

A budget of paradoxes

A Hilbert-iskola céljai és kezdetei

Máté András

2025 október 15

A Russell-paradoxon a naív halmazelméletben

A Russell-paradoxon a naív halmazelméletben

Korlátlan komprehenzió:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow A(x))$$

bármely $A(x)$ nyitott mondatra.

A Russell-paradoxon a naív halmazelméletben

Korlátlan komprehenzió:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow A(x))$$

bármely $A(x)$ nyitott mondatra.

Következmény:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

A Russell-paradoxon a naiv halmazelméletben

Korlátlan komprehenzió:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow A(x))$$

bármely $A(x)$ nyitott mondatra.

Következmény:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

Legyen r egy ilyen y (egzisztenciális megjelenítés), és helyettesítsük r -t x helyébe is (univerzális megjelenítés).

$$r \in r \leftrightarrow r \notin r$$

A Russell-paradoxon a naiv halmazelméletben

Korlátlan komprehenzió:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow A(x))$$

bármely $A(x)$ nyitott mondatra.

Következmény:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

Legyen r egy ilyen y (egzisztenciális megjelenítés), és helyettesítsük r -t x helyébe is (univerzális megjelenítés).

$$r \in r \leftrightarrow r \notin r$$

Logikai hamisság a korlátlan komprehenzióból+logikai szabályokból.

Zavarbaejtően hasonló

Cantor tétele: Egy halmaz és a hatványhalmaza között nem létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Cantor tétele: Egy halmaz és a hatványhalmaza között nem létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Legyen H halmaz, $\mathcal{P}(H)$ a hatványhalmaza és f injektív leképezés H -ból $\mathcal{P}(H)$ -ba. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}(H)$ -nak van legalább egy eleme, amely nincs f képtartományában:

Cantor tétele: Egy halmaz és a hatványhalmaza között nem létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Legyen H halmaz, $\mathcal{P}(H)$ a hatványhalmaza és f injektív leképezés H -ból $\mathcal{P}(H)$ -ba. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}(H)$ -nak van legalább egy eleme, amely nincs f képtartományában:

$$H_0 =: \{x : x \notin f(x)\}$$

Cantor tétele: Egy halmaz és a hatványhalmaza között nem létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Legyen H halmaz, $\mathcal{P}(H)$ a hatványhalmaza és f injektív leképezés H -ból $\mathcal{P}(H)$ -ba. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}(H)$ -nak van legalább egy eleme, amely nincs f képtartományában:

$$H_0 =: \{x : x \notin f(x)\}$$

Indirekt feltevés: $H_0 = f(h)$. Akkor

$$h \in f(h) \leftrightarrow h \notin f(h)$$

A Russell-paradoxon Frege *Grundgesetze* rendszerében

A Russell-paradoxon Frege *Grundgesetze* rendszerében

Tekintsük az R : „olyan fogalom értékmenetének lenni, amely hamis a saját értékmenetére” fogalmat.

A Russell-paradoxon Frege *Grundgesetze* rendszerében

Tekintsük az R : „olyan fogalom értékmenetének lenni, amely hamis a saját értékmenetére” fogalmat.

Formálisan: $R(x) \leftrightarrow_{def} \exists G(x = \ulcorner G \wedge \neg G(x) \urcorner)$.

$\ulcorner F$ az F függvény értékmenete.

A Russell-paradoxon Frege *Grundgesetze* rendszerében

Tekintsük az R : „olyan fogalom értékmenetének lenni, amely hamis a saját értékmenetére” fogalmat.

Formálisan: $R(x) \leftrightarrow_{def} \exists G(x = \ulcorner G \wedge \neg G(x) \urcorner)$.

$\ulcorner F$ az F függvény értékmenete.

Helyettesítsük $\mathcal{R}$ -t x helyébe.

$$R(\mathcal{R}) \leftrightarrow \exists F(\mathcal{R} = \ulcorner F \wedge \neg F(\mathcal{R}) \urcorner)$$

A Russell-paradoxon Frege *Grundgesetze* rendszerében

Tekintsük az R : „olyan fogalom értékmenetének lenni, amely hamis a saját értékmenetére” fogalmat.

Formálisan: $R(x) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists G(x = \ulcorner G \wedge \neg G(x) \urcorner)$.

$\ulcorner F \urcorner$ az F függvény értékmenete.

