

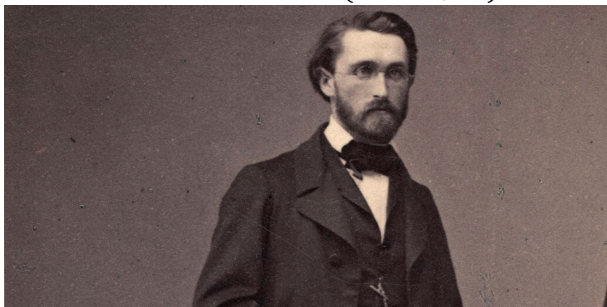
Dedekind számai

Máté András

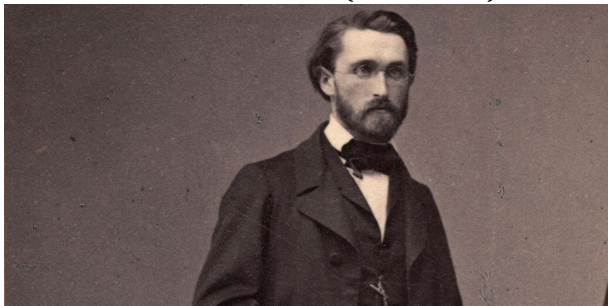
2025.10.08.

Richard Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916)

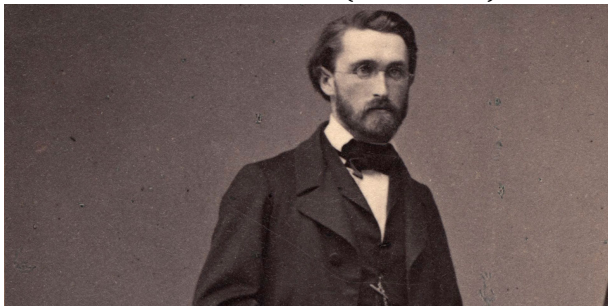


Richard Dedekind (1831-1916)



A matematikai strukturalizmus nagyapja

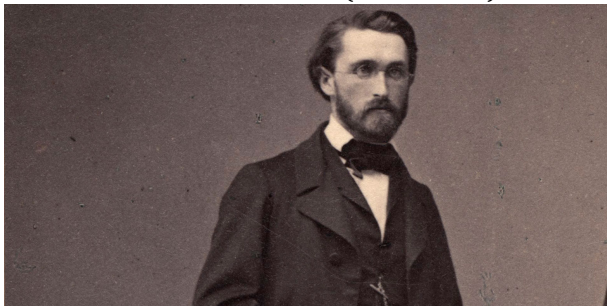
Richard Dedekind (1831-1916)



A matematikai strukturalizmus nagyapja

Strukturalizmus:

Richard Dedekind (1831-1916)

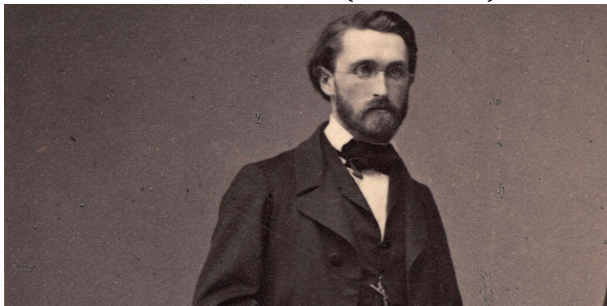


A matematikai strukturalizmus nagyapja

Strukturalizmus:

- 1 Bourbaki-kör az 1930-as évektől

Richard Dedekind (1831-1916)

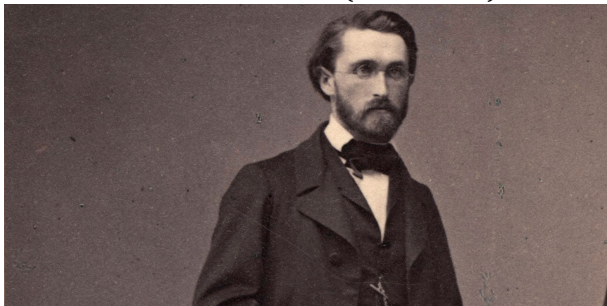


A matematikai strukturalizmus nagyapja

Strukturalizmus:

