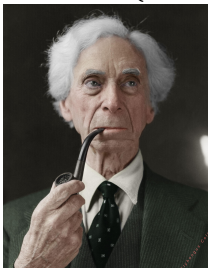


Russell és Ramsey logicizmusa

Máté András

2025. november 19.

Bertrand Russell (1872-1970)



Matematikus, logikus, filozófus, közéleti személyiség ...
Irodalmi Nobel-díjas (1950)

Russell logicizmusa

Russell hibás kör-elve (VCP):

„Ami magában foglalja egy összesség egészét, az nem lehet tagja az összességnek”, vagy fordítva: „Ha feltételeznénk, hogy egy bizonyos összességnek van egy összege, akkor az összességnek volnának olyan tagjai, amelyek csak erre az összegre hivatkozva definiálhatók, akkor az említett összességnek nincs összege.

„A típuselméletre alapozott matematikai logika”, 1908

Russell hibás kör-elve (VCP):

„Ami magában foglalja egy összesség egészét, az nem lehet tagja az összességnek”, vagy fordítva: „Ha feltételeznénk, hogy egy bizonyos összességnek van egy összege, akkor az összességnek volnának olyan tagjai, amelyek csak erre az összegre hivatkozva definiálhatók, akkor az említett összességnek nincs összege.

„A típuselméletre alapozott matematikai logika”, 1908

Megszorító elv a megengedhető definíciókra. Kiküszöböli a Russell-paradoxont, a Hazug, a ...betűvel nem definiálható egész szám, a Richard- és a hiperjáték-paradoxont. Nem küszöböli ki a Yablo-paradoxont.(?)

Egy definíció impredikatív, ha tartalmaz olyan osztály feletti kvantifikációt, amelybe beletartozik a definiálandó dolog.
Predikatív a ,ásik esetben. Nem formálisan: azok a definíciók predikatívak amelyek nem sértik a VCP elvet.

Egy definíció impredikatív, ha tartalmaz olyan osztály feletti kvantifikációt, amelybe beletartozik a definiálandó dolog.

Predikatív a ,ásik esetben. Nem formálisan: azok a definíciók predikatívak amelyek nem sértik a VCP elvet.

A „természetes szám” predikátum egy kézenfekvő (fregeánus) definíciója:

$$N(n) \leftrightarrow_{def} \forall \varphi ((\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x'))) \rightarrow \varphi(n))$$

Egy definíció impredikatív, ha tartalmaz olyan osztály feletti kvantifikációt, amelybe beletartozik a definiálandó dolog.

Predikatív a ,ásik esetben. Nem formálisan: azok a definíciók predikatívak amelyek nem sértik a VCP elvet.

A „természetes szám” predikátum egy kézenfekvő (fregeánus) definíciója:

$$N(n) \leftrightarrow_{def} \forall \varphi ((\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')))) \rightarrow \varphi(n))$$

Impredikatív, mert N a φ változó lehetséges értékei közé tartozik.

Russelli típusok

Típuselmélet: a VCP technikai megvalósítása.

Típuselmélet: a VCP technikai megvalósítása.

„Ami tartalmaz egy látszólagos [= kötött] változót, az nem lehet értéke ennek a változónak.” Tehát ami tartalmaz egy látszólagos változót, annak más típusba kell tartoznia, mint a változó lehetséges értékeinek; azt fogjuk mondani, hogy magasabb típusba tartozik.

Típuselmélet: a VCP technikai megvalósítása.

„Ami tartalmaz egy látszólagos [= kötött] változót, az nem lehet értéke ennek a változónak.” Tehát ami tartalmaz egy látszólagos változót, annak más típusba kell tartoznia, mint a változó lehetséges értékeinek; azt fogjuk mondani, hogy magasabb típusba tartozik.

Típus: egy kötött változó értéktartománya, azaz „azoknak az argumentumoknak az összessége, amelyekre a függvénynek van értéke”.

Típuselmélet: a VCP technikai megvalósítása.

„Ami tartalmaz egy látszólagos [= kötött] változót, az nem lehet értéke ennek a változónak.” Tehát ami tartalmaz egy látszólagos változót, annak más típusba kell tartoznia, mint a változó lehetséges értékeinek; azt fogjuk mondani, hogy magasabb típusba tartozik.

Típus: egy kötött változó értéktartománya, azaz „azoknak az argumentumoknak az összessége, amelyekre a függvénynek van értéke”.

