

A Peano-aritmetika konzisztenciája

Az elsőrendű logika eldönthetetlensége

Máté András

2025 november 12.

A második nem-teljességi tétel hatása

A második nem-teljességi tétel hatása

- Gödel: „Szeretném leszögezni, hogy [ez a tétel] nem mond ellent Hilbert formalista felfogásának. Ez a nézet csak azt feltételezi, hogy van olyan konzisztenciabizonyítás, amely kizárólag finitista bizonyítási módszereket használ, és elképzelhető, hogy vannak finitista bizonyítások, amelyeket *nem lehet* kifejezni a[z elsőrendű Peano-aritmetika] formalizmus[á]ban.” (A nem-teljességi tételeket közlő cikkben.)

A második nem-teljességi tétel hatása

- Gödel: „Szeretném leszögezni, hogy [ez a tétel] nem mond ellent Hilbert formalista felfogásának. Ez a nézet csak azt feltételezi, hogy van olyan konzisztenciabizonyítás, amely kizárólag finitista bizonyítási módszereket használ, és elképzelhető, hogy vannak finitista bizonyítások, amelyeket *nem lehet* kifejezni a[z elsőrendű Peano-aritmetika] formalizmus[á]ban.” (A nem-teljességi tételeket közlő cikkben.)
- Neumann: „Így ma azon a véleményen vagyok, hogy
 - 1 Gödel megmutatta Hilbert programjának megvalósíthatatlanságát;
 - 2 nem marad indokunk az intuicionizmus elvetésére (ha figyelmen kívül hagyjuk az esztétikai kérdést, aminek a gyakorlatban számomra is döntő jelentősége van).”

(Levél Carnaphoz, 1931)

A PA konzisztenciája – Gentzen bizonyítása, Kalmár átfogalmazásában

Azt akarjuk bizonyítani, hogy minden, a rendszerben levezethető numerikus formula *igaz*.

A PA konzisztenciája – Gentzen bizonyítása, Kalmár átfogalmazásában

Azt akarjuk bizonyítani, hogy minden, a rendszerben levezethető numerikus formula *igaz*.

Tehát ' $0 = 0$ ' nem vezethető le.

A PA konzisztenciája – Gentzen bizonyítása, Kalmár átfogalmazásában

Azt akarjuk bizonyítani, hogy minden, a rendszerben levezethető numerikus formula *igaz*.

Tehát ' $0 = 0$ ' nem vezethető le.

Definíciók:

A PA konzisztenciája – Gentzen bizonyítása, Kalmár átfogalmazásában

Azt akarjuk bizonyítani, hogy minden, a rendszerben levezethető numerikus formula *igaz*.

Tehát ' $0 = 0$ ' nem vezethető le.

Definíciók:

Numerikus terminusok és formulák: nincsenek változók, sem logikai konstansok, kivéve az egyenlőségjelet.

A PA konzisztenciája – Gentzen bizonyítása, Kalmár átfogalmazásában

Azt akarjuk bizonyítani, hogy minden, a rendszerben levezethető numerikus formula *igaz*.

Tehát ' $0 = 0$ ' nem vezethető le.

Definíciók:

Numerikus terminusok és formulák: nincsenek változók, sem logikai konstansok, kivéve az egyenlőségjelet.

Verifikálható formulák:

- nincsenek kötött változók;
- ha a szabad változókat számjelekkel helyettesítjük, igaz numerikus formulákat kapunk.

A PA konzisztenciája – Gentzen bizonyítása, Kalmár átfogalmazásában

Azt akarjuk bizonyítani, hogy minden, a rendszerben levezethető numerikus formula *igaz*.

Tehát ' $0 = 0$ ' nem vezethető le.

Definíciók:

Numerikus terminusok és formulák: nincsenek változók, sem logikai konstansok, kivéve az egyenlőségjelet.

Verifikálható formulák:

- nincsenek kötött változók;
- ha a szabad változókat számjelekkel helyettesítjük, igaz numerikus formulákat kapunk.

Az indukciós axiómák kivételével axiómáink mind verifikálható formulák, és csak ennyit tételezünk fel róluk.

Előkészítő lépések 1.

Tekintsük egy tetszőleges numerikus formula levezetését (ez lesz a záróformula).

Előkészítő lépések 1.

Tekintsük egy tetszőleges numerikus formula levezetését (ez lesz a záróformula).

- Küszöböljük ki az univerzális kvantifikációkat.

Előkészítő lépések 1.

Tekintsük egy tetszőleges numerikus formula levezetését (ez lesz a záróformula).

- Küszöböljük ki az univerzális kvantifikációkat.
- Rendezzük el egy fába a levezetést a kézenfekvő módon.

Tekintsük egy tetszőleges numerikus formula levezetését (ez lesz a záróformula).