Helyettesítsük $\ulcorner R \urcorner$ -t x helyébe.

$$R(\ulcorner R \urcorner) \leftrightarrow \exists F(\ulcorner R \urcorner = \ulcorner F \wedge \neg F(\ulcorner R \urcorner) \urcorner)$$

Az azonosság miatt az V. axiómából az következik, hogy az egzisztenciális kvantifikációt csak olyan F teheti igazzá, amely ugyanazokra a tárgyakra igaz, mint R . Tehát a bal oldal igaz, hha $\neg R(\ulcorner R \urcorner)$.

A Russell-paradoxon Frege *Grundgesetze* rendszerében

Tekintsük az R : „olyan fogalom értékmenetének lenni, amely hamis a saját értékmenetére” fogalmat.

Formálisan: $R(x) \leftrightarrow_{\text{def}} \exists G(x = \ulcorner G \wedge \neg G(x) \urcorner)$.

$\ulcorner F \urcorner$ az F függvény értékmenete.

Helyettesítsük $\ulcorner R \urcorner$ -t x helyébe.

$$R(\ulcorner R \urcorner) \leftrightarrow \exists F(\ulcorner R \urcorner = \ulcorner F \wedge \neg F(\ulcorner R \urcorner) \urcorner)$$

Az azonosság miatt az V. axiómából az következik, hogy az egzisztenciális kvantifikációt csak olyan F teheti igazzá, amely ugyanazokra a tárgyakra igaz, mint R . Tehát a bal oldal igaz, hha $\neg R(\ulcorner R \urcorner)$.

$$R(\ulcorner R \urcorner) \leftrightarrow \neg R(\ulcorner R \urcorner)$$

Paradoxonok: a központi probléma

Paradoxonok: a központi probléma

Russell-paradoxon: Russell, *Principles of Mathematics* (1903)

Paradoxonok: a központi probléma

Russell-paradoxon: Russell, *Principles of Mathematics* (1903)

Frege első megjegyzése, hogy Cantor halmazelméletében pontosan ugyanez az inkonzisztencia lép fel.

Paradoxonok: a központi probléma

Russell-paradoxon: Russell, *Principles of Mathematics* (1903)

Frege első megjegyzése, hogy Cantor halmazelméletében pontosan ugyanez az inkonzisztencia lép fel.

Egy másik halmazelméleti paradoxont (Burali-Forti) már pár évvel előbb felismer t.k. Cantor.

Paradoxonok: a központi probléma

Russell-paradoxon: Russell, *Principles of Mathematics* (1903)

Frege első megjegyzése, hogy Cantor halmazelméletében pontosan ugyanez az inkonzisztencia lép fel.

Egy másik halmazelméleti paradoxont (Burali-Forti) már pár évvel előbb felismer t.k. Cantor.

Innen a matematika filozófiájának, ill. a matematika alapjai kutatásának fő kérdése: hogyan lehet a paradoxonokat kiküszöbölni és hogyan biztosíthatjuk be magunkat hasonló jövőbeli balesetek ellen?

Paradoxonok: a központi probléma

Russell-paradoxon: Russell, *Principles of Mathematics* (1903)

Frege első megjegyzése, hogy Cantor halmazelméletében pontosan ugyanez az inkonzisztencia lép fel.

Egy másik halmazelméleti paradoxont (Burali-Forti) már pár évvel előbb felismer t.k. Cantor.

Innen a matematika filozófiájának, ill. a matematika alapjai kutatásának fő kérdése: hogyan lehet a paradoxonokat kiküszöbölni és hogyan biztosíthatjuk be magunkat hasonló jövőbeli balesetek ellen?

Lássunk egy csokorra való releváns paradoxont (vö. De Morgan (1872): *A budget of paradoxes*).

(L) Ennek a diának az első sorában lévő állítás hamis.

(L) Ennek a diának az első sorában lévő állítás hamis.

Ha az L mondat igaz, akkor úgy van, ahogy mondja, tehát az első sorban lévő állítás, azaz L hamis.

(L) Ennek a diának az első sorában lévő állítás hamis.

Ha az L mondat igaz, akkor úgy van, ahogy mondja, tehát az első sorban levő állítás, azaz L hamis.

Ha L hamis, akkor igaza van annak, aki azt állítja, hogy L hamis.
De L pontosan ezt állítja, tehát L igaz.

(L) Ennek a diának az első sorában lévő állítás hamis.

Ha az L mondat igaz, akkor úgy van, ahogy mondja, tehát az első sorban levő állítás, azaz L hamis.