- 1 Bourbaki-kör az 1930-as évektől
- 2 Paul Benacerraf: „Amik a számok nem lehetnek” (1965)

Richard Dedekind (1831-1916)



A matematikai strukturalizmus nagyapja

Strukturalizmus:

- 1 Bourbaki-kör az 1930-as évektől
- 2 Paul Benacerraf: „Amik a számok nem lehetnek” (1965)
- 3 William Lawvere kategórialméleti munkássága (a hatvanas évektől)

1872: *Kontinuität und irrationale Zahlen* (A folytonosság és az irracionális számok)

1872: *Kontinuität und irrationale Zahlen* (A folytonosság és az irracionális számok)

Dedekind-szelet: Osszuk a racionális számokat két osztályba úgy, hogy az első (alsó)osztály minden eleme kisebb legyen, mint a második (felső) osztály bármely eleme. Az ilyen osztályozást mondjuk szeletnek.

1872: *Kontinuität und irrationale Zahlen* (A folytonosság és az irracionális számok)

Dedekind-szelet: Osszuk a racionális számokat két osztályba úgy, hogy az első (alsó)osztály minden eleme kisebb legyen, mint a második (felső) osztály bármely eleme. Az ilyen osztályozást mondjuk szeletnek.

Háromféle szelet létezik:

- 1 A felső osztálynak van legkisebb eleme.
- 2 Az alsó osztálynak van legnagyobb eleme.
- 3 Sem 1., sem 2.

1872: *Kontinuität und irrationale Zahlen* (A folytonosság és az irracionális számok)

Dedekind-szelet: Osszuk a racionális számokat két osztályba úgy, hogy az első (alsó)osztály minden eleme kisebb legyen, mint a második (felső) osztály bármely eleme. Az ilyen osztályozást mondjuk szeletnek.

Háromféle szelet létezik:

- 1 A felső osztálynak van legkisebb eleme.
- 2 Az alsó osztálynak van legnagyobb eleme.
- 3 Sem 1., sem 2.

Irracionális számok: a 3. fajta szeletek.

1872: *Kontinuität und irrationale Zahlen* (A folytonosság és az irracionális számok)

Dedekind-szelet: Osszuk a racionális számokat két osztályba úgy, hogy az első (alsó)osztály minden eleme kisebb legyen, mint a második (felső) osztály bármely eleme. Az ilyen osztályozást mondjuk szeletnek.

Háromféle szelet létezik:

- 1 A felső osztálynak van legkisebb eleme.
- 2 Az alsó osztálynak van legnagyobb eleme.
- 3 Sem 1., sem 2.

Irracionális számok: a 3. fajta szeletek.

A racionális számok azonosíthatóak az 1. típusú szeletekkel (vagy ha jobban tetszik, a 2.-vel).

De mik a természetes számok?

A számok természete és jelentése

A számok természete és jelentése

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Mik a számok és mire valók?)

A számok természete és jelentése

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Mik a számok és mire valók?)

„A tudományban semmit nem szabad bizonyítás nélkül elfogadni, ami egyáltalán bizonyítás tárgya lehet.”

A számok természete és jelentése

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Mik a számok és mire valók?)

„A tudományban semmit nem szabad bizonyítás nélkül elfogadni, ami egyáltalán bizonyítás tárgya lehet.”

I. fejezet: Rendszer [= halmaz], részhalmaz, egyesítés, metszet.

A számok természete és jelentése

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Mik a számok és mire valók?)

„A tudományban semmit nem szabad bizonyítás nélkül elfogadni, ami egyáltalán bizonyítás tárgya lehet.”

I. fejezet: Rendszer [= halmaz], részhalmaz, egyesítés, metszet.

II.: Egy rendszeren értelmezett transzformáció [= függvény], függvények összetétele (kompozíciója).

A számok természete és jelentése

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Mik a számok és mire valók?)

„A tudományban semmit nem szabad bizonyítás nélkül elfogadni, ami egyáltalán bizonyítás tárgya lehet.”

I. fejezet: Rendszer [= halmaz], részhalmaz, egyesítés, metszet.

II.: Egy rendszeren értelmezett transzformáció [= függvény], függvények összetétele (kompozíciója).