A predikativitás biztosítása a típuselmélet segítségével történik.

Egyszerű és elágaztatott típuselmélet

Egyszerű és elágaztatott típuselmélet

A típusokba osztás mindig egy adott elmélethez/szöveghez viszonyítandó.

Egyszerű és elágaztatott típuselmélet

A típusokba osztás mindig egy adott elmélethez/szöveghez viszonyítandó.

Egyszerű típuselmélet:

A típusokba osztás mindig egy adott elmélethez/szöveghez viszonyítandó.

Egyszerű típuselmélet:

- A hierarchia alapja: a 0 típusú változók lehetséges értékei individuumok egy nem-üres osztályában vannak.

A típusokba osztás mindig egy adott elmélethez/szöveghez viszonyítandó.

Egyszerű típuselmélet:

- A hierarchia alapja: a 0 típusú változók lehetséges értékei individuumok egy nem-üres osztályában vannak.
- 1 típus: individuumok osztályai. Ezeket $\varphi(x)$ propozicionális függvényekkel (nyitott mondatokkal) definiáljuk, amelyek 0 típusú változókat tartalmazhatnak.

A típusokba osztás mindig egy adott elmélethez/szöveghez viszonyítandó.

Egyszerű típuselmélet:

- A hierarchia alapja: a 0 típusú változók lehetséges értékei individuumok egy nem-üres osztályában vannak.
- 1 típus: individuumok osztályai. Ezeket $\varphi(x)$ propozicionális függvényekkel (nyitott mondatokkal) definiáljuk, amelyek 0 típusú változókat tartalmazhatnak.
- 2 típus: individuumok osztályainak osztályai, stb.

A típusokba osztás mindig egy adott elmélethez/szöveghez viszonyítandó.

Egyszerű típuselmélet:

- A hierarchia alapja: a 0 típusú változók lehetséges értékei individuumok egy nem-üres osztályában vannak.
- 1 típus: individuumok osztályai. Ezeket $\varphi(x)$ propozicionális függvényekkel (nyitott mondatokkal) definiáljuk, amelyek 0 típusú változókat tartalmazhatnak.
- 2 típus: individuumok osztályainak osztályai, stb.

Nem kielégítő, mert φ -ben előfordulhatnak kötött változók, és VCP szerint ezeknek is alacsonyabb típusba kell tartozniuk, mint φ .

Egyszerű és elágaztatott típuselmélet

A típusokba osztás mindig egy adott elmélethez/szöveghez viszonyítandó.

Egyszerű típuselmélet:

- A hierarchia alapja: a 0 típusú változók lehetséges értékei individuumok egy nem-üres osztályában vannak.
- 1 típus: individuumok osztályai. Ezeket $\varphi(x)$ propozicionális függvényekkel (nyitott mondatokkal) definiáljuk, amelyek 0 típusú változókat tartalmazhatnak.
- 2 típus: individuumok osztályainak osztályai, stb.

Nem kielégítő, mert φ -ben előfordulhatnak kötött változók, és VCP szerint ezeknek is alacsonyabb típusba kell tartozniuk, mint φ .

Elágaztatott típuselmélet: A típusokat természetes számok csökkenő sorozatával reprezentálhatjuk.

Típuselméleti aritmetika

Szükség van egy axiómára, amely biztosítja, hogy végtelen sok individuum (0 típusú objektum van). (**Végtelenségi axióma**)

Szükség van egy axiómára, amely biztosítja, hogy végtelen sok individuum (0 típusú objektum van). (**Végtelenségi axióma**)

A fenti definíció:

$$N(n) \leftrightarrow_{def} \forall \varphi ((\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')))) \rightarrow \varphi(n))$$

definiálja a t típusú természetes számokat, amennyiben a rákövetkezés-függvény a t típust saját magába képezi és φ egy t -nél magasabb típusba tartozik. Eltűnik az impredikativitás, mert N magasabb típusba fog tartozni, mint φ .

Szükség van egy axiómára, amely biztosítja, hogy végtelen sok individuum (0 típusú objektum van). **(Végtelenségi axióma)**

A fenti definíció:

$$N(n) \leftrightarrow_{\text{def}} \forall \varphi ((\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')))) \rightarrow \varphi(n))$$

definiálja a t típusú természetes számokat, amennyiben a rákövetkezés-függvény a t típust saját magába képezi és φ egy t -nél magasabb típusba tartozik. Eltűnik az impredikativitás, mert N magasabb típusba fog tartozni, mint φ .