- Küszöböljük ki az univerzális kvantifikációkat.
- Rendezzük el egy fába a levezetést a kézenfekvő módon.
 - Minden formula annyi példányban fordul elő, ahányszor felhasználjuk a levezetésben. Azaz a csomópontok *formulapéldányok*.

Előkészítő lépések 1.

Tekintsük egy tetszőleges numerikus formula levezetését (ez lesz a záróformula).

- Küszöböljük ki az univerzális kvantifikációkat.
- Rendezzük el egy fába a levezetést a kézenfekvő módon.
 - Minden formula annyi példányban fordul elő, ahányszor felhasználjuk a levezetésben. Azaz a csomópontok *formulapéldányok*.
 - A gyökérpont a záróformula.

Előkészítő lépések 1.

Tekintsük egy tetszőleges numerikus formula levezetését (ez lesz a záróformula).

- Küszöböljük ki az univerzális kvantifikációkat.
- Rendezzük el egy fába a levezetést a kézenfekvő módon.
 - Minden formula annyi példányban fordul elő, ahányszor felhasználjuk a levezetésben. Azaz a csomópontok *formulapéldányok*.
 - A gyökérpont a záróformula.
 - Minden levél a következő típusok valamelyikébe tartozik:
 - 1 Kijelentéslogikai igazságok (tautológiák)
 - 2 $\exists$ -axiómák: $A(t) \rightarrow \exists r A(r)$
 - 3 Egyenlőségi formulák: $r = s \rightarrow (A(r) \rightarrow A(s))$
 - 4 Verifikálható formulák
 - 5 Indukciós axiómák

Előkészítő lépések 2.

Előkészítő lépések 2.

- Helyettesítsünk minden

$$A(0) \rightarrow \forall c(A(c) \rightarrow A(c')) \rightarrow A(a)$$

indukciós axiómát az alábbi (I) következtetési séma egy alkalmazásával:

$$\frac{A(0) \quad A(c) \rightarrow A(c')}{A(a)}$$

Előkészítő lépések 2.

- Helyettesítsünk minden

$$A(0) \rightarrow \forall c(A(c) \rightarrow A(c')) \rightarrow A(a)$$

indukciós axiómát az alábbi (I) következtetési séma egy alkalmazásával:

$$\frac{A(0) \quad A(c) \rightarrow A(c')}{A(a)}$$

Az alábbi 3 következtetési szabályt használjuk:

Előkészítő lépések 2.

- Helyettesítsünk minden

$$A(0) \rightarrow \forall c(A(c) \rightarrow A(c')) \rightarrow A(a)$$

indukciós axiómát az alábbi (I) következtetési séma egy alkalmazásával:

$$\frac{A(0) \quad A(c) \rightarrow A(c')}{A(a)}$$

Az alábbi 3 következtetési szabályt használjuk:

- Leválasztás

Előkészítő lépések 2.

- Helyettesítsünk minden

$$A(0) \rightarrow \forall c(A(c) \rightarrow A(c')) \rightarrow A(a)$$

indukciós axiómát az alábbi (I) következtetési séma egy alkalmazásával:

$$\frac{A(0) \quad A(c) \rightarrow A(c')}{A(a)}$$

Az alábbi 3 következtetési szabályt használjuk:

- Leválasztás
- I-séma, mint fent

Előkészítő lépések 2.

- Helyettesítsünk minden

$$A(0) \rightarrow \forall c(A(c) \rightarrow A(c')) \rightarrow A(a)$$

indukciós axiómát az alábbi (I) következtetési séma egy alkalmazásával:

$$\frac{A(0) \quad A(c) \rightarrow A(c')}{A(a)}$$

Az alábbi 3 következtetési szabályt használjuk:

- Leválasztás
- I-séma, mint fent
- $\exists$ -séma:

$$\frac{B(c) \rightarrow A}{\exists x B(x) \rightarrow A}$$

A bizonyítási fa átalakítása (stratégia)

A bizonyítási fa átalakítása (stratégia)

Egy hosszú és néha trükkös számításból kiderül, hogy a bizonyítási fát átalakíthatjuk olyan fává, amely a záróformulát verifikálható formulák behelyettesítéseiből és tautológiákból vezeti le (ezek vannak a leveleknél), és csak a leválasztást használja következtetési szabályként.

A bizonyítási fa átalakítása (stratégia)

Egy hosszú és néha trükkös számításból kiderül, hogy a bizonyítási fát átalakíthatjuk olyan fává, amely a záróformulát verifikálható formulák behelyettesítéseiből és tautológiákból vezeti le (ezek vannak a leveleknél), és csak a leválasztást használja következtetési szabályként.

A záróformulát az átalakított fában verifikált numerikus egyenlőségekből (az axiómák behelyettesítéseiből) vezetjük le, kizárólag kijelentéslogikát alkalmazva. Tehát semmi okunk kételkedni benne.

