei jöttek létre, akkor értelmes és tanulmányozásra érdemes kérdés, hogy hol és hogyan dől el a megfelelő fogalmi-terminológiai rendszer kiválasztása-kiválasztódása? Mi határozza meg, vagy kik és milyen szempontok szerint döntik el, hogy a rendelkezésre álló lehetőségek közül melyik valósul meg és véglegesedik?

A másik kérdéscsoport a fogalmi rendszerek összetalálkozásakor várható és megfigyelhető jelenségek tanulmányozásával kapcsolatos. Az ide tartozó jelenségek tanulmányozását az teszi egyáltalán lehetővé, hogy Bolyai János az *Appendix* megalkotása után hozzávetőleg húsz évvel, 1850-51 körül feljegyzéseket készített Lobacsevszkij *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből)* című művéhez. Bolyainak e kéziratos munkája *Észrevételek* címen ismeretes.[84] Ez a maga nemében páratlan és rendkívül fontos mű: nem csupán a hiperbolikus (nem-euklideszi) geometria egymástól függetlenül megalkotott fogalmi-terminológiai rendszereinek szembesülése egymással, hanem lényegében az egyetlen olyan státuszú dokumentum, amely a fogalmilag és terminológiailag kidolgozott nem-euklideszi rendszerek összetalálkozásának lenyomatát őrzi. A kortárs felfedezők közül ugyanis Lobacsevszkij még csak nem is hallott Bolyai Jánosról és művéről, így módjában sem állt észrevételeit megtenni. Gauss ugyan bizonyos értelemben felfedezőnek számít, azonban eredményeit nem tette közzé, következésképp nem kényszerült gondolatainak a tudományos publikáció kívánalmait is kielégítő megformálására, a fogalmi-terminológiai rendszer részletes kidolgozására.

[84] Az értekezés *5.3* és *5.4* pontjában elemzett forrásrészletek (*14.F, 15.F, 16.F* és *17.F ábra*) az *Észrevételek*ből valók.

Nyilvánvaló, hogy a Bolyai János-féle *Észrevételek* az értekezés eredményeinek, téziseinek is a próbáját jelenti. Érdemes azonban a kérdést általánosabban megfogalmazni, és nem csupán az általam képviselt téziseket szem előtt tartani. Az *Észrevételek* ugyanis tágabban tekintve minden, a Bolyai-féle „parallela"-val, illetve a fogalmi-terminológiai rendszerrel kapcsolatban állást foglaló történeti felfogásnak, így a Standard Nézetnek is próbaköve. Így valójában három egymással összefüggő kérdés tanulmányozását teszi lehetővé az *Észrevételek*.

Az első, közvetlen szinten a vizsgálat értelemszerűen a Bolyai-féle „parallelával" kapcsolatos különböző történetírási nézetekre – a Standard Nézet két változatára (SN_L és SN_B), valamint az általam képviselt felfogásra – vonatkozhat. Ezen a szinten arra kaphatunk majd választ, hogy a megfigyelt és felszínre hozott jelenségek melyik történetírási felfogáshoz illeszkednek. A majdani elemzést jelentősen befolyásolni látszik az a tény, hogy az egyes felfogások a fogalmi-terminológiai rendszerek egyöntetűségével, illetve különbözőségével kapcsolatban lényegesen eltérnek. A kérdés ezen a szinten az, hogy a fogalmi azonosság vagy különbség dolgában elfoglalt alapállás befolyásolja-e a fogalmi rendszerek összetalálkozásának szituációjáról adott beszámolót, valamint az, hogy mi számít, vagy mit tekinthetünk a fogalmi rendszer egyöntetűségére vonatkozó mögöttes felfogások megerősítésének, illetve megkérdőjelezésének. Ez valójában azzal a filológiai módszertani kérdéssel azonos, hogy a történész-rekonstruktőrnek a fogalmi azonosság dolgában elfoglalt alapállása hogyan jut szerephez a történeti anyag értelmezésében, és hogyan befolyásolja nézőpontját, magyarázatát.[85]

A vizsgálat a harmadik szinten a próbák alapjául szolgáló forrásanyag, azaz a Bolyai-féle *Észrevételek* előtérbe állítását és feltárását fogja szolgálni. Az értekezésben feltárt vagy jelzett forráskezelési problémák fényében megkerülhetetlennek látszik az elsődleges forrásokhoz való visszatérés, a források külső és belső kronológiáján alapuló differenciált forráskezelés, továbbá az eddig kialakított forrásértelmezések felülvizsgálata. Ilyen elsődleges, standard