Ha L hamis, akkor igaza van annak, aki azt állítja, hogy L hamis.
De L pontosan ezt állítja, tehát L igaz.

$$L \leftrightarrow \neg L$$

A Hazug variánsai:

A Hazug variánsai:

Hazug-kör:

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n-1} \leftrightarrow \neg p_1.$$

A Hazug variánsai:

Hazug-kör:

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n-1} \leftrightarrow \neg p_1.$$

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n} \leftrightarrow p_1.$$

A Hazug variánsai:

Hazug-kör:

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n-1} \leftrightarrow \neg p_1.$$

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n} \leftrightarrow p_1.$$

Szigorú Hazug:

Tegyük fel, hogy nem esik egybe a ‘hamis’ és a ‘nem igaz’, mégpedig azért nem, mert egyes mondatok se nem igazak, se nem hamisak („értékrésesek”).

A Hazug variánsai:

Hazug-kör:

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n-1} \leftrightarrow \neg p_1.$$

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n} \leftrightarrow p_1.$$

Szigorú Hazug:

Tegyük fel, hogy nem esik egybe a ‘hamis’ és a ‘nem igaz’,
mégpedig azért nem, mert egyes mondatok se nem igazak, se nem
hamisak („értékrésesek”).

$$L_S \leftrightarrow (L_S \text{ nem igaz})$$

A Hazug variánsai:

Hazug-kör:

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n-1} \leftrightarrow \neg p_1.$$

$$p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3, \dots, p_{2n} \leftrightarrow p_1.$$

Szigorú Hazug:

Tegyük fel, hogy nem esik egybe a ‘hamis’ és a ‘nem igaz’, mégpedig azért nem, mert egyes mondatok se nem igazak, se nem hamisak („értékrésesek”).

$$L_S \leftrightarrow (L_S \text{ nem igaz})$$

Igazmondó: A dia utolsó sorában levő mondat igaz.

Burali-Forti-paradoxon

Burali-Forti-paradoxon

Legyen BF az összes rendszám osztálya, jólrendezve a $<$ (azaz $\in$) relációval.

Legyen BF az összes rendszám osztálya, jólrendezve a $<$ (azaz $\in$) relációval.

Ez egy rendszám. Nagyobb, mint minden rendszám, mert minden rendszám az eleme.

Legyen BF az összes rendszám osztálya, jólrendezve a $<$ (azaz $\in$) relációval.

Ez egy rendszám. Nagyobb, mint minden rendszám, mert minden rendszám az eleme.

Kisebb, mint a követője.

Még két nevezetes paradoxon

Még két nevezetes paradoxon

Nevezzünk egy F egyargumentumú predikátumot heterologikusnak, hha $F(F)$ hamis. Pl. az „absztrakt” absztrakt, de a „piros” nem piros. Heterologikus-e a „heterologikus”?

Még két nevezetes paradoxon

Nevezzünk egy F egyargumentumú predikátumot heterologikusnak, hha $F(F)$ hamis. Pl. az „absztrakt” absztrakt, de a „piros” nem piros. Heterologikus-e a „heterologikus”?

Grelling-Nelson-, Weyl-, vagy egyszerűen heterologikus-paradoxon.

Még két nevezetes paradoxon

A legkisebb természetes szám, amely nem definiálható 84 karakternél rövidebb magyar szöveggel.

Richard-paradoxon

0 és 1 között megszámlálhatóan végtelen sok véges hosszúságú szöveggel definiálható valós szám van.

0 és 1 között megszámlálhatóan végtelen sok véges hosszúságú szöveggel definiálható valós szám van.

Soroljuk fel ezeket az a_k sorozatban. Tekintsük a következő valós számot:

$$a = 0, d_1 d_2 \dots d_n \dots,$$

ahol $d_n = 6$ ha a_n -ben a tizedesvessző utáni n -edik számjegy 5, különben $d_n = 5$.

0 és 1 között megszámlálhatóan végtelen sok véges hosszúságú szöveggel definiálható valós szám van.

Soroljuk fel ezeket az a_k sorozatban. Tekintsük a következő valós számot:

$$a = 0, d_1 d_2 \dots d_n \dots,$$

ahol $d_n = 6$ ha a_n -ben a tizedesvessző utáni n -edik számjegy 5, különben $d_n = 5$.

a különbözik a_k összes elemétől, de íme, definiálva van.

Újabb keletű paradoxonok

A tanár: Jövő héten dolgozatot írnak. Nem mondom meg, melyik nap. Meg lesznek lepve.

