A szemantika fizikalista értelmezéséről*

E. Szabó László
MTA–ELTE Elméleti Fizika Kutatócsoport
ELTE Tudománytörténet és Tudományfilozófia Tanszék

Kivonat

– „Röviden, Gödel megmutatta, hogy a bizonyítás az igazságnál gyengébb fogalom, függetlenül a használt axiómarendszertől." (Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach*)

– Nem! Gödel azt mutatta meg, hogy ha az igazságot a bizonyíthatóságtól eltérően értelmezzük, akkor az igazság és a bizonyíthatóság nem fog egybeesni.

1.

Legutóbbi előadásomban[1] felvázoltam a formális rendszerek fizikalista értelmezését. Abból a formalista álláspontból indultunk ki, hogy

1. A matematikai objektumoknak nincs jelentése. Ahogy Hilbert mondta „A matematika egy játék, melyet a papírlapra írt, jelentés nélküli szimbólumokkal játszunk, egyszerű szabályok szerint." „Pont, egyenes és sík helyett folyamatosan mondhatnánk, asztalt, széket és söröskorsót" – mondta egy másik alkalommal az euklideszi geometriára utalva.

2. Minél precízebben látjuk be valamely matematikai állítás igazságát, annál nyilvánvalóbb, hogy őt kizárólag az teszi igazzá, hogy levezethető az rendszer axiómáiból a rendszerben érvényes következtetési szabályok segítségével.

Sokan a formalizmus hívei közül helyesen állapítják meg, hogy a formális rendszerek sohasem léteznek másképpen, mint valamilyen konkrét fizikai „reprezentációban".

*Előadás, MAKOG 2003, Pécs

[1] MAKOG 2002: „A matematika-filozófiai formalizmus találkozása az elmefilozófiai fizikalizmussal", bővebben lásd L. E. Szabó, Formal systems as physical objects: a physicalist account of mathematical truth, *International Studies in the Philosophy of Science*, megjelenés alatt.

> A számok, a halmazok, a csoportok és az algebrák autonóm realitással bírnak, függetlenül mindazoktól a dolgoktól, melyekre a fizika törvényei vonatkoznak. E matematikai struktúrák tulajdonságai éppolyan objektívek lehetnek, mint amilyeneknek azt Platón feltételezte (vagy amilyeneknek ezeket mostanában Roger Penrose beállítja). Mindezek azonban kizárólag a fizikai világ révén jelennek meg számunkra. Kizárólag a komputerek, az emberi agy és más fizikai objektumok nyújthatnak számunkra bepillantást a matematika absztrakt világába.

írja szerzőtársaival David Deutsch,[2] a kvantumkomputerek elméletének egyik alapítója.

Az általam javasolt fizikalista megközelítés ettől radikálisabban szakít a platonista maradványokkal. Lényege – a formalista értelmezés következetes kiterjesztése mellett –, hogy a matematika formális rendszereit mint jelekből és következtetési mechanizmusokból álló *fizikai* rendszereket fogjuk fel, anélkül azonban, hogy feltételeznénk valamilyen elvont matematikai struktúrák létezését, melyeket azok „reprezentálnak" – s még kevésbé, hogy gondolatmeneteinkben apellálnánk ilyen absztrakt struktúrák tulajdonságaira. Argumentációnk abból a felismerésből indul ki, hogy egy matematikai állítás igazságának *tudásához* vezető derivációs/komputációs fizikai folyamat létezése egyben a szóban forgó állítás *igazság-feltétele* is.

A formalista álláspont megcáfolása céljából sokan teszik fel a kérdést: Ha a matematika csak jelentés nélküli szimbólumokból áll, hogyan lehet, hogy alkalmazható a valóságra? E kérdés azonban egy tévedésen nyugszik: a matematika nem „alkalmazható" a valóságra. A *fizikai elméletek,* azok valóban referálnak a valóság elemeire!

Egy P fizikai elmélet – ideális esetben – két komponensből áll: $P = L + S$, ahol L egy formális rendszer, melyben általában *felhasználunk* korábban, a matematikában és a logikában konstruált formális rendszereket, S pedig egy, a formális rendszerből az empirikus világba mutató szemantika. Például, bizonyos fizikai elméletben a tér-koordinátáknak mint fizikai mennyiségeknek a leírásában az euklideszi geometria alkalmazva van. Ennek a ténynek azonban semmi köze sincs az olyan matematikai állítások igazságához, mint $a^2 + b^2 = c^2$: egy ilyen állítás egyszerűen azért igaz, mert levezethető a rendszer axiómáiból.

