

Formalizmus, Hilbert-program

Máté András

2025 október 22.

Formalizmus, Hilbert-program, Hilbert-iskola

Formalizmus, Hilbert-program, Hilbert-iskola

Formalizmus: a matematikáról való filozofálás bevett irányzata még a *Grundlagenkrise* előtti időkből.

Formalizmus, Hilbert-program, Hilbert-iskola

Formalizmus: a matematikáról való filozofálás bevett irányzata még a *Grundlagenkrise* előtti időkből.

Grundlagenkrise (az alapok válsága, német): elterjedt kifejezés a halmazelmélet paradoxonai következtében előállt helyzetre.

Formalizmus, Hilbert-program, Hilbert-iskola

Formalizmus: a matematikáról való filozofálás bevett irányzata még a *Grundlagenkrise* előtti időkből.

Grundlagenkrise (az alapok válsága, német): elterjedt kifejezés a halmazelmélet paradoxonai következtében előállt helyzetre.

A formalista szerint a matematika nem valamilyen ideális objektumokról szól, hanem jelekkel való játék meghatározott szabályok szerint.

Formalizmus, Hilbert-program, Hilbert-iskola

Formalizmus: a matematikáról való filozofálás bevett irányzata még a *Grundlagenkrise* előtti időkből.

Grundlagenkrise (az alapok válsága, német): elterjedt kifejezés a halmazelmélet paradoxonai következtében előállt helyzetre.

A formalista szerint a matematika nem valamilyen ideális objektumokról szól, hanem jelekkel való játék meghatározott szabályok szerint.

Hilbert-program: a matematika megbízhatóságának bizonyítása a metamatematikában.

A metamatematika a matematikai elméleteket *úgy kezeli, mint* jelsorozatok halmazát, amit a levezetési szabályok strukturálnak, tekintet nélkül a jelentésükre.

Formalizmus, Hilbert-program, Hilbert-iskola

Formalizmus: a matematikáról való filozofálás bevett irányzata még a *Grundlagenkrise* előtti időkből.

Grundlagenkrise (az alapok válsága, német): elterjedt kifejezés a halmazelmélet paradoxonai következtében előállt helyzetre.

A formalista szerint a matematika nem valamilyen ideális objektumokról szól, hanem jelekkel való játék meghatározott szabályok szerint.

Hilbert-program: a matematika megbízhatóságának bizonyítása a metamatematikában.

A metamatematika a matematikai elméleteket *úgy kezeli, mint* jelsorozatok halmazát, amit a levezetési szabályok strukturálnak, tekintet nélkül a jelentésükre.

Hilbert iskolája: az 1920-as években Göttingenben ennek a programnak a megvalósításán dolgozó fiatal matematikusok (Wilhelm Ackermann, Paul Bernays, Neumann János, Jacques Herbrand).

Mi a formalizmus?

H.B. Curry, 1963:

Mi a formalizmus?

H.B. Curry, 1963:

„A matematikát nem a tárgya, hanem a módszere jellemzi; az objektumai vagy egyáltalán nem meghatározottak, vagy ha meg is vannak határozva, a sajátos természetük akkor is irreleváns.”

Mi a formalizmus?

H.B. Curry, 1963:

„A matematikát nem a tárgya, hanem a módszere jellemzi; az objektumai vagy egyáltalán nem meghatározottak, vagy ha meg is vannak határozva, a sajátos természetük akkor is irreleváns.”

A matematika bizonyos formális jelrendszereket vizsgál, amelyek rendszerint tartalmaznak bizonyos kijelentésnek, axiómának, tételnek stb. nevezett jelsorozatok, bizonyos levezetési szabálynak nevezett transzformációs szabályokat, de mindezeket tisztán szintaktikailag, azaz kizárólag a jelsorozatok struktúrájára hivatkozva definiáljuk.

Mi a formalizmus?

H.B. Curry, 1963:

„A matematikát nem a tárgya, hanem a módszere jellemzi; az objektumai vagy egyáltalán nem meghatározottak, vagy ha meg is vannak határozva, a sajátos természetük akkor is irreleváns.”