III.: Hasonlósági transzformáció (= injektív függvény)

A számok természete és jelentése

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Mik a számok és mire valók?)

„A tudományban semmit nem szabad bizonyítás nélkül elfogadni, ami egyáltalán bizonyítás tárgya lehet.”

I. fejezet: Rendszer [= halmaz], részhalmaz, egyesítés, metszet.

II.: Egy rendszeren értelmezett transzformáció [= függvény], függvények összetétele (kompozíciója).

III.: Hasonlósági transzformáció (= injektív függvény)

[Egy φ függvény injektív hha $\varphi(x) = \varphi(y) \rightarrow x = y$]

A számok természete és jelentése

1887: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Mik a számok és mire valók?)

„A tudományban semmit nem szabad bizonyítás nélkül elfogadni, ami egyáltalán bizonyítás tárgya lehet.”

I. fejezet: Rendszer [= halmaz], részhalmaz, egyesítés, metszet.

II.: Egy rendszeren értelmezett transzformáció [= függvény], függvények összetétele (kompozíciója).

III.: Hasonlósági transzformáció (= injektív függvény)

[Egy φ függvény injektív hha $\varphi(x) = \varphi(y) \rightarrow x = y$]

$S' = \varphi(S)$ az a rendszer, amelyet S elemeinek φ -képei alkotnak. Ha φ hasonlósági transzformáció, akkor a konverze szintén hasonlósági transzformáció, és φ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés S és S' elemei között. A továbbiakban a hasonlóságok mindig kölcsönösen egyértelmű leképezések.

Hasonló rendszerek, láncok

Hasonló rendszerek, láncok

Két rendszer hasonló, hha van közöttük hasonlósági transzformáció.

Hasonló rendszerek, láncok

Két rendszer hasonló, hha van közöttük hasonlósági transzformáció.

A hasonlóság szerint az összes rendszer osztálya ekvivalenciaosztályokba osztható. Ha adott egy R rendszer, definiálni tudjuk a hozzá hasonló halmazok osztályát. R az osztálynak egy *reprezentánsa*. Az osztály bármely elemét választhatjuk reprezentánsnak.

Hasonló rendszerek, láncok

Két rendszer hasonló, hha van közöttük hasonlósági transzformáció.

A hasonlóság szerint az összes rendszer osztálya ekvivalenciaosztályokba osztható. Ha adott egy R rendszer, definiálni tudjuk a hozzá hasonló halmazok osztályát. R az osztálynak egy *reprezentánsa*. Az osztály bármely elemét választhatjuk reprezentánsnak.

Legyen S tetszőleges rendszer és φ olyan transzformáció, amelyre $\varphi(S) \subseteq S$.

Hasonló rendszerek, láncok

Két rendszer hasonló, hha van közöttük hasonlósági transzformáció.

A hasonlóság szerint az összes rendszer osztálya ekvivalenciaosztályokba osztható. Ha adott egy R rendszer, definiálni tudjuk a hozzá hasonló halmazok osztályát. R az osztálynak egy *reprezentánsa*. Az osztály bármely elemét választhatjuk reprezentánsnak.

Legyen S tetszőleges rendszer és φ olyan transzformáció, amelyre $\varphi(S) \subseteq S$.

$K \subseteq S$ (φ -)lánc, hha $\varphi(K) \subseteq K$

Hasonló rendszerek, láncok

Két rendszer hasonló, hha van közöttük hasonlósági transzformáció.

A hasonlóság szerint az összes rendszer osztálya ekvivalencia-osztályokba osztható. Ha adott egy R rendszer, definiálni tudjuk a hozzá hasonló halmazok osztályát. R az osztálynak egy *reprezentánsa*. Az osztály bármely elemét választhatjuk reprezentánsnak.

Legyen S tetszőleges rendszer és φ olyan transzformáció, amelyre $\varphi(S) \subseteq S$.

$K \subseteq S$ (φ -)lánc, hha $\varphi(K) \subseteq K$

S maga egy lánc; ha K lánc, akkor $\varphi(K)$ is lánc; láncok úniója és metszete is lánc.

Hasonló rendszerek, láncok

Két rendszer hasonló, hha van közöttük hasonlósági transzformáció.