Kiküszöbölési lépések

Az átalakítás lépéseinek két lényeges típusa a következő:

Az átalakítás lépéseinek két lényeges típusa a következő:

- Az I-következtetések kiküszöbölése. Ezeket csak konkrét számokról – mondjuk a 3-ról – szóló igazságok levezetésére használjuk. Tehát helyettesíteni tudjuk a 0-ról 1-re, 1-ről 2-re, 2-ről 3-ra való következtetéssel.

Az átalakítás lépéseinek két lényeges típusa a következő:

- Az I-következtetések kiküszöbölése. Ezeket csak konkrét számokról – mondjuk a 3-ról – szóló igazságok levezetésére használjuk. Tehát helyettesíteni tudjuk a 0-ról 1-re, 1-ről 2-re, 2-ről 3-ra való következtetéssel.
- Villák kiküszöbölése. Villának a következő konfigurációt nevezzük: Valahol az $\exists$ -sémával bevezetünk egy egzisztenciális kvantifikációt, és ugyanez a formula előfordul valamelyik levélnél levő $\exists$ -axióma utótegjaként. A releváns egzisztenciális kvantort tartalmazó formulák ilyen párokban fordulnak elő. A két formulából kiinduló utaknak valahol találkozniuk kell a záróformula előtt, mert különben a záróformulában kvantifikáció lenne. A villák is helyettesíthetőek kijelentőslogikai bizonyítási fákkal.

Azt kell még bizonyítani, hogy bármely numerikus formula bizonyításából az I-kiküszöbölés éa a villa-kiküszöbölés *véges sokszori ismételt alkalmazásával* el lehet jutni ilyen átalakított bizonyítási fához. Ez az a része a bizonyításnak, amelyet nem lehet formalizálni az elsőrendű Peano-aritmetikában.

Rekurzívan definiáljuk az $0 - \omega$ -alakzatokat és egyúttal a fokokba való beosztásukat és egy $<$ rendezést közöttük. Ezek valójában bizonyos megszámlálható rendszámok, szemléletes formában – rendszámoknak is nevezzük őket.

Rekurzívan definiáljuk az $0 - \omega$ -alakzatokat és egyúttal a fokokba való beosztásukat és egy $<$ rendezést közöttük. Ezek valójában bizonyos megszámlálható rendszámok, szemléletes formában – rendszámoknak is nevezzük őket.

- Az első és legkisebb alakzat a '0', az egyetlen 0 fokú alakzat.

Rekurzívan definiáljuk az 0 – ω -alakzatokat és egyúttal a fokokba való beosztásukat és egy $<$ rendezést közöttük. Ezek valójában bizonyos megszámlálható rendszámok, szemléletes formában – rendszámoknak is nevezzük őket.

- Az első és legkisebb alakzat a '0', az egyetlen 0 fokú alakzat.
- Az elsőfokú alakzatok nem üres $\omega^0 + \omega^0 + \dots + \omega^0$ alakú összeg(kifejezés)ek. A rövidebb a kisebb, és a 0 mindnél kisebb.
 ω^0 helyett írhatunk 1-et, az r hosszúságú összeg helyett pedig r -t.

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,
- a_1 k fokú;

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,
- a_1 k fokú;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ a rendezés szerint, amit a k fokig már bevezettünk.

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,
- a_1 k fokú;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ a rendezés szerint, amit a k fokig már bevezettünk.

A $<$ kiterjesztése a $k + 1$ fokra:

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,
- a_1 k fokú;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ a rendezés szerint, amit a k fokig már bevezettünk.

A $<$ kiterjesztése a $k + 1$ fokra:

- A $k + 1$ fokú alakzatok mind nagyobbak, mint az előző fokokba tartozó alakzatok.

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,
- a_1 k fokú;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ a rendezés szerint, amit a k fokig már bevezettünk.

A $<$ kiterjesztése a $k + 1$ fokra:

- A $k + 1$ fokú alakzatok mind nagyobbak, mint az előző fokokba tartozó alakzatok.
- Egy $k + 1$ fokú a alakzat nagyobb, mint egy másik, b , hha

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,
- a_1 k fokú;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ a rendezés szerint, amit a k fokig már bevezettünk.

A $<$ kiterjesztése a $k + 1$ fokra:

- A $k + 1$ fokú alakzatok mind nagyobbak, mint az előző fokokba tartozó alakzatok.
- Egy $k + 1$ fokú a alakzat nagyobb, mint egy másik, b , hha
 - az első kitevő, amelyben különböznek, nagyobb a -ban, mint b -ben;

0 – ω -alakzatok, folytatás

- Tfh. a k fokig már bevezettük az alakzatokat és a rendezésüket. Egy

$$\omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r} \quad (r \neq 0)$$

alakú kifejezés $k + 1$ fokú, hha

- a $a_1, \dots, a_r$ kifejezések mind $\leq k$ fokúak,
- a_1 k fokú;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ a rendezés szerint, amit a k fokig már bevezettünk.