A matematika bizonyos formális jelrendszereket vizsgál, amelyek rendszerint tartalmaznak bizonyos kijelentésnek, axiómának, tételnek stb. nevezett jelsorozatok, bizonyos levezetési szabálynak nevezett transzformációs szabályokat, de mindezeket tisztán szintaktikailag, azaz kizárólag a jelsorozatok struktúrájára hivatkozva definiáljuk.

A kijelentéseknek lehet jelentése, kifejezhetnek igaz vagy hamis állításokat bizonyos objektumokról, de ez matematikailag irreleváns.

Hilbert és Bernays, mint nem-formalisták

Hilbert és Bernays, mint nem-formalisták

Hilbert (1919): „A matematikai fogalomalkotást mindig a szemlélet és a tapasztalat vezérli, ezért a matematika egészében véve az önkényességtől mentes zárt struktúrát alkot.”

Hilbert és Bernays, mint nem-formalisták

Hilbert (1919): „A matematikai fogalomalkotást mindig a szemlélet és a tapasztalat vezérli, ezért a matematika egészében véve az önkényességtől mentes zárt struktúrát alkot.”

Bernays (1928): „Ha módszertanilag függetlenítjük magunkat a térszemlélettől, ez nem jelenti annak figyelmen kívül hagyását, hogy a geometria a térszemléletből indul ki.”

Alapelvek, az első eredmények, célkitűzések

A geometria (relatív) konzisztenciája: visszavezetés a valós aritmetikára.

Alapelvek, az első eredmények, célkitűzések

A geometria (relatív) konzisztenciája: visszavezetés a valós aritmetikára.

A geometriai tér létezése az axiómarendszer konzisztenciáján alapul.

Alapelvek, az első eredmények, célkitűzések

A geometria (relatív) konzisztenciája: visszavezetés a valós aritmetikára.

A geometriai tér létezése az axiómarendszer konzisztenciáján alapul.

Bernays, 1928: a létezést csak egy teljes (és konzisztens) axiómarendszer garantálhatja.

Alapelvek, az első eredmények, célkitűzések

A geometria (relatív) konzisztenciája: visszavezetés a valós aritmetikára.

A geometriai tér létezése az axiómarendszer konzisztenciáján alapul.

Bernays, 1928: a létezést csak egy teljes (és konzisztens) axiómarendszer garantálhatja.

Az aritmetikában direkt (abszolút) konzisztenciabizonyítás szükséges.

Alapelvek, az első eredmények, célkitűzések

A geometria (relatív) konzisztenciája: visszavezetés a valós aritmetikára.

A geometriai tér létezése az axiómarendszer konzisztenciáján alapul.

Bernays, 1928: a létezést csak egy teljes (és konzisztens) axiómarendszer garantálhatja.

Az aritmetikában direkt (abszolút) konzisztenciabizonyítás szükséges.

A logikára való visszavezetés nem biztosíték a konzisztenciára – ez a tanulság a paradoxonokból.

A program

Hilbert, 1918:

„Az ilyen elvi kérdések ... [ti. a teljesség, a konzisztencia, az eldönthetőség] nézetem szerint együttesen egy fontos új kutatási területet képeznek, amelyet még ki kell fejlesztenünk. Ennek a területnek a kutatása végett ... magát a sajátosan matematikai bizonyítás fogalmát kell vizsgálat tárgyává tennünk, éppúgy, ahogy ... a fizikus tanulmányozza a mérőeszközei elméletét és a filozófus bírálja magát az észet.”

Hilbert, 1918:

„Az ilyen elvi kérdések ... [ti. a teljesség, a konzisztencia, az eldönthetőség] nézetem szerint együttesen egy fontos új kutatási területet képeznek, amelyet még ki kell fejlesztenünk. Ennek a területnek a kutatása végett ... magát a sajátosan matematikai bizonyítás fogalmát kell vizsgálat tárgyává tennünk, éppúgy, ahogy ... a fizikus tanulmányozza a mérőeszközei elméletét és a filozófus bírálja magát az észet.”

Egy matematikai elmélet ilyen vizsgálatának előkészítő lépései:

- axiomatizáljuk az elméletet;
- formalizáljuk az elméletet, beleértve a benne felhasznált logikai elveket.