[85] Az általam képviselt tézisekre vonatkoztatva e vizsgálatot elvégeztem (Tanács 2005). Az értekezés alapját adó korábbit eredmények fényében (Tanács 2000 és 2001a) a Thomas Kuhn által leírt fordítóvá válás jelenségét lehetett prognosztizálni. Az *Észrevételek* első látásra inkoherensnek mutatkozik. Az előbb említett tanulmány kísérletet tesz arra, hogy az inkoherenciát a fogalmi különbségre és a fordítási szituációban ebből adódó sajátosságokra alapozva magyarázza, azaz a Thomas Kuhn-féle értelemben vett fordítóvá válás jelenségét demonstrálja (Kuhn 2000: 202-8). Ez azért újdonságértékű, mert amennyiben a „régi és új paradigma" terminusaiban fogalmazzuk meg a dolgot, akkor a Kuhn által leírt jelenséghez képest fontos különbség mutatkozik. Nevezetesen: Bolyai és Lobacsevszkij esetében nem a régi és az új paradigmában tevékenykedők között létrejövő kommunikációs jelenségekről, és nem a paradigmák között ily módon létrejövő fordítóvá válásról van szó, hanem a paradigmaalkotók, azaz az új paradigmát és nyelvét létrehozó felfedezők között létrejövő fordítóvá válásról. Ezen túl azonban szükségesnek tartom a Standard Nézetre vonatkozó vizsgálat elvégzését is, valamint egy olyan parallel futó elemzést, amely az egyes történetírási felfogások működésmódját egyszerre, egymás mellé állítva jeleníti meg.

értelmezését tekintve felülvizsgálatra szoruló és kiaknázatlan információforrás az *Észrevételek* is. Az pedig, hogy a Bolyai-geometria fogalmi-terminológiai rendszerének kialakulásáról festett kép túlságosan statikus, és ezért a kialakítás folyamatának újragondolása szükséges, nem csupán az értekezés eredményeiből, hanem akár a Standard Nézet mellett szóló forrásokból is következik. Az *Észrevételek* jelentősége az újragondolásban kettős: egyfelől a korai időszakra vonatkozó, visszautaló megjegyzések révén, másfelől a késői időszakra jellemző kifejezéshasználat rögzítése átlal juthat szerephez.

Forrás- és irodalomjegyzék

Kéziratos források

Eredetiben tanulmányozott kéziratos vagy kézírásos bejegyzést tartalmazó nyomtatott források

Budapest, *Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára, Bolyai-gyűjtemény*

K 24/1
Bolyai János: *Raumlehre.* H. é. n. Német. Autográf.

K 24/2
Bolyai János magyarázó ábrái a *Raumlehre* szövegéhez. H. é. n. Autográf.

K 24/3
Bolyai János: *Scientia spatii, a veritate aut falsitate (a priori haud unquam determinanda) Axiomatis Euclidei XI. independens: atque pro casu falsitatis Quadratura circuli geometrica.* Nyomtatvány a szerző saját kezű címbejegyzésével.

K 24/4
Bolyai János: Auszug aus dem Gauss'shen Briefe. (Kivonat és ehhez készített megjegyzések Karl Friedrich Gauss 1832. március 6-án kelt Bolyai Farkasnak szóló, az *Appendix*ről írt leveléhez. Bolyai János mellékletként csatolta a János főherceghez írott folyamodványhoz. H. é. n. Német. Autográf.

K 24/133
Bolyai János: Fussnoten zum Briefe des Hofrates Gauss vom 6. Marz. 1832. É. n. Német. Bolyai János Gauss levélehez kapcsolódó megjegyzéseinek átírása. Az eredeti megjegyzések Gauss levelének ama másolatán vannak, amelyet Bolyai János a János főherceghez 1832. aug. 8-án intézett folyamodványához mellékelt. Ismeretlen kézírásos másolat.

K 30/25
Szász Károly geometriai jegyzetei. Valószínűleg kollégiumi előadásának szövege. É. n. Töredék. Részben autográf, részben két másik idegen kézírás.

K 30/26
Szász Károly jegyzetei iskolai az iskola függvénytannal kapcsolatban. Kolozsvár, 1846. Autográf.

K 30/35
Szász Károly: *Ür-tan elemei*. (Valószínűleg kollégiumi előadás szövege.) Marosvásárhely, 1852. Töredék. Autográf.

542.012
Bolyai Farkas: *Tentamen.*

1. kötet: Marosvásárhely, 1832. A példányt 1833. nyarán küldte meg a Magyar Tudós Táraságnak. Az előzéklapon Bolyai Farkas autográf bejegyzése.
2. kötet: Marosvásárhely, 1833. Az előzéklapon Bolyai Farkas autográf bejegyzése.