A hasonlóság szerint az összes rendszer osztálya ekvivalenciaosztályokba osztható. Ha adott egy R rendszer, definiálni tudjuk a hozzá hasonló halmazok osztályát. R az osztálynak egy *reprezentánsa*. Az osztály bármely elemét választhatjuk reprezentánsnak.

Legyen S tetszőleges rendszer és φ olyan transzformáció, amelyre $\varphi(S) \subseteq S$.

$K \subseteq S$ (φ -)lánc, hha $\varphi(K) \subseteq K$

S maga egy lánc; ha K lánc, akkor $\varphi(K)$ is lánc; láncok úniója és metszete is lánc.

Ha $A \subseteq S$, akkor az A -t tartalmazó összes lánc metszete lánc, amely tartalmazza A -t és része S -nek. Ez A lánc, A_0 , vagy $\varphi_0(A)$.

Hasonló rendszerek, láncok

Két rendszer hasonló, hha van közöttük hasonlósági transzformáció.

A hasonlóság szerint az összes rendszer osztálya ekvivalencia-osztályokba osztható. Ha adott egy R rendszer, definiálni tudjuk a hozzá hasonló halmazok osztályát. R az osztálynak egy *reprezentánsa*. Az osztály bármely elemét választhatjuk reprezentánsnak.

Legyen S tetszőleges rendszer és φ olyan transzformáció, amelyre $\varphi(S) \subseteq S$.

$K \subseteq S$ (φ -)lánc, hha $\varphi(K) \subseteq K$

S maga egy lánc; ha K lánc, akkor $\varphi(K)$ is lánc; láncok úniója és metszete is lánc.

Ha $A \subseteq S$, akkor az A -t tartalmazó összes lánc metszete lánc, amely tartalmazza A -t és része S -nek. Ez A lánca, A_0 , vagy $\varphi_0(A)$.

A teljes indukció tétele: Legyen Σ és $A \subseteq \Sigma$ két tetszőleges rendszer.

Ha bármely $x \in A_0 \cap \Sigma$ -ra $\varphi(x) \in A_0 \cap \Sigma$,

akkor $A_0 \subseteq \Sigma$.

Egy rendszer (Dedekind-)végtelen, hha hasonló egy valódi részéhez. Véges, ha ez nem áll fenn.

Egy rendszer (Dedekind-)végtelen, hha hasonló egy valódi részéhez. Véges, ha ez nem áll fenn.

66. Tétel. Vannak végtelen rendszerek.

Bizonyítás. Gondolataim világa, azaz azoknak a dolgoknak az S összessége, amelyek gondolkodásom tárgyai lehetnek, végtelen. Mert ha s S egy elemét jelöli, akkor az az s' gondolat, hogy s a gondolkodásom tárgya lehet, maga is S egy eleme. Ha ezt az s' -t az s elem $\varphi(s)$ képének tekintjük, akkor S így meghatározott φ leképezésének megvan az a tulajdonsága, hogy az S' kép része S -nek, mégpedig valódi része, mivel S -nek vannak olyan elemei (például saját énem), amelyek különböznek minden ilyen s' gondolattól, tehát nincsenek benne S' -ben. Végül pedig nyilvánvaló, hogy amennyiben a és b S különböző elemei, akkor képeik, a' és b' is különbözőek lesznek, tehát a φ leképezés kölcsönösen egyértelmű. Tehát S végtelen, q.e.d.*

Egy rendszer (Dedekind-)végtelen, hha hasonló egy valódi részéhez. Véges, ha ez nem áll fenn.

66. Tétel. Vannak végtelen rendszerek.

Bizonyítás. Gondolataim világa, azaz azoknak a dolgoknak az S összessége, amelyek gondolkodásom tárgyai lehetnek, végtelen. Mert ha s S egy elemét jelöli, akkor az az s' gondolat, hogy s a gondolkodásom tárgya lehet, maga is S egy eleme. Ha ezt az s' -t az s elem $\varphi(s)$ képének tekintjük, akkor S így meghatározott φ leképezésének megvan az a tulajdonsága, hogy az S' kép része S -nek, mégpedig valódi része, mivel S -nek vannak olyan elemei (például saját énem), amelyek különböznek minden ilyen s' gondolattól, tehát nincsenek benne S' -ben. Végül pedig nyilvánvaló, hogy amennyiben a és b S különböző elemei, akkor képeik, a' és b' is különbözőek lesznek, tehát a φ leképezés kölcsönösen egyértelmű. Tehát S végtelen, q.e.d.*