Hilbert, 1918:

„Az ilyen elvi kérdések ... [ti. a teljesség, a konzisztencia, az eldönthetőség] nézetem szerint együttesen egy fontos új kutatási területet képeznek, amelyet még ki kell fejlesztenünk. Ennek a területnek a kutatása végett ... magát a sajátosan matematikai bizonyítás fogalmát kell vizsgálat tárgyává tennünk, éppúgy, ahogy ... a fizikus tanulmányozza a mérőeszközei elméletét és a filozófus bírálja magát az észet.”

Egy matematikai elmélet ilyen vizsgálatának előkészítő lépései:

- axiomatizáljuk az elméletet;
- formalizáljuk az elméletet, beleértve a benne felhasznált logikai elveket.

A vizsgálat fő célja annak kimutatása, hogy a kockázatos, transzfinit elemek nem teszik az elméletet inkonzisztenssé.

A logikai axiómáknak nincs kitüntetett szerepük, és nem privilegizáltak a bizonyosság tekintetében. Ellenkezőleg, amennyiben a végtelenre hivatkoznak, ugyanúgy igazolásra szorulnak, mint más komponensek.

A logikai axiómáknak nincs kitüntetett szerepük, és nem privilegizáltak a bizonyosság tekintetében. Ellenkezőleg, amennyiben a végtelenre hivatkoznak, ugyanúgy igazolásra szorulnak, mint más komponensek.

Pl. a

$$\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$$

séma esetei triviálisan érvényesek egy véges tartományon, hiszen véges sok lépésben verifikálhatóak. De egy végtelen tartományon véges sok lépés után mindig lehetséges az, hogy nem találtunk olyan a objektumot, amelyre $\neg A(a)$ igaz, viszont nem is verifikáltuk $\forall x A(x)$ -t.

A logikai axiómáknak nincs kitüntetett szerepük, és nem privilegizáltak a bizonyosság tekintetében. Ellenkezőleg, amennyiben a végtelenre hivatkoznak, ugyanúgy igazolásra szorulnak, mint más komponensek.

Pl. a

$$\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$$

séma esetei triviálisan érvényesek egy véges tartományon, hiszen véges sok lépésben verifikálhatóak. De egy végtelen tartományon véges sok lépés után mindig lehetséges az, hogy nem találtunk olyan a objektumot, amelyre $\neg A(a)$ igaz, viszont nem is verifikáltuk $\forall x A(x)$ -t.

A bizonyosság nem a logikában van, hanem a tapasztalatban és a szemléletben (mint a tapasztalat keretében).

A metamatematika azért megbízhatóbb, mint más matematikai elméletek, mert minimalizálja a végtelenre való hivatkozást.

A szemlélet és az ideális elemek: idézetek Hilberttől

A szemlélet és az ideális elemek: idézetek Hilberttől

A szemléletben adott objektumok száma véges kell, hogy legyen,
„megjelenésük, különbözőségük, egymásra következésük ...
közvetlenül, szemléletesen adott kell, hogy legyen számunkra ...”

A szemlélet és az ideális elemek: idézetek Hilberttől

A szemléletben adott objektumok száma véges kell, hogy legyen,
„megjelenésük, különbözőségük, egymásra következésük ...
közvetlenül, szemléletesen adott kell, hogy legyen számunkra ...”

„a számelmélet objektumai számomra – ellentétben Dedekinddel
és Fregevel – maguk a jelek ...”

A szemlélet és az ideális elemek: idézetek Hilberttől

A szemléletben adott objektumok száma véges kell, hogy legyen, „megjelenésük, különbözőségük, egymásra következésük ... közvetlenül, szemléletesen adott kell, hogy legyen számunkra ...”

„a számelmélet objektumai számomra – ellentétben Dedekinddel és Fregével – maguk a jelek ...”

„A szilárd filozófiai attitűd, amely nézetem szerint a tiszta matematika megalapozásához szükséges, a következő: *Kezdetben volt a jel.*”

A szemlélet és az ideális elemek: idézetek Hilberttől

A szemléletben adott objektumok száma véges kell, hogy legyen, „megjelenésük, különbözőségük, egymásra következésük ... közvetlenül, szemléletesen adott kell, hogy legyen számunkra ...”

„a számelmélet objektumai számomra – ellentétben Dedekinddel és Fregével – maguk a jelek ...”

„A szilárd filozófiai attitűd, amely nézetem szerint a tiszta matematika megalapozásához szükséges, a következő: *Kezdetben volt a jel.*”

Ez az attitűd igazolhatja a természetes számok létezését, de nem igazolja a halmazuk vagy az ω rendszám létezését.