A $<$ kiterjesztése a $k + 1$ fokra:

- A $k + 1$ fokú alakzatok mind nagyobbak, mint az előző fokokba tartozó alakzatok.
- Egy $k + 1$ fokú a alakzat nagyobb, mint egy másik, b , hha
 - az első kitevő, amelyben különböznek, nagyobb a -ban, mint b -ben;
 - vagy ha ilyen nincs, akkor a folytatása b -nek.

Rendszámokat rendelünk a bizonyítási facsomópontjaihoz

Rendszámokat rendelünk a bizonyítási fa csomópontjaihoz

Az eredeti (az előkészítő lépések utáni) bizonyítási fa csomópontjait megcímkezzük $0 - \omega$ -alakzatokkal, röviden rendszámokkal.

Rendszámokat rendelünk a bizonyítási fa csomópontjaihoz

Az eredeti (az előkészítő lépések utáni) bizonyítási fa csomópontjait megcímkezzük $0 - \omega$ -alakzatokkal, röviden rendszámokkal.

A leveleknél kezdjük és lépésről-lépésre követjük a bizonyítást. Minden csomópont rendszáma a közvetlen előzménye(i)nek a rendszámától függ. A végén eljutunk a záróformula rendszámához – ez lesz a bizonyítás rendszáma.

Rendszámokat rendelünk a bizonyítási fa csomópontjaihoz

Az eredeti (az előkészítő lépések utáni) bizonyítási fa csomópontjait megcímkézzük $0 - \omega$ -alakzatokkal, röviden rendszámokkal.

A leveleknél kezdjük és lépésről-lépésre követjük a bizonyítást. Minden csomópont rendszáma a közvetlen előzménye(i)nek a rendszámától függ. A végén eljutunk a záróformula rendszámához – ez lesz a bizonyítás rendszáma.

Megmutatjuk, hogy a kiküszöbölési lépések (szigorúan) csökkentik a bizonyítás rendszámát.

Rendszámokat rendelünk a bizonyítási fa csomópontjaihoz

Az eredeti (az előkészítő lépések utáni) bizonyítási fa csomópontjait megcímkezzük $0 - \omega$ -alakzatokkal, röviden rendszámokkal.

A leveleknél kezdjük és lépésről-lépésre követjük a bizonyítást. Minden csomópont rendszáma a közvetlen előzménye(i)nek a rendszámától függ. A végén eljutunk a záróformula rendszámához – ez lesz a bizonyítás rendszáma.

Megmutatjuk, hogy a kiküszöbölési lépések (szigorúan) csökkentik a bizonyítás rendszámát.

A bizonyítás utolsó lépése (következő diák): megmutatjuk, hogy a rendszámaink nem alkothatnak szigorúan csökkenő végtelen sorozatot.

Rendszámokat rendelünk a bizonyítási fa csomópontjaihoz

Az eredeti (az előkészítő lépések utáni) bizonyítási fa csomópontjait megcímkezzük $0 - \omega$ -alakzatokkal, röviden rendszámokkal.

A leveleknél kezdjük és lépésről-lépésre követjük a bizonyítást. Minden csomópont rendszáma a közvetlen előzménye(i)nek a rendszámától függ. A végén eljutunk a záróformula rendszámához – ez lesz a bizonyítás rendszáma.

Megmutatjuk, hogy a kiküszöbölési lépések (szigorúan) csökkentik a bizonyítás rendszámát.

A bizonyítás utolsó lépése (következő diák): megmutatjuk, hogy a rendszámaink nem alkothatnak szigorúan csökkenő végtelen sorozatot.

Tehát az átalakított fát el tudjuk érni véges sok lépésben.

Leszállóan véges rendszámok

Egy rendszám leszállóan véges, ha nem létezik rendszámoknak olyan végtelen csökkenő sorozata, amely vele kezdődik.
Indukcióval bebizonyítjuk, hogy *minden rendszám leszállóan véges*.

Leszállóan véges rendszámok

Egy rendszám leszállóan véges, ha nem létezik rendszámoknak olyan végtelen csökkenő sorozata, amely vele kezdődik.

Indukcióval bebizonyítjuk, hogy *minden rendszám leszállóan véges*.

- A 0 és 1 fokú rendszámok nyilvánvalóan leszállóan végesek.
(Az 1 fok esetében ehhez már indukcióra van szükség.)

Leszállóan véges rendszámok

Egy rendszám leszállóan véges, ha nem létezik rendszámoknak olyan végtelen csökkenő sorozata, amely vele kezdődik.

Indukcióval bebizonyítjuk, hogy *minden rendszám leszállóan véges*.

- A 0 és 1 fokú rendszámok nyilvánvalóan leszállóan végesek. (Az 1 fok esetében ehhez már indukcióra van szükség.)
- Tegyük fel, hogy minden $k \geq 1$ -nél nem nagyobb fokú rendszám leszállóan véges. Azt kell megmutatnunk, hogy akkor minden $k + 1$ fokú rendszám is leszállóan véges.