Természetesen, érdekes filozófiai kérdés, hogy hogyan működik az S szemantika. Ennek a kérdésnek azonban semmi köze sincs a matematikai problémákhoz! Jól látszik ez, ha arra gondolunk, hogy a fizikai tér(idő)re vonatkozó új kísérleti tény megváltoztathatja a fizikai elméletet, például az egész euklideszi geometriát egy másikkal váltjuk fel – legalábbis a relativitáselmélet történetének szokásos értelmezése szerint[3] –, míg ez a változás teljesen érintetlenül hagyja magát az euklideszi geometriát.

---

[2] D. Deutsch, A. Ekert, & R. Lupacchini, Machines, Logic and Quantum Physics, *Bulletin of Symbolic Logic*, **6** (2000) pp. 265–283.

[3] Vö. E. Szabó L., *A nyitott jövő problémája – véletlen, kauzalitás és determinizmus a fizikában*, Typotex, Budapest 2002, **17.–34.** pont.

A P fizikai elmélet egy A mondata két különböző értelemben lehet igaz:

Igazság$_1$: A egy tétele L-nek, azaz $L \vdash A$ (ami egy matematikai igazság az L formális rendszeren belül, vagyis az L formális rendszerre vonatkozó [empirikus] tény).

Igazság$_2$: Az S szemantika szerint, A a világ egy (az elmélet által leírt rendszerre vonatkozó) empirikus tényére referál.

Például, „A ponttöltés elektrosztatikus tere $\frac{kQ}{r^2}$" mondat a Maxwell-féle elektrodinamika egy tétele – levezethetjük a Maxwell-egyenletekből –, másfelől, a Maxwell-elmélet szimbólumait az empirikus világgal összekötő szemantika szerint, a ponttöltésre vonatkozó tényt fejez ki. Az Igazság$_1$ és az Igazság$_2$ egymástól teljesen függetlenek, abban az értelemben, hogy az egyikből nem következik a másik.[4]

A formális rendszerek fizikalista ontológiája értelmében tehát egy formális rendszer 1) nem reprezentál egy (a platonista birodalomban, vagy Popper n-ik világában, vagy valami hasonlóban lakó) absztrakt matematikai struktúrát, és 2) nem referál a valóságos fizikai világ elemeire. Hasonlóképpen nincs „fordítás", „megértés", „izomorfia", stb. Van viszont *kölcsönhatás*. Kölcsönhatás a formális rendszer és más fizikai rendszerek között. Az egész „language game" fizikai kölcsönhatások összessége: kölcsönhatás *a kőműves agya*, *a kőműves teste*, *a levegő* (melyben a hanghullámok terjednek), *a segéd teste*, *a segéd agya*, és *a tégla* között.[5] Nincs „jelentés" és nincs „intencionalitás" ebben a képben – mint ahogy nincsenek absztrakt matematikai struktúrák sem. Van viszont ontológiai egység! A fizikai elméletek például a fizika számára értelmezhetőkké válnak: nem csak az L formális rendszer fogható fel egy fizikai rendszerként, hanem az S szemantika is értelmezhetővé válik, mint az L rendszert az elmélet által leírt másik fizikai rendszerrel összekötő fizikai kölcsönhatások kauzális láncolata.

2.

A fentiekben vázolt radikális fizikalista-formalista felfogásnak figyelemreméltó következményei vannak a Gödel-tétel filozófiai analízisét tekintve. Nézzük meg ugyanis, mit mond a tétel. Először, adott a következő séma:

[4] Sőt, tegyük fel, hogy Γ igaz$_2$ mondatoknak egy halmaza, továbbá, hogy $\Gamma \vdash A$ az L rendszerben. Még ekkor sem teljesül automatikusan (ha tetszik, *a priori*), hogy A egy igaz$_2$ mondat. Ez ugyanis egy empirikus kérdés. Ha az, akkor ez egy új információ a világról, amely megerősítheti az egész $P = L + S$ fizikai elméletet, beleértve az L-beli következtetési szabályok P-ben való alkalmazhatóságát is. Világosan kell látnunk tehát, hogy 1) a logika szabályait éppúgy mi találjuk ki, mint a matematika más részeit, és 2) a logika szabályainak alkalmazhatósága a világ leírására szolgáló elméletekben, egy empirikus kérdés.