A szemlélet és az ideális elemek: idézetek Hilberttől

A szemléletben adott objektumok száma véges kell, hogy legyen, „megjelenésük, különbözőségük, egymásra következésük ... közvetlenül, szemléletesen adott kell, hogy legyen számunkra ...”

„a számelmélet objektumai számomra – ellentétben Dedekinddel és Fregevel – maguk a jelek ...”

„A szilárd filozófiai attitűd, amely nézetem szerint a tiszta matematika megalapozásához szükséges, a következő: *Kezdetben volt a jel.*”

Ez az attitűd igazolhatja a természetes számok létezését, de nem igazolja a halmazuk vagy az ω rendszám létezését.

A rendszerünket (amely reális elemekből áll) kibővíthetjük az ω ideális elemmel.

Az ideális elemek módszere

Az ideális elemek módszere

A példa a projektív (sík)geometria. Az euklidészi sík pontjainak és egyeneseink rendszerét kibővíthetjük úgy, hogy minden egyeneshez hozzáadunk egy végtelen távoli pontot.

Az ideális elemek módszere

A példa a projektív (sík)geometria. Az euklidészi sík pontjainak és egyeneseinek rendszerét kibővíthetjük úgy, hogy minden egyeneshez hozzáadunk egy végtelen távoli pontot.

Egy ilyen kibővítést úgy lehet igazolni, ha megmutatjuk, hogy az ideális elemekkel kibővített rendszer konzisztens (amennyiben az eredeti rendszer az volt).

Az ideális elemek módszere

A példa a projektív (sík)geometria. Az euklidészi sík pontjainak és egyeneseinek rendszerét kibővíthetjük úgy, hogy minden egyeneshez hozzáadunk egy végtelen távoli pontot.

Egy ilyen kibővítést úgy lehet igazolni, ha megmutatjuk, hogy az ideális elemekkel kibővített rendszer konzisztens (amennyiben az eredeti rendszer az volt).

A kibővítés ismételten alkalmazható, ezért a reális és ideális elemek megkülönböztetése mindig az aktuális elmülethez viszonyított. Így elméletek egy láncához jutunk, amelyek egyre erősebbek, egyre több ideális elemet tartalmaznak.

Az ideális elemek módszere

A példa a projektív (sík)geometria. Az euklidészi sík pontjainak és egyeneseinek rendszerét kibővíthetjük úgy, hogy minden egyeneshez hozzáadunk egy végtelen távoli pontot.

Egy ilyen kibővítést úgy lehet igazolni, ha megmutatjuk, hogy az ideális elemekkel kibővített rendszer konzisztens (amennyiben az eredeti rendszer az volt).

A kibővítés ismételten alkalmazható, ezért a reális és ideális elemek megkülönböztetése mindig az aktuális elmülethez viszonyított. Így elmúletek egy láncához jutunk, amelyek egyre erősebbek, egyre több ideális elemet tartalmaznak.

”Senki sem űzhet ki minket a Cantor által teremtet paradicsomból.”

A végtelen halmazok, nagy számosságok, stb. ideális elemek. Ilyenek használata nem tilos (szemben az intuicionista matematikával) de igazolásra szorul a reális elemek matematikájában.

A végtelen halmazok, nagy számosságok, stb. ideális elemek. Ilyenek használata nem tilos (szemben az intuicionista matematikával) de igazolásra szorul a reális elemek matematikájában.

Relatív konzisztenciabizonyításokkal az egyes matematikai elméletek konzisztenciáját visszavezethetjük náluk „alapvetőbb” elméletek konzisztenciájára. A bizonyításoknak tisztán formálisaknak kell lenniök, semmi mást nem használhatnak fel, mint az axiómákat.

Az első láncszem problémája

Az első láncszem problémája

A geometria visszavezethető a valós számok elméletére. A valós számok elmélete visszavezethető a Peano-aritmetikára. A Peano-aritmetika – mire? Mi lesz az első szem az egyre alapvetőbb elméletek láncában?

Az első láncszem problémája

A geometria visszavezethető a valós számok elméletére. A valós számok elmélete visszavezethető a Peano-aritmetikára. A Peano-aritmetika – mire? Mi lesz az első szem az egyre alapvetőbb elméletek láncában?