Leszállóan véges rendszámok

Egy rendszám leszállóan véges, ha nem létezik rendszámoknak olyan végtelen csökkenő sorozata, amely vele kezdődik.

Indukcióval bebizonyítjuk, hogy *minden rendszám leszállóan véges*.

- A 0 és 1 fokú rendszámok nyilvánvalóan leszállóan végesek. (Az 1 fok esetében ehhez már indukcióra van szükség.)
- Tegyük fel, hogy minden $k \geq 1$ -nél nem nagyobb fokú rendszám leszállóan véges. Azt kell megmutatnunk, hogy akkor minden $k + 1$ fokú rendszám is leszállóan véges.
- Elég belátni, hogy minden ω^a alakú rendszám (ahol a foka k) leszállóan véges.

Leszállóan véges rendszámok

Egy rendszám leszállóan véges, ha nem létezik rendszámoknak olyan végtelen csökkenő sorozata, amely vele kezdődik.

Indukcióval bebizonyítjuk, hogy *minden rendszám leszállóan véges*.

- A 0 és 1 fokú rendszámok nyilvánvalóan leszállóan végesek. (Az 1 fok esetében ehhez már indukcióra van szükség.)
- Tegyük fel, hogy minden $k \geq 1$ -nél nem nagyobb fokú rendszám leszállóan véges. Azt kell megmutatnunk, hogy akkor minden $k + 1$ fokú rendszám is leszállóan véges.
- Elég belátni, hogy minden ω^a alakú rendszám (ahol a foka k) leszállóan véges.
- Vegyünk egy ω^a -val kezdődő leszálló sorozatot. Ennek első tagja $c = \omega^{a_1} + \omega^{a_2} + \dots + \omega^{a_r}$, ahol $a_1 < a$. Azt kell bizonyítani, hogy c leszállóan véges.

Leszállóan véges rendszámok, folytatás

Leszállóan véges rendszámok, folytatás

- c nem nagyobb, mint $\omega^{a_1} + \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_1}$ (röviden $\omega^{a_1} \cdot r$). Így ha van egy leszálló láncunk c -ből, akkor kaphatunk egy leszálló láncot $\omega^{a_1} \cdot r$ -ből, csak ezt az utóbbit kell a lánc elejére tenni. Tehát ha $\omega^{a_1} \cdot r$ leszállóan véges, akkor ω^a is.

Leszállóan véges rendszámok, folytatás

- c nem nagyobb, mint $\omega^{a_1} + \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_1}$ (röviden $\omega^{a_1} \cdot r$). Így ha van egy leszálló láncunk c -ből, akkor kaphatunk egy leszálló láncot $\omega^{a_1} \cdot r$ -ből, csak ezt az utóbbit kell a lánc elejére tenni. Tehát ha $\omega^{a_1} \cdot r$ leszállóan véges, akkor ω^a is.
- Ha a ω^b rendszám leszállóan véges, akkor $\omega^b \cdot r$ is az. (Még egy indukciós részbizonyítás.)

Leszállóan véges rendszámok, folytatás

- c nem nagyobb, mint $\omega^{a_1} + \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_1}$ (röviden $\omega^{a_1} \cdot r$). Így ha van egy leszálló láncunk c -ből, akkor kaphatunk egy leszálló láncot $\omega^{a_1} \cdot r$ -ből, csak ezt az utóbbit kell a lánc elejére tenni. Tehát ha $\omega^{a_1} \cdot r$ leszállóan véges, akkor ω^a is.
- Ha a ω^b rendszám leszállóan véges, akkor $\omega^b \cdot r$ is az. (Még egy indukciós részbizonyítás.)
- Tehát ω^a leszállóan véges voltát visszavezettük arra, hogy ω^{a_1} az, ahol $a_1 < a$. Ezt a megfontolást ismételve, egy $a > a_1 > a_2 \dots$ csökkenő sorozathoz jutunk, ahol az első tag foka k , tehát a feltevés szerint a sorozat véges.

Leszállóan véges rendszámok, folytatás

- c nem nagyobb, mint $\omega^{a_1} + \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_1}$ (röviden $\omega^{a_1} \cdot r$). Így ha van egy leszálló láncunk c -ből, akkor kaphatunk egy leszálló láncot $\omega^{a_1} \cdot r$ -ből, csak ezt az utóbbit kell a lánc elejére tenni. Tehát ha $\omega^{a_1} \cdot r$ leszállóan véges, akkor ω^a is.
- Ha a ω^b rendszám leszállóan véges, akkor $\omega^b \cdot r$ is az. (Még egy indukciós részbizonyítás.)
- Tehát ω^a leszállóan véges voltát visszavezettük arra, hogy ω^{a_1} az, ahol $a_1 < a$. Ezt a megfontolást ismételve, egy $a > a_1 > a_2 \dots$ csökkenő sorozathoz jutunk, ahol az első tag foka k , tehát a feltevés szerint a sorozat véges.
- Az utolsó tag foka 0 vagy 1, mert különben folytatni lehetne a sorozatot. De a 0 és az 1 fokú rendszámok leszállóan végesek. Ezzel kész a bizonyítás.