[5] Vö. L. WITTGENSTEIN, *Philosophical Investigations*, Blackwell, Oxford 2002, p. 3.

$$\begin{array}{ccc} \text{Meta-matematikai} & & \text{Tárgy-elmélet,} \\ \text{elmélet} & & \text{pl. számtan} \\ \| & & \\ (M,S) & \overset{S}{\Longleftrightarrow} & L \\ & & \\ M & \overset{\varphi}{\Longleftrightarrow} & L \\ & \text{Gödel-számozás} & \end{array}$$

Vagyis, adott egy meta-matematikai elmélete az L formális rendszernek. Ez azt jelenti, hogy adott egy másik formális rendszer M és egy szemantika S, ami M-et és L-et összeköti. Például olyan mondatokat tudunk mondani M-ben, mint „az A formula L-ben nem bizonyítható”, amely az L egy tulajdonságát hivatott állítani. Jelöljük az egyszerűség kedvéért ezt a mondatot $nb(A)$-val. Az ilyen és hasonló mondatoknak van egy Igazság$_2$ értelemben vett igazsága az (M,S)-ben. Vagyis egy M-beli formula akkor igaz$_2^M$, ha az S szemantika értelmében ő egy olyan állítás L-ről, amely tényszerűen fennáll L-re. Például, $nb(A)$ akkor igaz$_2^M$, ha nem létezik A-nak bizonyítása L-ben, más szóval, ha nem igaz, hogy A igaz$_1^L$.

A tétel bizonyításában ezek után megjelenik egy másik leképezés is, a Gödel-számozás által generált φ leképezés (Gödel-izomorfizmus). Mellékes most, hogy mi a φ és az S értelmezésének viszonya. A lényeg, hogy azt állítjuk a tétel bizonyítása során, hogy φ „megőrzi az igazságot”, vagyis, hogy ha x igaz$_2^M$, akkor $\varphi(x)$ igaz L-ben. De milyen igazságról van itt most szó L-ben? Jelöljük az igazságnak ezt a fogalmát Igazság$_3^L$-lel. Mint majd mindjárt belátjuk, matematikai igazságról nem lehet szó! Vagyis ez az igazság nem lehet azonos az Igazság$_1^L$-lel. *Ez azt jelenti, hogy ki kell mozdulni a formalista keretek közül, ha értelmesnek akarjuk tudni a Gödel-tétel bizonyítását!* Tegyük fel ugyanis, hogy Igazság$_3^L$=Igazság$_1^L$. A bizonyítás során azt állítjuk, hogy „létezik olyan G formula L-ben, hogy $G = \varphi(nb(G))$, és hogy $nb(G)$ egy igaz meta-matematikai állítás, tehát a neki megfelelő G igaz formula L-ben, de nem bizonyítható”. De mit is mondtunk? $nb(G)$ igaz$_2^M$, következésképpen $G = \varphi(nb(G))$ igaz$_3^L$=igaz$_1^L$, de másfelől („nem bizonyítható”, tehát) *nem igaz*, hogy $G = \varphi(nb(G))$ igaz$_1^L$. Ez ellentmondás, tehát Igazság$_3^L$≠Igazság$_1^L$.

Hanem akkor milyen új igazságról van szó? Egy formális rendszerben természetesen sokféle igazság-fogalmat (értékelést) vezethetünk be, formálisan. Fontos azonban szem előtt tartani a következőket:

1. A formalista értelmezés szerinti Igazság$_1^L$-en kívül, vagyis a bizonyíthatóságon kívül, nincs semmiféle kanonikus igazság-fogalom a matematikában.

2. Ha formálisan bevezetünk egy új igazság-fogalmat L-ben (Igazság$_3^L$), az nem feltétlenül teljesíti, hogy a φ „Gödel-izomorfizmus” igazság-megőrző leképezés lesz.

3. Ha történetesen olyan új igazság-fogamat definiálunk L-ben, amelyre nézve a „Gödel-izomorfizmus” valóban igazság-megőrző leképezés, (és amelyik szükségképpen nem egyezhet meg a matematikai igazság formalista

értelmezésével!), a Gödel-féle nem-teljességi tétel akkor sem állít többet, mint azt a trivialitást, hogy „Ha az igazságot a bizonyíthatóságtól eltérően értelmezzük, akkor az igazság és a bizonyíthatóság nem fog egybeesni."