Az első láncszem megbízhatósága nem vezethető vissza más, még alapvetőbb elméletekére. Önmagában kell megbízhatónak lennie, olyan okoknál fogva, amelyek az elmélet tartalmára vonatkoznak.

Az első láncszem problémája

A geometria visszavezethető a valós számok elméletére. A valós számok elmélete visszavezethető a Peano-aritmetikára. A Peano-aritmetika – mire? Mi lesz az első szem az egyre alapvetőbb elméletek láncában?

Az első láncszem megbízhatósága nem vezethető vissza más, még alapvetőbb elméletekére. Önmagában kell megbízhatónak lennie, olyan okoknál fogva, amelyek az elmélet tartalmára vonatkoznak. Ez az első lépés vagy láncszem csak véges, számunkra szemléletünkben adott objektumokra vonatkozó érvelést tartalmazhat, amely csak finit érvelési szabályokra támaszkodik.

Az első láncszem problémája

A geometria visszavezethető a valós számok elméletére. A valós számok elmélete visszavezethető a Peano-aritmetikára. A Peano-aritmetika – mire? Mi lesz az első szem az egyre alapvetőbb elméletek láncában?

Az első láncszem megbízhatósága nem vezethető vissza más, még alapvetőbb elméletekére. Önmagában kell megbízhatónak lennie, olyan okoknál fogva, amelyek az elmélet tartalmára vonatkoznak.

Ez az első lépés vagy láncszem csak véges, számunkra szemléletünkben adott objektumokra vonatkozó érvelést tartalmazhat, amely csak finit érvelési szabályokra támaszkodik.

Erre az első láncszemre elképzelhető jelölt a természetes számok aritmetikájának egy töredéke, korlátozott logikával (korlátos kvantorok). Egy ilyen elméleten belül kellene elsőnek bizonyítani az egész Peano-aritmetika konzisztenciáját.

Kockázat a logikában és az aritmetikában

Kockázat a logikában és az aritmetikában

Transzfinit lépés a logikában: Egzisztenciális megjelenítés, ill. univerzális általánosítás.

Kockázat a logikában és az aritmetikában

Transzfinit lépés a logikában: Egzisztenciális megjelenítés, ill. univerzális általánosítás.

EM: $\exists x F(x) \Rightarrow F(a)$ (azaz ha léteznek F -ek, akkor választhatunk közülük egyet és elnevezhetük a -nak).

Kockázat a logikában és az aritmetikában

Transzfinit lépés a logikában: Egzisztenciális megjelenítés, ill. univerzális általánosítás.

EM: $\exists xF(x) \Rightarrow F(a)$ (azaz ha léteznek F -ek, akkor választhatunk közülük egyet és elnevezhetük a -nak).

UÁ: Ha a az individuumtartomány tetszőleges eleme, akkor $F(a) \Rightarrow \forall xF(x)$

Kockázat a logikában és az aritmetikában

Transzfinit lépés a logikában: Egzisztenciális megjelenítés, ill. univerzális általánosítás.

EM: $\exists xF(x) \Rightarrow F(a)$ (azaz ha léteznek F -ek, akkor választhatunk közülük egyet és elnevezhetük a -nak).

UÁ: Ha a az individuumtartomány tetszőleges eleme, akkor $F(a) \Rightarrow \forall xF(x)$

Hilbert a logika kockázatos alkotórészét az ϵ -operátor bevezetésével formalizálja, $A(x) \rightarrow A(\epsilon A(x))$ a hozzá tartozó transzfinit axióma.

Kockázat a logikában és az aritmetikában

Transzfinit lépés a logikában: Egzisztenciális megjelenítés, ill. univerzális általánosítás.

EM: $\exists xF(x) \Rightarrow F(a)$ (azaz ha léteznek F -ek, akkor választhatunk közülük egyet és elnevezhetük a -nak).

UÁ: Ha a az individuumtartomány tetszőleges eleme, akkor $F(a) \Rightarrow \forall xF(x)$

Hilbert a logika kockázatos alkotórészét az ϵ -operátor bevezetésével formalizálja, $A(x) \rightarrow A(\epsilon A(x))$ a hozzá tartozó transzfinit axióma.