Összefoglalás

Annak az állításnak a bizonyítása, hogy nincs végtelen leszálló rendszám-sorozat az a része a bizonyításnak, amely nem formalizálható PA-ban.

Összefoglalás

Annak az állításnak a bizonyítása, hogy nincs végtelen leszálló rendszám-sorozat az a része a bizonyításnak, amely nem formalizálható PA-ban.

Finit bizonyítás-e? Más szóval: mit is nyertünk ezzel a bizonyítással?

Összefoglalás

Annak az állításnak a bizonyítása, hogy nincs végtelen leszálló rendszám-sorozat az a része a bizonyításnak, amely nem formalizálható PA-ban.

Finit bizonyítás-e? Más szóval: mit is nyertünk ezzel a bizonyítással?

Megkaptuk a Peano-aritmetika megbízhatóságát azon az áron, ha elfogadjuk a fenti indukciót.

Összefoglalás

Annak az állításnak a bizonyítása, hogy nincs végtelen leszálló rendszám-sorozat az a része a bizonyításnak, amely nem formalizálható PA-ban.

Finit bizonyítás-e? Más szóval: mit is nyertünk ezzel a bizonyítással?

Megkaptuk a Peano-aritmetika megbízhatóságát azon az áron, ha elfogadjuk a fenti indukciót.

Bizonyításunk nem-formális érvelés véges szintaktikai objektumokról,

Összefoglalás

Annak az állításnak a bizonyítása, hogy nincs végtelen leszálló rendszám-sorozat az a része a bizonyításnak, amely nem formalizálható PA-ban.

Finit bizonyítás-e? Más szóval: mit is nyertünk ezzel a bizonyítással?

Megkaptuk a Peano-aritmetika megbízhatóságát azon az áron, ha elfogadjuk a fenti indukciót.

Bizonyításunk nem-formális érvelés véges szintaktikai objektumokról, amelyek transzfinit sorozatba vannak rendezve.

Annak az állításnak a bizonyítása, hogy nincs végtelen leszálló rendszám-sorozat az a része a bizonyításnak, amely nem formalizálható PA-ban.

Finit bizonyítás-e? Más szóval: mit is nyertünk ezzel a bizonyítással?

Megkaptuk a Peano-aritmetika megbízhatóságát azon az áron, ha elfogadjuk a fenti indukciót.

Bizonyításunk nem-formális érvelés véges szintaktikai objektumokról, amelyek transzfinit sorozatba vannak rendezve.

Az elsőrendű Peano-bizonyítások a fenti formalizálásban kétféle „transzfinit” eszközt használnak: $\exists$ -következtetést és induktív következtetést. Metanyelvi bizonyításunk azt mutatta meg, hogy mindkettő kiküszöbölhető, de a kiküszöbölési eljárás végessége csak az indukció egy erősebb formájával volt bizonyítható.

Annak az állításnak a bizonyítása, hogy nincs végtelen leszálló rendszám-sorozat az a része a bizonyításnak, amely nem formalizálható PA-ban.

Finit bizonyítás-e? Más szóval: mit is nyertünk ezzel a bizonyítással?

Megkaptuk a Peano-aritmetika megbízhatóságát azon az áron, ha elfogadjuk a fenti indukciót.

Bizonyításunk nem-formális érvelés véges szintaktikai objektumokról, amelyek transzfinit sorozatba vannak rendezve.

Az elsőrendű Peano-bizonyítások a fenti formalizálásban kétféle „transzfinit” eszközt használnak: $\exists$ -következtetést és induktív következtetést. Metanyelvi bizonyításunk azt mutatta meg, hogy mindkettő kiküszöbölhető, de a kiküszöbölési eljárás végessége csak az indukció egy erősebb formájával volt bizonyítható.

A bizonyításban egyébként nem használtunk $\exists$ -következtetést (vagy a vele egyenértékű egzisztenciális megjelenítést).

Az eldöntésprobléma és a megállási probléma

Az eldöntésképrobléma és a megállási probléma

Valaki azt állítja, hogy egy elsőrendű logikában formalizált következtetés egy Γ véges premisszahalmazból egy C konklúzióra helyes. Adjunk meg algoritmust annak ellenőrzésére, hogy így van-e. (Hilbert-Ackermann, 1928)

Az eldöntésprobléma és a megállási probléma

Valaki azt állítja, hogy egy elsőrendű logikában formalizált következtetés egy Γ véges premisszahalmazból egy C konklúzióra helyes. Adjunk meg algoritmust annak ellenőrzésére, hogy így van-e. (Hilbert-Ackermann, 1928)

Ha elsőrendű logika helyett kijelentéslogikára szorítkozunk, akkor az igazságtáblázatok módszere megfelel.