545.091
Bolyai János: *Appendix.* Marosvásárhely, 1832. A kötet előzéklapján a szerzőre, a címre és a kiadásra vonatkozó adatok Bolyai János autográf írása. A vele szemben lévő borítólap belső oldalán ugyancsak Bolyai János autográf német nyelvű megjegyzése látható. A belső címoldal a Bolyai Farkas kezétől származik, valószínűleg a címlap első tervezete lehetett. Ez a példány eredetileg Bolyai János tulajdona volt, amelyet a példány ceruzabejegyzései bizonyítanak.

Mikrofilmen tanulmányozott kéziratos források

Budapest, *Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára, Mikrofilmtár*
B 1120-as jelzetű mikrofilm

Nyomtatott források

Budapest, *BME-OMIKK*
5488-as raktári jelzet:
Bolyai Farkas. 1830. *Az arithmetica eleje. (az elő-szóban írt módón) B.B.F. Mathesist és Physicát tanító P. által*. M.Vásárhelyt. 1830. Nyomtattatott a' Reform. Kollégyom betűivel Felső Visti Kali Jó'sef által. Marosvásárhely.

2513/1, 2513/2-es raktári jelzetek
Bolyai Farkas. 1832-33. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitivo evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario. Tomus I. II.* Marosvásárhelyini: Typis Collegii Ref. per Josephum et Simeonem de Felső Vist. Tomus I. 1832. 4. lev. LVIII, 502 o.
Hozzákötve:
Bolyai Johannes: *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.* 36 o., Egy kis toldalék és jelentés a deák első kötethez. XVI. Tomus II. 1833. 3. lev. 383 o., 10 tábla

6474-es raktári jelzet

Bolyai Farkas. 1843. *A Marosvásárhelyt 1829-be kinyomtatott Arithmetica elejének részint bővitett, általán jobbitott, 's tisztáltabb kiadása a szerző által.* Marosásárhelyt, nyomúlt az ev. ref. kollégyom beűivel Felső-Visti Kali Simon által.

Budapest, *Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Könyvtára*,

D 1003-as jelzet, bejegyzéssel: „A Szerző Ur ajándékából Herzteg Jánosé. 1830. május 3kán."

Bolyai Farkas. 1830. *Az arithmetica eleje. (az elő-szóban írt módón) B.B.F. Mathesist és Physicát tanító P. által*. M.Vásárhelyt. 1830. Nyomtattatott a' Reform. Kollégyom betűivel Felső Visti Kali Jó'sef által. Marosvásárhely.

Szeged, *Somogyi Károly Városi és Megyei Könyvtár, Kézirattár*

E.a. 313-as jelzet. A Marosvásárhelyi Református Főtanoda Könyvtárának pecsétjével.

Bolyai Farkas: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitivo evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario. Tomus I. II.* Marosvásárhelyini, 1832-33. Typis Collegii Ref. per Josephum et Simeonem de Felső Vist. Tomus I. 1832. 4. lev. LVIII, 502 o.

Hozzákötve:

Bolyai Johannes: *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.* 36 o., Egy kis toldalék és jelentés a deák első kötethez. XVI. Tomus II. 1833. 3. lev. 383 o., 10 tábla

E.a. 610-es jelzet. Kötés és borító nélkül.

Bolyai Farkas: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitivo evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario. Tomus I. II.* Marosvásárhelyini, 1832-33. Typis Collegii Ref. per Josephum et Simeonem de Felső Vist. Tomus I. 1832. 4. lev. LVIII, 502 o.

Nyomtatott források facsimiléi

Biás István. (szerk.) 1907.

Bolyai János. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euklidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Facsimile editio prima.* Marosvásárhelyini, 1907. Typis Á. Adi de Szilágyfőkeresztúr.

Kárteszi Ferenc. (szerk) 1973.

Bolyai, Johannes. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euklidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* In Kárteszi (1973) 39-67.

Kárteszi Ferenc és Szénássy Barna (szerk.) 1987.

Bolyai, Johannes. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euklidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* In Kárteszi és Szénássy (1987) 41-69.

Gray, Jeremy. (szerk.) 2004.

Bolyai, János. *Appendix: scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euklidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* In Gray (2004) 141-175.

Kincses János, Kurusa Árpád és Varga Antal (szerk.) 2002.

Bolyai, Johannes. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euklidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* In Kincses és társai (2002) 1-29.

Reichardt, Hans (szerk.) 1985.

Lobatschewsky, Nicolaus. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* von Nicolaus Lobatschewsky, Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. Der Mathematik bei der Universitat Kasan, Berlin, 1840. In der G. Fincke'schen Buchhandlung. In Reichardt (1985) 156-221.