A hallgatólagos univerzális általánosítás általánosságban megengedett. Az univerzális megjelenítés és az egzisztenciális általánosítás nem számít kockázatosnak.

Kockázat a logikában és az aritmetikában

Transzfinit lépés a logikában: Egzisztenciális megjelenítés, ill. univerzális általánosítás.

EM: $\exists xF(x) \Rightarrow F(a)$ (azaz ha léteznek F -ek, akkor választhatunk közülük egyet és elnevezhetük a -nak).

UÁ: Ha a az individuumtartomány tetszőleges eleme, akkor $F(a) \Rightarrow \forall xF(x)$

Hilbert a logika kockázatos alkotórészét az ϵ -operátor bevezetésével formalizálja, $A(x) \rightarrow A(\epsilon A(x))$ a hozzá tartozó transzfinit axióma.

A hallgatólagos univerzális általánosítás általánosságban megengedett. Az univerzális megjelenítés és az egzisztenciális általánosítás nem számít kockázatosnak.

Az aritmetika kockázatos eleme a teljes indukció. Az

$$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x')))) \rightarrow \forall xA(x)$$

indukciós séma csak olyan esetekben használható, amikor $A(x)$ -ben nincs kötött változó.

Egy darabig úgy tűnik, mindez működik

Egy darabig úgy tűnik, mindez működik

Ackermann bebizonyítja

- 1 az indukció nélküli Peano-aritmetika konzisztenciáját,
- 2 aztán a Peano-aritmetika konzisztenciáját úgy, hogy az indukciót a kötött változó nélküli esetre korlátozzuk.

Egy darabig úgy tűnik, mindez működik

Ackermann bebizonyítja

- 1 az indukció nélküli Peano-aritmetika konzisztenciáját,
- 2 aztán a Peano-aritmetika konzisztenciáját úgy, hogy az indukciót a kötött változó nélküli esetre korlátozzuk.

Neumann bizonyítja az egész Peano-aritmetika konzisztenciáját, ha a logikából kihagyjuk a transzfinit axiómát.

Egy darabig úgy tűnik, mindez működik

Ackermann bebizonyítja

- 1 az indukció nélküli Peano-aritmetika konzisztenciáját,
- 2 aztán a Peano-aritmetika konzisztenciáját úgy, hogy az indukciót a kötött változó nélküli esetre korlátozzuk.

Neumann bizonyítja az egész Peano-aritmetika konzisztenciáját, ha a logikából kihagyjuk a transzfinit axiómát.

Erre jön Gödel és bebizonyítja, hogy még az egész Peano-aritmetika is kevés a saját konzisztenciájának bizonyítására (feltéve, hogy tényleg konzisztens). (1931)

Egy darabig úgy tűnik, mindez működik

Ackermann bebizonyítja

- 1 az indukció nélküli Peano-aritmetika konzisztenciáját,
- 2 aztán a Peano-aritmetika konzisztenciáját úgy, hogy az indukciót a kötött változó nélküli esetre korlátozzuk.

Neumann bizonyítja az egész Peano-aritmetika konzisztenciáját, ha a logikából kihagyjuk a transzfinit axiómát.

Erre jön Gödel és bebizonyítja, hogy még az egész Peano-aritmetika is kevés a saját konzisztenciájának bizonyítására (feltéve, hogy tényleg konzisztens). (1931)

1936-ban Gerhard Gentzen bebizonyítja a Peano-aritmetika konzisztenciáját.

Egy darabig úgy tűnik, mindez működik

Ackermann bebizonyítja

- 1 az indukció nélküli Peano-aritmetika konzisztenciáját,
- 2 aztán a Peano-aritmetika konzisztenciáját úgy, hogy az indukciót a kötött változó nélküli esetre korlátozzuk.

Neumann bizonyítja az egész Peano-aritmetika konzisztenciáját, ha a logikából kihagyjuk a transzfinit axiómát.

Erre jön Gödel és bebizonyítja, hogy még az egész Peano-aritmetika is kevés a saját konzisztenciájának bizonyítására (feltéve, hogy tényleg konzisztens). (1931)

1936-ban Gerhard Gentzen bebizonyítja a Peano-aritmetika konzisztenciáját.

Következik a Hilbert-iskola eredményeinek vázlatos bemutatása.