** Hasonló megfontolást találunk Bolzano Paradoxien des Unendlichenjében, §13.*

VI. fejezet: Egyszerűen végtelen rendszerek

VI. fejezet: Egyszerűen végtelen rendszerek

N egyszerűen végtelen, hha létezik N -nek egy 1-gyel jelölt eleme és egy φ hasonlóság úgy, hogy

$$N = \varphi_0(1) \text{ és } 1 \notin \varphi(N)$$

VI. fejezet: Egyszerűen végtelen rendszerek

N egyszerűen végtelen, hha létezik N -nek egy 1-gyel jelölt eleme és egy φ hasonlóság úgy, hogy

$$N = \varphi_0(1) \text{ és } 1 \notin \varphi(N)$$

Tétel: Minden végtelen rendszer tartalmaz részként egyszerűen végtelen rendszert.

VI. fejezet: Egyszerűen végtelen rendszerek

N egyszerűen végtelen, hha létezik N -nek egy 1-gyel jelölt eleme és egy φ hasonlóság úgy, hogy

$$N = \varphi_0(1) \text{ és } 1 \notin \varphi(N)$$

Tétel: Minden végtelen rendszer tartalmaz részként egyszerűen végtelen rendszert.

Természetes számok: bármely N egyszerűen végtelen rendszer elemei, „amennyiben teljesen eltekintünk az elemek sajátos tulajdonságaitól, kizárólag a megkülönböztethetőségüket tartjuk fenn, és csak azokat a relációkat vesszük tekintetbe, amelyekbe a φ leképezés rendezi el őket”.

Néhány tétel a számokról

Néhány tétel a számokról

Minden m természetes szám generál egy m_0 láncot és $m \in m_0$.

Néhány tétel a számokról

Minden m természetes szám generál egy m_0 láncot és $m \in m_0$.

Minden, az 1-től különböző természetes szám közvetlen követője (φ -képe) egy természetes számnak.

Néhány tétel a számokról

Minden m természetes szám generál egy m_0 láncot és $m \in m_0$.

Minden, az 1-től különböző természetes szám közvetlen követője (φ -képe) egy természetes számnak.

Teljes indukció: Ha

① $A(m)$ igaz;

② bármely $n \in m_0$ -ra, ha $A(n)$, akkor $A(\varphi(n))$,

akkor $A(x)$ igaz m_0 bármely x elemére.

Néhány tétel a számokról

Minden m természetes szám generál egy m_0 láncot és $m \in m_0$.

Minden, az 1-től különböző természetes szám közvetlen követője (φ -képe) egy természetes számnak.

Teljes indukció: Ha

- 1 $A(m)$ igaz;
- 2 bármely $n \in m_0$ -ra, ha $A(n)$, akkor $A(\varphi(n))$,

akkor $A(x)$ igaz m_0 bármely x elemére.

Azaz a másodrendű Peano-aritmetika axiómái érvényesek egyszerűen végtelen rendszerekre.

Néhány tétel a számokról

Minden m természetes szám generál egy m_0 láncot és $m \in m_0$.

Minden, az 1-től különböző természetes szám közvetlen követője (φ -képe) egy természetes számnak.

Teljes indukció: Ha

- 1 $A(m)$ igaz;
- 2 bármely $n \in m_0$ -ra, ha $A(n)$, akkor $A(\varphi(n))$,

akkor $A(x)$ igaz m_0 bármely x elemére.

Azaz a másodrendű Peano-aritmetika axiómái érvényesek egyszerűen végtelen rendszerekre.

Másképp, az egyszerűen végtelen rendszerek modelljei a másodrendű Peano-aritmetikának. Fordítva is igaz: a másodrendű PA minden modellje egyszerűen végtelen rendszer.

Negációteljes aritmetika?!?