Nyomtatott források utánközlései

König Gyula és társai (szerk.) 1897-1904.

Bolyai, Wolfgang de Bolya. 1897-1904. *Tentamen. Juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitivo evidentiaque huic propria, introducendi. Editio II.* Tomus I. Conspectus arithmeticae generalis. Ed. Julius König et Mauritius Réthy, 1897. Tomus II. Elementa geometriae et appendices. Ed. Iosephus Kürschák, Mauritius Réthy et Béla Tőtössy de Zepethnek, 1904. (A 2. kötet 359. lapjától Bolyai János *Appendix*ének utánközlése is.) Budapestini: Sumptibus Acad. Scient. Hung. Typ. Soc. Frankliniae.

Kürschák József és társai (szerk.) 1902, 1903.

Bolyai Ioannes de Bolya. 1902, 1903. *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio Nova oblata Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum.* Ediderunt Iosephus Kürschák, Mauritius Réthy, Béla Tőtössy de Zepethnek, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. (Ed. nova.) Budapestini: Sumptibus Acad. Scient. Hung. 40 o., 7 tábl.

Reichardt, Hans (szerk.) 1985.

Bolyai, Johann 1832 (1985). *Raumlehre, unabhängig von der (a priori nie entscheiden werdenden) Wahr oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms: für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.* In Reichardt (1985) 121-157.

Suták József (szerk.) 1897.

J. Bolyai: Scientia spatii absolute vera. In Suták (1897) 1-34.

Stackel, Paul (szerk.) 1913.

Bolyai, Johann 1832 (1913). *Raumlehre, unabhängig von der (a priori nie entscheiden werdenden) Wahr oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms: für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.* In Stackel (1913/2) 183-219.

Az *Appendix*, illetve a *Raumlehre* poszthumusz fordításai

Bognár János ford. 1987.
János Bolyai. *Appendix, The Absolutely True Science of Space, Expounded Independently of the Correctness or Falseness (A Priori Undecidable For Ever) of Euclid's Axiom XI: for the Case of Falseness, With a Geometric Quadrature of the Circle.* In Kárteszi és Szénássy (1987): 71-120.

Hoüel, Jules ford. 1868.
Bolyai, Jean. *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir* a priori*); suivie la quadratur géométrique du cercle, dans le cas de la faussete de l'axôme XI.* (Bevezetés Fr. Schmidt) Paris: Gauthier-Villars.

Halsted, George Bruce ford. 1896.
John Bolyai: The Science Absolute of Space. Independent of the Truth or Falsity of Euclid's Axiom XI (which can never be decided a priori*).* 4. ed., Austin (Texas, USA): The Neomon. Reprinted in Gray (2004) 187-236.

Halsted, George Bruce ford. 1897 (2002).
The Science of Absolute Space by John Bolyai. In Kincses és tsai (2002) 71-109.

Halsted, George Bruce ford. 1955.
The Science of Absolute Space by John Bolyai. New York: Dover Publ. Inc. In Bonola (1955) 301-371.

Kárteszi Ferenc ford. 1973.
Bolyai János: Appendix. A tér abszolút igaz tudománya a XI. Euklidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes vagy téves voltától független tárgyalásban: annak téves volta esetére, a kör geometriai négyszögesítésével. In Kárteszi (1973) 69-118.

Rados Ignácz ford. 1897.
Bolyai Bolyai János: A térnek absolut igaz tudománya, a mely független Euklides (a priori soha be nem bizonyítható) XI. axiómájától. In Kincses és tsai (2002) 31-70.

Rados Ignácz ford. 1914.
Bolyai János: Appendix. A Tér Tudománya függetlenül a hírhedt XI. Euklides-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától: annak nem igaz volta esetére a kör geometriai quadraturájával. In Stackel (1914/2.) 195-235.

Suták József ford. 1897.
Bolyai Bolyai János: A tér absolut igaz tudománya a XI. Euklides-féle axioma helyes, vagy téves voltától (melyet a priori nem dönthetünk el) függetlenül tárgyalva. A XI. axioma téves voltának elfogadásához hozzácsatolván a kör geometriai négyszögesítését. Budapest: Hornyánszky Viktor Könyvnyomdája. In Suták és Schmidt (1897) 35-72.

Stackel, Paul ford. 1913.

Bolyai, Johann 1832 (1913). *Raumlehre, unabhängig von der (a priori nie entscheiden werdenden) Wahr oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms: für den*

Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises. (A 34-43. paragrafusok a latin *Appendix* Stackel-féle átültése németre.) In Stackel (1913/2) 183-219.