A tanár: Jövő héten dolgozatot írnak. Nem mondom meg, melyik nap. Meg lesznek lepve.

Szerdán megírják a dolgozatot és a diákok meg vannak lepve.

G normál kétszemélyes játék, hha véges sok lépésben véget ér (bárhogy játszanak a játékosok). H a következő hiperjáték: az első játékos választ egy normál játékot, azután ezt játsszák. H normál játék, vagy nem?

Russell hibás kör-elve

Russell hibás kör-elve

Ami magában foglalja egy összesség *egészét*, az nem lehet tagja az összességnek”, vagy fordítva: „Ha feltételeznénk, hogy egy bizonyos összességnek van egy összege, akkor az összességnek volnának olyan tagjai, amelyek csak erre az összegre hivatkozva definiálhatók, akkor az említett összességnek nincs összege”.

„A típuselméletre alapozott matematikai logika”, 1908

Ami magában foglalja egy összesség *egészét*, az nem lehet tagja az összességnek”, vagy fordítva: „Ha feltételeznénk, hogy egy bizonyos összességnek van egy összege, akkor az összességnek volnának olyan tagjai, amelyek csak erre az összegre hivatkozva definiálhatók, akkor az említett összességnek nincs összege”.

„A típuselméletre alapozott matematikai logika”, 1908

Önmagára referálás: egy mondat önmagára hivatkozik, azaz az igazságfeltételei tartalmazzanak valamilyen kikötést a saját igazságával vagy hamisságával kapcsolatban.

Ami magában foglalja egy összesség *egészét*, az nem lehet tagja az összességnek”, vagy fordítva: „Ha feltételeznénk, hogy egy bizonyos összességnek van egy összege, akkor az összességnek volnának olyan tagjai, amelyek csak erre az összegre hivatkozva definiálhatók, akkor az említett összességnek nincs összege”.

„A típuselméletre alapozott matematikai logika”, 1908

Önmagára referálás: egy mondat önmagára hivatkozik, azaz az igazságfeltételei tartalmazzanak valamilyen kikötést a saját igazságával vagy hamisságával kapcsolatban.

Vagy tartalmaz kvantifikációt olyan kijelentések felett, amelyek között szerepel a saját maga által kifejezett kijelentés is.

Ami magában foglalja egy összesség *egészét*, az nem lehet tagja az összességnek”, vagy fordítva: „Ha feltételeznénk, hogy egy bizonyos összességnek van egy összege, akkor az összességnek volnának olyan tagjai, amelyek csak erre az összegre hivatkozva definiálhatók, akkor az említett összességnek nincs összege”.

„A típuselméletre alapozott matematikai logika”, 1908

Önmagára referálás: egy mondat önmagára hivatkozik, azaz az igazságfeltételei tartalmazzanak valamilyen kikötést a saját igazságával vagy hamisságával kapcsolatban.

Vagy tartalmaz kvantifikációt olyan kijelentések felett, amelyek között szerepel a saját maga által kifejezett kijelentés is.

Russell elve kizárja az önmagára referálást. Úgy tűnik, ennyi elegendő az eddigi paradoxonok kiküszöböléséhez.

Yablo paradoxona

Tekintsük a következő. kijelentésekből álló $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ végtelen sorozatot:

$$p_n \leftrightarrow \forall k(k > n \rightarrow \neg p_k)$$

Tekintsük a következő. kijelentésekből álló $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ végtelen sorozatot:

$$p_n \leftrightarrow \forall k(k > n \rightarrow \neg p_k)$$

Stephen Yablo, 1989

Tekintsük a következő. kijelentésekből álló $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ végtelen sorozatot:

$$p_n \leftrightarrow \forall k(k > n \rightarrow \neg p_k)$$

Stephen Yablo, 1989

A Hazugra emlékeztető, de infinítárius paradoxon, amely nem sérti a hibás kör-elvet, és semmilyen önmagára referálást nem tartalmaz.