Probléma: a szám definícióját nem tudjuk használni a szokásos induktív bizonyításokban, mert azok a tulajdonságok, amelyek bizonyítására indukciót használnánk, magasabb típusba tartoznak, mint φ .

Russell megoldása: a reducibilitás.

Russell megoldása: a reducibilitás.

φ x -nek predikatív_{Russell} függvénye (jelölés: $\varphi!x$), ha φ kötött változói (amennyiben vannak) ugyanolyan, vagy alacsonyabb típusúak, mint x .

Russell megoldása: a reducibilitás.

φ x -nek predikatív_{Russell} függvénye (jelölés: $\varphi!x$), ha φ kötött változói (amennyiben vannak) ugyanolyan, vagy alacsonyabb típusúak, mint x .

Reducibilitási axióma: Minden függvény egybeesik terjedelmileg egy predikatív függvénnyel.

Russell megoldása: a reducibilitás.

φ x -nek predikatív_{Russell} függvénye (jelölés: $\varphi!x$), ha φ kötött változói (amennyiben vannak) ugyanolyan, vagy alacsonyabb típusúak, mint x .

Reducibilitási axióma: Minden függvény egybeesik terjedelmileg egy predikatív függvénnyel.

A fenti program megvalósítása, azaz a matematika (természetes és valós számok aritmetikája, geometria mint koordináta geometria) formalizálása a típuselméleti logika keretében:

Russell megoldása: a reducibilitás.

φ x -nek predikatív_{Russell} függvénye (jelölés: $\varphi!x$), ha φ kötött változói (amennyiben vannak) ugyanolyan, vagy alacsonyabb típusúak, mint x .

Reducibilitási axióma: Minden függvény egybeesik terjedelmileg egy predikatív függvénnyel.

A fenti program megvalósítása, azaz a matematika (természetes és valós számok aritmetikája, geometria mint koordináta geometria) formalizálása a típuselméleti logika keretében:

Russell–Whitehead: *Principia Mathematica* I-III. (1. kiad.: 1910, 11, 13).

Frank Plumpton Ramsey (1903-1930)



Matematikus

Alapvető munkák a matematikai logikában, kombinatorikában,
közgazdaságtanban, metafizikában

Ramsey programja

Ramsey programja

„The Foundations of Mathematics”, 1925

Ramsey programja

„The Foundations of Mathematics”, 1925

Cél: a matematika rekonstrukciója (típuselméleti) logikai keretek között, a *Principia Mathematica* rendszerét kijavítva.

Ramsey programja

„The Foundations of Mathematics”, 1925

Cél: a matematika rekonstrukciója (típuselméleti) logikai keretek között, a *Principia Mathematica* rendszerét kijavítva.

A *Principia Mathematica* ellen a fő ellenvetés: a reducibilitási axióma.

Ramsey programja

„The Foundations of Mathematics”, 1925

Cél: a matematika rekonstrukciója (típuselméleti) logikai keretek között, a *Principia Mathematica* rendszerét kijavítva.

A *Principia Mathematica* ellen a fő ellenvetés: a reducibilitási axióma.

Filozófiai alap: Wittgenstein *Logikai-filozófiai értekezése*, mindenekelőtt az a tézis, hogy minden propozíció atomi propozíciók igazságfüggvénye (ahol az igazságfüggvény fogalmát általánosítjuk végtelen sok argumentumra).

Ramsey programja

„The Foundations of Mathematics”, 1925

Cél: a matematika rekonstrukciója (típuselméleti) logikai keretek között, a *Principia Mathematica* rendszerét kijavítva.

A *Principia Mathematica* ellen a fő ellenvetés: a reducibilitási axióma.

Filozófiai alap: Wittgenstein *Logikai-filozófiai értekezése*, mindenekelőtt az a tézis, hogy minden propozíció atomi propozíciók igazságfüggvénye (ahol az igazságfüggvény fogalmát általánosítjuk végtelen sok argumentumra).

Azon felül, hogy a matematika visszavezethető a logikára, a logicizmus másik alapvető elve, hogy az aritmetika számai ugyanazok a számok, mint amelyeket a mindennapi életben számolásra használunk, ezért az aritmetikai kifejezések nem egyszerűen tartalom nélküli szimbólumok (hanem a világról szóló tényállítások kifejezésére szolgálnak). Kritika a formalizmussal szemben.