Tóth Imre ford. 1953.
Bolyai János: Appendix. Függelék, amely a tér abszolút igaz tudományát tartalmazza: függetlenül Euklides XI. axiómájának (a priori soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától: csatolván a tévesség esetére a kör mértani négszögesítését. In Fodor (1953) 63-95.

Weszely Tibor ford. 1981.
Bolyai János: Appendix. A tér abszolút igaz tudománya a XI. Eukleidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától független tárgyalásban: bemutatva ennek nem igaz volta esetén a kör geometriai négyszögesítését. In Weszely (1981) 135-235.

Irodalomjegyzék

Abafáy Gusztáv. 1960. „Bolyai János nézetei a nyelvről és gondolkodásról, az esztétikáról és művészetről.” *Nyelv- és Irodalomtudományi Közlemények:* 15-35.

Bedőházi János. 1897. *A két Bolyai. Élet- és jellemrajz.* Marosvásárhely: Marosvásárhelyi Ev. Ref. Kollegium Elöljárósága.

Benkő Samu. 1960. „Nyelv és matematika. Ismeretlen fejezet Bolyai János életművéből.” *Korunk*: 1314-1324.

———. 1968. *Bolyai János vallomásai*. Bukarest: Irodalmi Könyvkiadó.

———. (szerk.) 1975. *Bolyai-levelek.* (A német nyelvű leveleket fordította B. Fejér Gizella.) Bukarest: Kriterion Kiadó.

———. 1978. *Apa és fiú. Bolyai-tanulmányok*. Budapest: Magvető Könyvkiadó.

Bonola, Roberto. 1955. *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments.* (Transl. Carslaw H. S.) New York: Dover Publ. Inc.

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics.* New York: John Wiley & Sons.

Busard, H. L. L. 1987. *The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements: Made Directly from the Greek.* Stuttgart: Franz Steiner Verlag Wiesbaden GmbH.

Crowe, Michael. 1975 (1992). „Ten 'laws' concerning patterns od change in the history of mathematics.” In Gillies (1992) 15-20.

Dávid Lajos. 1944 (1991). *Bolyai-geometria az Appendix alapján.* Kolozsvár: Minerva. (Újra kiadta: BJKMF: Budapest.)

———. 1979. *A két Bolyai élete és munkássága.* (Második, bővített kiadás.) Budapest: Gondolat.

Dobó Andor és Szénássy Barna. 1985. „A Bolyai-féle paralelák létezéséről.” In Staar (1985): 44-54.

Dobó Andor. 1989. *Euklidész hatása a tudomány fejlődésére*. Budapest: Tankönyvkiadó.

Euklidész. 1983. *Elemek.* (Fordította: Mayer Gyula.) Budapest: Gondolat.

Eves, Howard. 1997. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* (3. ed.) Mineola (New York): Dover Publ. Inc.

Fauvel, John és Gray, Jeremy. 1987. *The History of Mathematics: A Reader.,* London/ Milton Keynes: Macmillan Press Ltd./The Open University.

Fehér Márta. 1983. *A tudományfejlődés kérdőjelei. A tudományos elméletek inkommenzurábilitásának problémája.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Finály Henrik. 1991. *A latin nyelv szótára.* Budapest: Editio Musica.

Fodor Ernő (szerk.) 1953. *Bolyai János élete és műve.* Bukarest: Állami Tudományos Könyvkiadó.

Frankland, Barrett W. 1910. *Theories of Parallelism. An historical Critique.* Cambridge: Cambridge University Press.

Fráter Jánosné. 1968. *A Bolyai-gyűjtemény (K 22-K 30.)* Budapest: A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára Kézirattárának Katalógusai.

Gillies, Donald (szerk.). 1992. *Revolutions in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Gray, Jeremy és Tilling, Laura. 1978. Johann Heinrich Lambert, Mathematician and Scientist, 1727-1777. *Historia Mathematica* 5 (1): 13-41.

Gray, Jeremy. 1979a. Non-Euclidean Geometry – A Re-Interpretation. *Historia Mathematica* 6 (3): 236-258.

———. 1979b. *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic.*, Oxford: Clarendon Press.

———. 2004. *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space.* Cambridge (Massachusetts): Burndy Library.

Greenberg, Marvin Jay. 1980. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History.*, San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Grice, H,. P. és Strawson, P. F. 1956. (1971). „In Defense of a Dogma." In Stanley Munsat (szerk.), *The Analytic-Synthetic Distinction*. 111-127. Belmont (California): Wadsworth Publishing Company Inc.