Az eldöntésképrobléma és a megállási probléma

Valaki azt állítja, hogy egy elsőrendű logikában formalizált következtetés egy Γ véges premisszahalmazból egy C konklúzióra helyes. Adjunk meg algoritmust annak ellenőrzésére, hogy így van-e. (Hilbert-Ackermann, 1928)

Ha elsőrendű logika helyett kijelentéslogikára szorítkozunk, akkor az igazságtáblázatok módszere megfelel.

Mi az, hogy algoritmus? Church-Turing tézis: az, ami rekurzív függvényekkel, illetve Turing-géppel modellezhető.

Az eldöntésképrobléma és a megállási probléma

Valaki azt állítja, hogy egy elsőrendű logikában formalizált következtetés egy Γ véges premissahalmazból egy C konklúzióra helyes. Adjunk meg algoritmust annak ellenőrzésére, hogy így van-e. (Hilbert-Ackermann, 1928)

Ha elsőrendű logika helyett kijelentéslogikára szorítkozunk, akkor az igazságtáblázatok módszere megfelel.

Mi az, hogy algoritmus? Church-Turing tézis: az, ami rekurzív függvényekkel, illetve Turing-géppel modellezhető.

Eredmény (Church, Turing, mások): vannak algoritmussal el nem dönthető problémahalmazok. Ilyen az elsőrendű logikában az érvényesség, vagy a diophantoszi egyenletek megoldhatósága, vagy a megállási probléma.

Az eldöntésképrobléma és a megállási probléma

Valaki azt állítja, hogy egy elsőrendű logikában formalizált következtetés egy Γ véges premisszahalmazból egy C konklúzióra helyes. Adjunk meg algoritmust annak ellenőrzésére, hogy így van-e. (Hilbert-Ackermann, 1928)

Ha elsőrendű logika helyett kijelentéslogikára szorítkozunk, akkor az igazságtáblázatok módszere megfelel.

Mi az, hogy algoritmus? Church-Turing tézis: az, ami rekurzív függvényekkel, illetve Turing-géppel modellezhető.

Eredmény (Church, Turing, mások): vannak algoritmussal el nem dönthető problémahalmazok. Ilyen az elsőrendű logikában az érvényesség, vagy a diophantoszi egyenletek megoldhatósága, vagy a megállási probléma.

Megállási probléma: egy adott (kódszámú) algoritmus egy adott bemenetre ad-e kimenetet, vagy végtelen sokáig jár?

A megállásprobléma, informálisan

A megállásprobléma, informálisan

Vegyük azokat az algoritmusokat, amelyek (parciális) természetes szám-függvényeket számítanak ki. Kódoljuk mindegyiket egy természetes számmal. Értelmezzük a következő kétváltozós függvényt:

$\Phi(w, x) = a$ a w kódszámú algoritmus eredménye az x inputra

Φ nincs értelmezve, ha w nem kódszám, vagy ha az adott algoritmus az adott inputra nem ad outputot.

A megállásprobléma, informálisan

Vegyük azokat az algoritmusokat, amelyek (parciális) természetes szám-függvényeket számítanak ki. Kódoljuk mindegyiket egy természetes számmal. Értelmezzük a következő kétváltozós függvényt:

$\Phi(w, x) =$ a w kódszámú algoritmus eredménye az x inputra

Φ nincs értelmezve, ha w nem kódszám, vagy ha az adott algoritmus az adott inputra nem ad outputot.

Φ kiszámítható függvény, és szimulálja az összes kiszámítható egyváltozós függvényt, abban az értelemben, hogy minden f kiszámítható függvénynek van egy e kódszáma, és bármely x -re

$$f(x) = \Phi(e, x)$$

A megállásprobléma, informálisan

Vegyük azokat az algoritmusokat, amelyek (parciális) természetes szám-függvényeket számítanak ki. Kódoljuk mindegyiket egy természetes számmal. Értelmezzük a következő kétváltozós függvényt:

$\Phi(w, x) = a$ a w kódszámú algoritmus eredménye az x inputra

Φ nincs értelmezve, ha w nem kódszám, vagy ha az adott algoritmus az adott inputra nem ad outputot.

Φ kiszámítható függvény, és szimulálja az összes kiszámítható egyváltozós függvényt, abban az értelemben, hogy minden f kiszámítható függvénynek van egy e kódszáma, és bármely x -re

$$f(x) = \Phi(e, x)$$

Rövidítse $\Phi(w, x) \downarrow$ azt az állítást, hogy a w kódszámú algoritmus az x inputra ad outputot, $\Phi(w, x) \uparrow$ azt, hogy nem.

További definíciók

További definíciók

Legyen $\llbracket e \rrbracket$ az e természetes számmal kódolt algoritmus által kiszámított függvény (ha van ilyen).