Propozíciók, igazságfüggvények és propozicionális függvények

Propozíciók, igazságfüggvények és propozicionális függvények

Atomi propozíció: egy minőség vagy reláció ϕ nevét összekapcsoljuk megfelelő számú individuum nevével.

Propozíciók, igazságfüggvények és propozicionális függvények

Atomi propozíció: egy minőség vagy reláció ϕ nevét összekapcsoljuk megfelelő számú individuum nevével.

Ha n atomi propozíciónk van, akkor 2^n igazság-lehetőséggel kell számolnunk.

Propozíciók, igazságfüggvények és propozicionális függvények

Atomi propozíció: egy minőség vagy reláció ϕ nevét összekapcsoljuk megfelelő számú individuum nevével.

Ha n atomi propozíciónk van, akkor 2^n igazság-lehetőséggel kell számolnunk.

Ha az atomi propozíciók egy $\mathcal{P}$ végtelen halmazt alkotnak, akkor $\mathcal{P}$ minden részhalmaza egy igazság-lehetőséget reprezentál.

Propozíciók, igazságfüggvények és propozicionális függvények

Atomi propozíció: egy minőség vagy reláció ϕ nevét összekapcsoljuk megfelelő számú individuum nevével.

Ha n atomi propozíciónk van, akkor 2^n igazság-lehetőséggel kell számolnunk.

Ha az atomi propozíciók egy $\mathcal{P}$ végtelen halmazt alkotnak, akkor $\mathcal{P}$ minden részhalmaza egy igazság-lehetőséget reprezentál.

Egy propozíció $\mathcal{P}$ igazságfüggvénye, hha $\mathcal{P}$ igazság-lehetőségeinek egy halmazával való egyetértést fejez ki.

Propozíciók, igazságfüggvények és propozicionális függvények

Atomi propozíció: egy minőség vagy reláció ϕ nevét összekapcsoljuk megfelelő számú individuum nevével.

Ha n atomi propozíciónk van, akkor 2^n igazság-lehetőséggel kell számolnunk.

Ha az atomi propozíciók egy $\mathcal{P}$ végtelen halmazt alkotnak, akkor $\mathcal{P}$ minden részhalmaza egy igazság-lehetőséget reprezentál.

Egy propozíció $\mathcal{P}$ igazságfüggvénye, hha $\mathcal{P}$ igazság-lehetőségeinek egy halmazával való egyetértést fejez ki.

Propozicionális függvény: egy $f\hat{x}$ alakú kifejezés, hha $\hat{x}$ helyére egy megfelelő típusú nevet helyettesítve $f\hat{x}$ -be propozíciót kapunk.

Propozíciók, igazságfüggvények és propozicionális függvények

Atomi propozíció: egy minőség vagy reláció ϕ nevét összekapcsoljuk megfelelő számú individuum nevével.

Ha n atomi propozíciónk van, akkor 2^n igazság-lehetőséggel kell számolnunk.

Ha az atomi propozíciók egy $\mathcal{P}$ végtelen halmazt alkotnak, akkor $\mathcal{P}$ minden részhalmaza egy igazság-lehetőséget reprezentál.

Egy propozíció $\mathcal{P}$ igazságfüggvénye, hha $\mathcal{P}$ igazság-lehetőségeinek egy halmazával való egyetértést fejez ki.

Propozicionális függvény: egy $f\hat{x}$ alakú kifejezés, hha $\hat{x}$ helyére egy megfelelő típusú nevet helyettesítve $f\hat{x}$ -be propozíciót kapunk.

Az összes propozíciónak, amelyet $f\hat{x}$ -ből helyettesítéssel kapunk, $\forall x f(x)$ a logikai szorzata [konjunkciója], $\exists x f(x)$ a logikai összege [diszjunkciója]. Tehát ezek igazságfüggvények.

A matematika és a tautológiák

A matematika és a tautológiák

Egy propozíció tautológia, hha az összes igazság-lehetőség halmazával való egyetértést fejez ki; ellentmondás, ha az üres halmazzal való egyetértést.

A matematika és a tautológiák

Egy propozíció tautológia, hha az összes igazság-lehetőség halmazával való egyetértést fejez ki; ellentmondás, ha az üres halmazzal való egyetértést.