Heath, Thomas L. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. (2. ed. 3 vols.) New York: Dover Publ. Inc.

Heidegger, Martin. 1994. „Mi a metafizika?" In uő. *„…költőien lakozik az ember…"* 13-33. Budapest: T-Twins/Szeged: Pompeji.

Hempel, Carl G. 1952 (1993.) „Principles of Definition." In James H. Fetzer, (szerk.) *Foundations of Philosophy of Science: Recent Developments*. 7-16. *Paragon Issues in Philosophy.* New York: Paragon House.

Henkin, L., Suppes P. és Tarski A. (szerk.), *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics.* L. E. J. Brouwer, E. W. Beth és A. Heyting (szerk.), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North-Holland Publising Company.

Houzel, Christian. 1992. „The Birth of Non-Euclidean Geometry." In L. Boi, D. Flament és J.-M. Salankis. (szerk.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics,* 3-21. Berlin: Springer-Verlag.

Hronszky Imre. 1996. „Új utak a technikatörténet-írásban." *Tanulmányok a természettudományok, a technika és az orvoslás történetéből.* MTESZ–Országos Műszaki Múzeum. 205-214.

Kagan, V. F. *1953.* „A nem-euklidesi geometria felépítése Lobacsevszkijnél, Gaussnál és Bolyainál." (Fordította Cseke Vilmos.) In Fodor (1953) 97-169.

Kálmán Attila. 1989. *Nemeuklideszi geometriák elemei. A Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria és a Riemann-féle (egyszeres és kétszeres) elliptikus geometria vázlatos ismertetése.* Budapest: Tankönyvkiadó.

———. 2003. „Bevezetés Bolyai János új, más világába." *Természet Világa* (I. Különszám, Bolyai-emlékszám) 134: 38-43.

Kárteszi Ferenc 1973. *Bolyai János. Appendix. A tér tudománya.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Kárteszi Ferenc és Szénássy Barna. 1987. *János Bolyai. Appendix: The Theory of Space.* (Transl. Bognár János.) Budapest: Akadémiai Kiadó/North-Holland: Amsterdam.

Keresztesi Mária. 1935. *A magyar matematikai műnyelv története*. *Közlemények a Debreceni Tudományegyetem Matematikai Szemináriumából*. Debrecen: Harmathy Nyomdavállalat.

Kincses János, Kurusa Árpád és Varga Antal (szerk.) 2002. *Appendix. Scientia spatii absolute vera.* Szeged: Polygon.

Kiss Elemér. 1999. *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából*. Budapest: Akadémiai Kiadó – Typotex Kiadó.

Kline, Morris. 1980. *Mathematics. The Loss of Certainty.* New York: Oxford University Press.

Kuhn, Thomas. 2000. *A tudományos forradalmak szerkezete.* (Fordította Bíró Dániel.) Budapest: Osiris Kiadó.

Kulczycki, Stefan. 1961. *Non-Euclidean Geometry.* International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. I. N. Sneddon, S. Ulam és M. Stark (szerk.), Vol. 16. (Translated form Polish by Stanislaw Knapowski.) Oxford: Pergamon Press/ Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe.

Lobacsevszkij, N. I. 1951. *Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből. V. F. Kagan bevezetésével, magyarázataival, függelékével.* (Fordította Bizám György, sajtó alá rendezte Kárteszi Ferenc.) Budapest: Akadémiai Kiadó.

Martin, George E. 1975. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.* New York: Springer-Verlag.

Margitay Tihamér. 2004. *Az érvelés mestersége. Érvelések elemzése, értékelése és kritikája.* Budapest: Typotex Kiadó.

Prékopa, András. 2003. „Bolyai János forradalma." *Természet Világa* (I. Különszám, Bolyai-emlékszám) 134: 3-21.

Quine, Willard van Orman. 1961 (1999). „Az empirizmus két dogmája." In Forrai Gábor és Szegedi Péter, (szerk.) *Tudományfilozófia,* 131-151. Budapest: Áron Kiadó.

———. 1961. „The Problem of Meaning in Linguistics.” In uő. *From a Logical Point of View. 9 Logico-Philosophical Essays*, 47-64. (2. rev. ed.) Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press.

Reichardt, Hans. 1985. *Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie. Mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein. Teubner Archiv zur Mathematik, Band 4.* Liepzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Royden. H. L. 1959. „Remarks on Primitive Notions for Elementary Euclidean and Non-Euclidean Geometry.” In Henkin és társai (1959) 86-96.

Rosenfeld, Boris Abramovich. 1988. *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences . 12.)* (Transl. by Abe Shenitzer, with ed. assistance of Hardy Grant.) New York: Springer-Verlag.