A $\llbracket 0 \rrbracket, \llbracket 1 \rrbracket, \llbracket 2 \rrbracket, \dots$ sorozat felsorolja az összes kiszámítható függvényt.

Ha f algoritmusának kódszáma w , akkor $\llbracket w \rrbracket(x) = f(x) = \Phi(w.x)$

További definíciók

Legyen $\llbracket e \rrbracket$ az e természetes számmal kódolt algoritmus által kiszámított függvény (ha van ilyen).

A $\llbracket 0 \rrbracket, \llbracket 1 \rrbracket, \llbracket 2 \rrbracket, \dots$ sorozat felsorolja az összes kiszámítható függvényt.

Ha f algoritmusának kódszáma w , akkor $\llbracket w \rrbracket(x) = f(x) = \Phi(w.x)$

A H megállási reláció:

$$H(w, x) \text{ hha } \llbracket w \rrbracket(x) \downarrow$$

További definíciók

Legyen $\llbracket e \rrbracket$ az e természetes számmal kódolt algoritmus által kiszámított függvény (ha van ilyen).

A $\llbracket 0 \rrbracket, \llbracket 1 \rrbracket, \llbracket 2 \rrbracket, \dots$ sorozat felsorolja az összes kiszámítható függvényt.

Ha f algoritmusának kódszáma w , akkor $\llbracket w \rrbracket(x) = f(x) = \Phi(w.x)$

A H megállási reláció:

$$H(w, x) \text{ hha } \llbracket w \rrbracket(x) \downarrow$$

H karakterisztikus függvénye a

$$C_H(w, x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } H(w, x) \\ 0, & \text{ha } \neg H(w, x) \end{cases}$$

függvény. A megállásprobléma eldönthetősége pontosan annyit jelentene, hogy C_H kiszámítható.

Tétel (TURING 1936) A megállásprobléma eldönthetetlen.

Tétel (TURING 1936) A megállásprobléma eldönthetetlen.

Tfh. C_H kiszámítható. Akkor kiszámítható ez az f függvény is:

$$f(n) = 1, \text{ ha } C_H(n, n) = 0, \text{ máskor nincs értelmezve}$$

Tétel (TURING 1936) A megállásprobléma eldönthetetlen.

Tfh. C_H kiszámítható. Akkor kiszámítható ez az f függvény is:

$$f(n) = 1, \text{ ha } C_H(n, n) = 0, \text{ máskor nincs értelmezve}$$

Legyen az f -et kiszámító algoritmus P , a kódszáma e . Két eset van:

Tétel (TURING 1936) A megállásprobléma eldönthetetlen.

Tfh. C_H kiszámítható. Akkor kiszámítható ez az f függvény is:

$$f(n) = 1, \text{ ha } C_H(n, n) = 0, \text{ máskor nincs értelmezve}$$

Legyen az f -et kiszámító algoritmus P , a kódszáma e . Két eset van:

1. $C_H(e, e) = 0$ Akkor $f(e) = 1 = \llbracket e \rrbracket(e)$, ezért $H(e, e)$ fennáll.
Ezek szerint $C_H(e, e) = 1$, ellentmondás.

Tétel (TURING 1936) A megállásprobléma eldönthetetlen.

Tfh. C_H kiszámítható. Akkor kiszámítható ez az f függvény is:

$$f(n) = 1, \text{ ha } C_H(n, n) = 0, \text{ máskor nincs értelmezve}$$

Legyen az f -et kiszámító algoritmus P , a kódszáma e . Két eset van:

1. $C_H(e, e) = 0$ Akkor $f(e) = 1 = \llbracket e \rrbracket(e)$, ezért $H(e, e)$ fennáll.
Ezek szerint $C_H(e, e) = 1$, ellentmondás.
2. $C_H(e, e) = 1$. Akkor f nincs értelmezve e -re, tehát $\llbracket e \rrbracket(e)$ nem ad outputot. Következésképp $C_H(e, e) = 0$, megint ellentmondás.

Tétel (TURING 1936) A megállásprobléma eldönthetetlen.

Tfh. C_H kiszámítható. Akkor kiszámítható ez az f függvény is:

$$f(n) = 1, \text{ ha } C_H(n, n) = 0, \text{ máskor nincs értelmezve}$$

Legyen az f -et kiszámító algoritmus P , a kódszáma e . Két eset van:

1. $C_H(e, e) = 0$ Akkor $f(e) = 1 = \llbracket e \rrbracket(e)$, ezért $H(e, e)$ fennáll.
Ezek szerint $C_H(e, e) = 1$, ellentmondás.
2. $C_H(e, e) = 1$. Akkor f nincs értelmezve e -re, tehát $\llbracket e \rrbracket(e)$ nem ad outputot. Következésképp $C_H(e, e) = 0$, megint ellentmondás.

Tehát C_H nem lehet kiszámítható.