Két propozicionális szimbólum ugyanannak a propozíciónak a példánya, ha igazság-lehetőségeknek ugyanazzal a halmazával való egyetértést fejez ki.

A matematika és a tautológiák

Egy propozíció tautológia, hha az összes igazság-lehetőség halmazával való egyetértést fejez ki; ellentmondás, ha az üres halmazzal való egyetértést.

Két propozicionális szimbólum ugyanannak a propozíciónak a példánya, ha igazság-lehetőségeknek ugyanazzal a halmazával való egyetértést fejez ki.

A logicista tézis újrafogalmazása: A matematikának tautológiákból kell állnia (vagy ezek formájában kell rekonstruálni).

A matematika és a tautológiák

Egy propozíció tautológia, hha az összes igazság-lehetőség halmazával való egyetértést fejez ki; ellentmondás, ha az üres halmazzal való egyetértést.

Két propozicionális szimbólum ugyanannak a propozíciónak a példánya, ha igazság-lehetőségeknek ugyanazzal a halmazával való egyetértést fejez ki.

A logicista tézis újrafogalmazása: A matematikának tautológiákból kell állnia (vagy ezek formájában kell rekonstruálni).

A reducibilitási axióma nem tautológia. Ha igaz, akkor egy empirikus tény a világról.

A matematika és a tautológiák

Egy propozíció tautológia, hha az összes igazság-lehetőség halmazával való egyetértést fejez ki; ellentmondás, ha az üres halmazzal való egyetértést.

Két propozicionális szimbólum ugyanannak a propozíciónak a példánya, ha igazság-lehetőségeknek ugyanazzal a halmazával való egyetértést fejez ki.

A logicista tézis újrafogalmazása: A matematikának tautológiákból kell állnia (vagy ezek formájában kell rekonstruálni).

A reducibilitási axióma nem tautológia. Ha igaz, akkor egy empirikus tény a világról.

Egy további alapvető tézis: a matematika lényegileg extenzionális. Pl. halmazok ekvivalenciája azt jelenti, hogy van közöttük kölcsönösen egyértelmű leképezés, és ez független attól, hogy a leképezést ki tudjuk-e fejezni/tudjuk-e definiálni.

A paradoxonok felosztása

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

- Osztályok, amelyek nem elemei önmaguknak

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

- Osztályok, amelyek nem elemei önmaguknak
- Burali-Forti: a legnagyobb rendszám

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

- Osztályok, amelyek nem elemei önmaguknak
- Burali-Forti: a legnagyobb rendszám

Szemantikai paradoxonok:

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

- Osztályok, amelyek nem elemei önmaguknak
- Burali-Forti: a legnagyobb rendszám

Szemantikai paradoxonok:

- A hazug

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

- Osztályok, amelyek nem elemei önmaguknak
- Burali-Forti: a legnagyobb rendszám

Szemantikai paradoxonok:

- A hazug
- Richard paradoxona a definiálható valós számokról

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

- Osztályok, amelyek nem elemei önmaguknak
- Burali-Forti: a legnagyobb rendszám

Szemantikai paradoxonok:

- A hazug
- Richard paradoxona a definiálható valós számokról
- A heterologikus-paradoxon (lásd alább egy egzakt megfogalmazását)

A paradoxonok felosztása

Logikai paradoxonok:

- Osztályok, amelyek nem elemei önmaguknak
- Burali-Forti: a legnagyobb rendszám

Szemantikai paradoxonok:

- A hazug
- Richard paradoxona a definiálható valós számokról
- A heterologikus-paradoxon (lásd alább egy egzakt megfogalmazását)

A szemantikai paradoxonok a „jelentés” [denotálás, jelölés] fogalmán alapulnak, és ezért irrelevánsak a matematika szempontjából. A logikai paradoxonok ellenben csak logikai és matematikai fogalmakra épülnek és azt mutatják, hogy valamit elrontottunk a logikában (ill. matematikában).

Principia Mathematica – egyetértés és kritika

A PM úgy tekinti, hogy minden halmazt propozicionális függvény definiál. Ellenvetés: ld. fent a halmaz-ekvivalenciáról mondottakat
Semmi nem biztosítja, hogy minden halmaz kifejezető propozicionális függvénnyel. A halmazok függetlenek attól, hogyan tudjuk kifejezni őket.