Ruzsiczky Éva. 1985. „A fölcserélhetőség szempontja a szinonímia értelmezésében.” *Általános Nyelvészeti Tanulmányok* (XVI.): 209-228.

Sain Márton. 1985. „Egy új világ teremtése.” In Staar (1985): 21-34.

———. 1986. *Nincs királyi út! Matematikatörténet.* Budapest: Gondolat.

Salló Ervin. 1974. „A geometria két évezrede. Tudománytörténeti vázlat Euklidész előzményeitől Bolyai János utánig.” In Neumann Mária, Salló Ervin és Toró Tibor, *A semmiből egy új világot teremtettem,* Temesvár: Facla Könyvkiadó.

Schmidt Ferenc és Stackel Pál (szerk.) 1899. *Bolyai Farkas és Gauss Frigyes Károly levelezése. A Magyar Tud. Akad. megbízásából szerkesztették, jegyzetekkel és életrajzzal ellátták Schmidt Ferenc és Stackel Pál.* Budapest: Magyar Tudományos Akadémia.

Simonyi Károly. 2001. *A magyarországi fizika kultúrtörténete (XIX. század). A Természet Világa 2001. évi I. különszáma*.

Sommerville, D. M. Y. 1958. *The Elements of Non-Euclidean Geometry.* New York: Dover Publ. Inc.

Staar Gyula (szerk.) 1985. *Bolyai-emlékfüzet (Bolyai János halálának 125. Évfordulóján. A KILÁTÓ különszáma)* Budapest: a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat Budapesti Szervezete.

Stackel, Paul (és Engel, Friedrich). 1895. *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, herausgegeben in Gemeinschaft mit F. Engel.* Liepzig.

Stackel Pál. 1900. „A nem euklidikus geometria története Bolyai János hátrahagyott irataiban.” *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* (XVIII): 241-256.

———. 1913. *Wolfgang und Johann Bolyai geometrische Untersuchungen, mit Unterstützung de Ungarischen Akademie der Wissenschaften.* 2 vols. Urkunden zur geschichte der nichteuklidischen Geometrie 2. Liepzig; Berlin: B. G. Teubner,

1913. Volume 1: Leben und Schriften der beiden Bolyai. Volume 2: Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Liepzig/Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner.

———. 1914. *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai.* 2 kötet. 1. kötet: A két Bolyai élete és művei. 2. kötet: Szemelvények a két Bolyai műveiből. (Fordította Rados Ignácz.) Budapest: Magyar Tudományos Akadémia.

Stillwell, John. 1989. *Mathematics and Its History.* New York: Springer Verlag.

Szénássy Barna. 1992. *History of Mathematics in Hungary until the 20th Century.* (Transl. Judit Pokoly.) Budapest: Akadémiai Kiadó.

Suták József. 1897. *J. Bolyai Scientia spatii absolute vera. Bolyai Bolyai János: A tér baszolút igaz tudománya. Előszóval, magyar fordítással s magyarázatokkal Suták Józseftől, Bolyai J. életrajzával Schmidt F.-től.* Budapest: Schmidt Ferencz építész – Kilián Frigyes Magy. Kir. Egyetemi Könyvárus Bizománya.

Tanács János. 1999. „From analyticity to cognitive synonymy on Quine's path." *Periodica Polytechnica Ser. Social and Management Sciences* 7 (1): 79-88.

———. 2000. „A szemantikai összemérhetetlenségtől a fordítóvá válásig." *Világosság* (11-12): 21-31.

———. 2001a. „Rejtőzködő párhuzamosság." *Magyar Filozófiai Szemle* 45 (4): 473-489.

———. 2001b. „A párhuzamosság értelmezésének hiánya Bolyai János APPENDIXében.", in: *Matematikatörténet és matematikatanítás, Konferencia CD.* (A *Matematikatörténet és matematikatanítás* címmel 2000. április 17-18-án rendezett konferencia előadásainak anyagát tartalmazó CD.)

———. 2002a. „A konvencionális definíció – híd a Quine-folyó felett?" In Perecz László, (szerk.) *Mű*helytanulmányok, BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar, 115-122. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

———. 2002b. „Egyedül nem megy?! Az euklideszi ötödik posztulátum direkt bizonyításainak rehabilitációja – egy kollektív episztemológia szemszögéből." In Forrai Gábor és Margitay Tihamér, (szerk.) *Tudomány és történe*t, 333-383. Budapest: Typotex Kiadó.

———. 2002c. „A világot kitöltő háromszög." *BUKSZ* 14 (4): 342-354.