X. Az egyszerűen végtelen rendszerek osztálya

X. Az egyszerűen végtelen rendszerek osztálya

132. Tétel. Az egyszerűen végtelen rendszerek hasonlóak.

X. Az egyszerűen végtelen rendszerek osztálya

132. Tétel. Az egyszerűen végtelen rendszerek hasonlóak.

Más fogalmakkal: az egyszerűen végtelen rendszerek elmélete kategorikus, azaz bármely két modellje izomorf.

X. Az egyszerűen végtelen rendszerek osztálya

132. Tétel. Az egyszerűen végtelen rendszerek hasonlóak.

Más fogalmakkal: az egyszerűen végtelen rendszerek elmélete kategorikus, azaz bármely két modellje izomorf.

Következésképp a másodrendű PA nyelvének minden modellben ugyanazok a mondatai igazak.

X. Az egyszerűen végtelen rendszerek osztálya

132. Tétel. Az egyszerűen végtelen rendszerek hasonlóak.

Más fogalmakkal: az egyszerűen végtelen rendszerek elmélete kategorikus, azaz bármely két modellje izomorf.

Következésképp a másodrendű PA nyelvnek minden modellben ugyanazok a mondatai igazak.

Ennek a nyelvnek bármely mondata vagy igaz minden egyszerűen végtelen rendszerben, tehát *szemantikai következménye* a másodrendű Peano-axiómáknak, vagy pedig a negációjára áll ugyanez.

Negációteljes aritmetika?!?

X. Az egyszerűen végtelen rendszerek osztálya

132. Tétel. Az egyszerűen végtelen rendszerek hasonlóak.

Más fogalmakkal: az egyszerűen végtelen rendszerek elmélete kategorikus, azaz bármely két modellje izomorf.

Következésképp a másodrendű PA nyelvnek minden modellben ugyanazok a mondatai igazak.

Ennek a nyelvnek bármely mondata vagy igaz minden egyszerűen végtelen rendszerben, tehát *szemantikai következménye* a másodrendű Peano-axiómáknak, vagy pedig a negációjára áll ugyanez.

Tehát a másodrendű Peano-aritmetika (a másodrendű Peano-axiómák *szemantikai* következményeinek halmaza) negációteljes.

Metalogikai következmények

Gödel első nem-teljességi tétele: Az elsőrendű Peano-aritmetikának nincs negációteljes *axiomatikus* kiterjesztése.

Gödel első nem-teljességi tétele: Az elsőrendű Peano-aritmetikának nincs negációteljes *axiomatikus* kiterjesztése.

Egy logikai kalkulus szemantikai teljessége: bármely premisszahalmaz összes szemantikai következménye levezethető a kalkulusban. Az elsőrendű logikának van szemantikailag teljes kalkulusa (GÖDEL 1930).

Gödel első nem-teljességi tétele: Az elsőrendű Peano-aritmetikának nincs negációteljes *axiomatikus* kiterjesztése.

Egy logikai kalkulus szemantikai teljessége: bármely premisszahalmaz összes szemantikai következménye levezethető a kalkulusban. Az elsőrendű logikának van szemantikailag teljes kalkulusa (GÖDEL 1930).

A másodrendű logikához nem létezik szemantikailag teljes kalkulus. Különbözik a másodrendű Peano-axiómák összes szemantikai következményét le tudnánk vezetni, és így megkapnánk az elsőrendű Peano-aritmetika egy negációteljes axiomatikus kiterjesztését.

További megjegyzések

Egyszerűbb bizonyítása is van annak, hogy nem lehetséges szemantikailag teljes logikai kalkulus a másodrendű logikához: a másodrendű logika következményrelációja nem kompakt. Van olyan érvényes következtetés, amelyben a konklúzió nem következik a premisszák semmilyen véges részalmazából..

Egyszerűbb bizonyítása is van annak, hogy nem lehetséges szemantikailag teljes logikai kalkulus a másodrendű logikához: a másodrendű logika következményrelációja nem kompakt. Van olyan érvényes következtetés, amelyben a konklúzió nem következik a premisszák semmilyen véges részalmazából..

Mi az, hogy aritmetikai igazság? Egy egyszerűnek látszó válasz: a másodrendű Peano-aritmetika egy tétele. De az egyszerűség látszata félrevezető.