A PM úgy tekinti, hogy minden halmazt propozicionális függvény definiál. Ellenvetés: ld. fent a halmaz-ekvivalenciáról mondottakat
Semmi nem biztosítja, hogy minden halmaz kifejezető propozicionális függvénnyel. A halmazok függetlenek attól, hogyan tudjuk kifejezni őket.

A PM a típuselmélet segítségével kerüli el a paradoxonokat. De ez felosztható két részre, a paradoxonok felosztásának megfelelően.

A PM úgy tekinti, hogy minden halmazt propozicionális függvény definiál. Ellenvetés: ld. fent a halmaz-ekvivalenciáról mondottakat. Semmi nem biztosítja, hogy minden halmaz kifejezető propozicionális függvénnyel. A halmazok függetlenek attól, hogyan tudjuk kifejezni őket.

A PM a típuselmélet segítségével kerüli el a paradoxonokat. De ez felosztható két részre, a paradoxonok felosztásának megfelelően.

Első rész: a propozicionális függvények nem lehetnek saját maguk argumentumai. Egyes függvények individuumok függvényei, mások individuumok függvényeinek függvényei, stb. Ez a(z egyszerű) típusok hierarchiája.

A PM úgy tekinti, hogy minden halmazt propozicionális függvény definiál. Ellenvetés: ld. fent a halmaz-ekvivalenciáról mondottakat. Semmi nem biztosítja, hogy minden halmaz kifejezető propozicionális függvénnyel. A halmazok függetlenek attól, hogyan tudjuk kifejezni őket.

A PM a típuselmélet segítségével kerüli el a paradoxonokat. De ez felosztható két részre, a paradoxonok felosztásának megfelelően.

Első rész: a propozicionális függvények nem lehetnek saját maguk argumentumai. Egyes függvények individuumok függvényei, mások individuumok függvényeinek függvényei, stb. Ez a(z egyszerű) típusok hierarchiája.

Vitán felül helyes, és elegendő a logikai paradoxonok elkerüléséhez.

A rendek hierarchiája

A rendek hierarchiája

Második rész:

A rendek hierarchiája

Második rész:

- Elemi proposíciók: véges számú atomi proposíció igazságfüggvényei.

A rendek hierarchiája

Második rész:

- Elemi proposíciók: véges számú atomi proposíció igazságfüggvényei.
- Elemi (predikatív_{Russell}) függvények: a függvényértékek elemi proposíciók.

Második rész:

- Elemi propozíciók: véges számú atomi propozíció igazságfüggvényei.
- Elemi (predikatív_{Russell}) függvények: a függvényértékek elemi propozíciók.
- Elsőrendű függvények: az elemi függvényekből jönnek létre kvantifikációval (individuum- és elemi függvényváltozókra).

Második rész:

- Elemi proposíciók: véges számú atomi proposíció igazságfüggvényei.
- Elemi (predikatív_{Russell}) függvények: a függvényértékek elemi proposíciók.
- Elsőrendű függvények: az elemi függvényekből jönnek létre kvantifikációval (individuum- és elemi függvényváltozókra).
- Másodrendű függvények: kvantifikációval elsőrendű függvény-változókra. Stb.

A rendek hierarchiája

Második rész:

- Elemi proposíciók: véges számú atomi proposíció igazságfüggvényei.
- Elemi (predikatív_{Russell}) függvények: a függvényértékek elemi proposíciók.
- Elsőrendű függvények: az elemi függvényekből jönnek létre kvantifikációval (individuum- és elemi függvényváltozókra).
- Másodrendű függvények: kvantifikációval elsőrendű függvény-változókra. Stb.

A rendeknek ez a hierarchiája elkerüli a szemantikai paradoxonokat.

A rendek hierarchiája

Második rész:

- Elemi propozíciók: véges számú atomi propozíció igazságfüggvényei.
- Elemi (predikatív_{Russell}) függvények: a függvényértékek elemi propozíciók.
- Elsőrendű függvények: az elemi függvényekből jönnek létre kvantifikációval (individuum- és elemi függvényváltozókra).
- Másodrendű függvények: kvantifikációval elsőrendű függvény-változókra. Stb.

A rendeknek ez a hierarchiája elkerüli a szemantikai paradoxonokat.

De akadályoz fontos matematikai eljárásokat és érveléseket (Dedekind-szelet, indukció). Ezért van Russellnek szüksége a reducibilitási axiómára.