Az alapok kutatásának céljai

Az alapok kutatásának céljai

- Szilárdan megalapozott/tévedhetetlen elméletek

Az alapok kutatásának céljai

- Szilárdan megalapozott/tévedhetetlen elméletek
- Ezen belül elsősorban az inkonzisztencia elkerülése

Az alapok kutatásának céljai

- Szilárdan megalapozott/tévedhetetlen elméletek
- Ezen belül elsősorban az inkonzisztencia elkerülése
- Erős (lehetőleg mindentudó) elméletek

Az alapok kutatásának céljai

- Szilárdan megalapozott/tévedhetetlen elméletek
- Ezen belül elsősorban az inkonzisztencia elkerülése
- Erős (lehetőleg mindentudó) elméletek

Háromféle kiút a paradoxonok csapdájából:

Az alapok kutatásának céljai

- Szilárdan megalapozott/tévedhetetlen elméletek
- Ezen belül elsősorban az inkonzisztencia elkerülése
- Erős (lehetőleg mindentudó) elméletek

Háromféle kiút a paradoxonok csapdájából:

- 1 Javítsuk ki a logikát és alkossunk meg egyetlen általános és kockázatmentes elméletet (logicizmus).

Az alapok kutatásának céljai

- Szilárdan megalapozott/tévedhetetlen elméletek
- Ezen belül elsősorban az inkonzisztencia elkerülése
- Erős (lehetőleg mindentudó) elméletek

Háromféle kiút a paradoxonok csapdjából:

- 1 Javítsuk ki a logikát és alkossunk meg egyetlen általános és kockázatmentes elméletet (logicizmus).
- 2 Kockázatos elméletek, de megbízható metaelmélet (formalizmus).

Az alapok kutatásának céljai

- Szilárdan megalapozott/tévedhetetlen elméletek
- Ezen belül elsősorban az inkonzisztencia elkerülése
- Erős (lehetőleg mindentudó) elméletek

Háromféle kiút a paradoxonok csapdájából:

- 1 Javítsuk ki a logikát és alkossunk meg egyetlen általános és kockázatmentes elméletet (logicizmus).
- 2 Kockázatos elméletek, de megbízható metaelmélet (formalizmus).
- 3 Vessük el a logika elsődlegességét, helyette megbízhatóbb alap kell (intuicionizmus).

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1. kiad., 1899): Az axiómák az alapfogalmak implicit definícióját adják.

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1. kiad., 1899): Az axiómák az alapfogalmak implicit definícióját adják.

- Euklidész javított változata

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1. kiad., 1899): Az axiómák az alapfogalmak implicit definícióját adják.

- Euklidész javított változata
- Perspektívaváltás: nem a tér elmélete, hanem bármié, ami eleget tesz az axiómáknak.

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1. kiad., 1899): Az axiómák az alapfogalmak implicit definícióját adják.

- Euklidész javított változata
- Perspektívaváltás: nem a tér elmélete, hanem bármié, ami eleget tesz az axiómáknak.

Még egy programjellegű kijelentés: A matematikai létezés nem több, mint konzisztencia

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1. kiad., 1899): Az axiómák az alapfogalmak implicit definícióját adják.

- Euklidész javított változata
- Perspektívaváltás: nem a tér elmélete, hanem bármié, ami eleget tesz az axiómáknak.

Még egy programjellegű kijelentés: A matematikai létezés nem több, mint konzisztencia

Ideális eset: kategorikus elméletek

Egy elmélet kategorikus, hha bármely két modellje izomorf.

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1. kiad., 1899): Az axiómák az alapfogalmak implicit definícióját adják.

- Euklidész javított változata
- Perspektívaváltás: nem a tér elmélete, hanem bármié, ami eleget tesz az axiómáknak.

Még egy programjellegű kijelentés: A matematikai létezés nem több, mint konzisztencia

Ideális eset: kategorikus elméletek

Egy elmélet kategorikus, hha bármely két modellje izomorf.

A metamatematika a matematika új ága, amely a matematikai elméleteket matematikai objektumokként kezeli, abból a célból, hogy konzisztenciájukat, teljességüket, kategoricitásukat, stb. vizsgálja.

Hilbert megalapozási programjának indulása

Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 1. kiad., 1899): Az axiómák az alapfogalmak implicit definícióját adják.

- Euklidész javított változata
- Perspektívaváltás: nem a tér elmélete, hanem bármié, ami eleget tesz az axiómáknak.

Még egy programjellegű kijelentés: A matematikai létezés nem több, mint konzisztencia

Ideális eset: kategorikus elméletek

Egy elmélet kategorikus, hha bármely két modellje izomorf.

A metamatematika a matematika új ága, amely a matematikai elméleteket matematikai objektumokként kezeli, abból a célból, hogy konzisztenciájukat, teljességüket, kategoricitásukat, stb. vizsgálja.

A metaelméleti vizsgálat standard kiindulópontja az elsőrendű logikai formalizálás.