———. 2003. „A forráskezelés, a fordítás és az értelmezés problémái a matematikatörténet-írásában Bolyai János APPENDIXével kapcsolatban." *Studia Miskolcinensia* (megjelenés alatt.)

———. 2004a. „A 'párhuzamosok problémájának' és a kanti eszmék magyarországi recepciójának sajátosságai a 18. század végén. In Palló Gábor, (szerk.) *A honi Kopernikusz-recepciótól a magyar Nobel-díjakig,* 93-133. Budapest: Áron Kiadó.

———. 2004b. „a’ semmi gondolatja: tisztes Őse a’ világnak, melyböl a minden lett…”. Fordulópontok és eltolódások: a ’párhuzamosok problémája’ a 18. században.” In Fehér Márta, Láng Benedek és Zemplén Gábor, (szerk.) *Tudás az időben. Tudománytörténeti és Tudományfilozófiai Évköny*, 1 (1): 109-129.

———. 2005. „Fogalomelterelés. A Bolyai János-féle *Észrevételek* mint a nem-euklideszi geometria Bolyai- és Lobacsevszkij-féle fogalmi rendszereinek összetalálkozását dokumentáló forrás.” In Pléh Csaba és Gervain Judit, (szerk.) *Láthatatlan nyelv.* (Megjelenés alatt.)

Tarski, Alfred. 1959. „What is Elementary Geometry?” In Henkin és társai (1959): 16-29.

Tolcsvay Nagy Gábor. 2004. *Alkotás és befogadás a magyar nyelv 18. század utáni történetében.* Palló Gábor (szerk.), Recepció és kreativitás — Nyitott magyar kultúra. Budapest: Áron Kiadó.

Torretti, Roberto. 1978. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Tóth Imre. 1953. „A Bolyai-geometria filozófiai vonatkozásai.” In Fodor (1953) 257-340.

———. 1965. „A nem-euklidészi geometria előtörténetéből.” *Matematikai Lapok* 20 (3-4): 300-315.

———. 1967. „Egy Saccheri-féle kontra-euklieszi rendszer nyomai Aristoteles műveiben (A párhuzamosok Euklides-féle posztulátumának történelmi előzményei).” *MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának (III. Osztály) közleményei* 17 (1): 1-50.

———. 1979 „An Absolute Geometric Model of the Hyperbolic Plane and some Related Mathematical Consequences.” *Proceedings of the 6th Internat. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Hannover, Sect. 3. 167-171.

———. 1998. „De interpretatione. Nem euklideszi geometria: két évezred kommentárja Euklidészhez.” (Ford. Halasi Zoltán.) I. rész: *Holmi* 10 (9): 1240- 1257. II. rész: *Holmi* 10 (10): 1378- 1396.

———. 2000a. „Mikor és ki alkotta meg a nem-euklideszi geometriát? Megjegyzések Hans Reichardt: Gauss és a nem-euklideszi geometria című könyvéhez.” (Ford. Czirják József.) In uő. (2000e): 7-38.

———. 2000b. „Geometria more ethico. Az euklideszi és a nem-euklideszi geometria alternatívája Arisztotelésznél, és az euklideszi geometria axiomatizálása.” (Ford. Flaskó János.) In uő. (2000e): 39-135.

———. 2000c. „Isten és geometria. Egy geometriai-politikai polémia a viktoriánus Angliában.” (Ford. Flaskó János és Munkácsy Gyula.) In uő. (2000e): 137-272.

———. 2000d. *„Matematikai gondolkodás: szabadság és igazság, tagadás és alkotás.” (Ford. Kaposi Márton.) In uő. (2000e: 273-412.*

———. 2000e. *Isten és geometria.* Budapest: Osiris Kiadó.

———. 2002. *Bécstől Temesvárig: Bolyai János útja a nemeuklideszi forradalom felé. Surányi László Tóth Imréről.* (Ford. Erdélyi Ágnes.) Budapest: Typotex Kiadó.

Trudeau, Richard J. 1987. *The Non-Euclidean Revolution. With an Introduction by H. S. M. Coxeter.* Boston: Birkhäuser.

Vekerdi László. 1962 (1994). „A tudománytörténetírás történetéről." In (uő.*) Tudás és tudomány,* 5-44. Budapest: Typotex Kiadó.

Weszely Tibor. 1981. *Bolyai János matematikai munkássága.* Bukarest: Kriterion Könyvkiadó.

———. 2002: *Bolyai János*. *Az első 200 év*. Budapest: Vince Kiadó.

Zheng, Yuxin. 1992. „Non-Euclidean Geometry and Revolutions in Mathematics." In Gillies (1992) 169-182.

Függelék