Absztrakció = mozgás a konkréttól a konkrétig

E. Szabó László
MTA-ELTE Elméleti Fizika Kutatócsoport
ELTE Tudománytörténet és Tudományfilozófia Tanszék

Kivonat

Megmutatjuk, hogy az absztrakció folyamata nem vezet ki a konkrét fizikai létezők birodalmából. Következésképpen, ha igaza van Fregenek, hogy az absztrakt dolgok – túl téren és időn – a „harmadik világ” tartozékai, vagyis sem nem mentálisak, sem nem érzékelhetőek, akkor például a matematikának semmi köze nincs az absztrakt dolgokhoz. Ez egy igen erős argumentum a strukturalizmus és a fogalom-platonizmus ellen.

Előzmények

Nevezzük röviden fizikalizmusnak a következő ismeretelméleti illetve ontológiai alapvetésre épülő filozófiai irányzatot:

1. A világról kizárólag *a posteriori* eszközökkel nyerhető valódi ismeret (empirizmus).
2. A mentális jelenségek, beleértve a tapasztalást és a tapasztalat mentális feldolgozását is, teljes egészében értelmezhetők a fizikai világ eseményeinek, állapotainak és tulajdonságainak segítségével.

A matematika fizikalista felfogásának[1] alaptézisei a következők:

(a) A matematika elméletek „állításainak” nincs jelentése. Az olyan mondatok, mint „$2 + 3 = 5$”, „$a^2 + b^2 = c^2$” vagy „$e(ee) = e$” nem is tekinthetők nyelvi objektumoknak a nyelv hagyományos értelmében. Ezek a megfelelő formális nyelv jól képzett formulái, s mint ilyenek nem hordoznak jelentést vagy Tarskiánus igazságot. Ugyanúgy, mint nem tulajdonítunk „igazságot” vagy „hamisságot” egy mosogatógépnek vagy egy téglának, mert nem nyelvi entitások.

(b) A hagyományos értelemben nyelvi entitásoknak tekinthető mondatok nem az X-típusú formális-nyelvi jól képzett formulák, hanem a $\Sigma \vdash X$-típusú meta-matematikai mondatok. Ezeknek a mondatoknak van jelentése, és van Tarskiánus értelemben vett igazsága, nevezetesen az adott formális rendszer egy tulajdonságát állítják, és igazak, ha a szóban forgó formális rendszer tényleg olyan tulajdonságú.

hagyományos formalista lépés

[1] L. E. Szabó, Formal System as Physical Objects: A Physicalist Account of Mathematical Truth, *International Studies in the Philosophy of Science*, **17** (2003), pp. 117 – 125; E. Szabó L., A matematika-filozófiai formalizmus találkozása az elmefilozófiai fizikalizmussal, in Csányi V., Kampis Gy. és Pléh Cs. (szerk.) Az észleléstől a nyelvig, Gondolat Kiadó, Budapest 2004.

(c) A formális rendszer nem egyéb mint jeleknek nevezett fizikai tárgyak és a képzési illetve következtetési szabályoknak nevezett fizikai törvényszerűségek összessége. A formális rendszer tehát egy fizikai rendszer.

(d) A $\Sigma \vdash X$-típusú meta-matematikai mondatok tehát egy fizikai rendszer tulajdonságát állító mondatok. S mint ilyenek, *a posteriori* természetűek, vagyis hogy igazak-e, azt a szóban forgó fizikai rendszer megfigyelése útján dönthetjük el.

(e) Következésképpen, a matematikus egy állítása, vagyis egy $\Sigma \vdash X$-típusú mondat

- nem *a priori*
- nem biztos – hiszen induktív általánosítással nyerjük
- viszont szintetikus és kontingens faktuális tartalma van
- és az, hogy igaz vagy hamis, független az emberi tudástól

A matematikus állításai tehát közönséges, a fizikai világ objektív tényét kifejező tudományos állítások, olyanok, mint amikor a vegyész azt állítja, hogy $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$.

fizikalista lépés

A matematikával kapcsolatos félreértések eloszlatása érdekében érdemes tisztázni a matematikai és fizikai elméletek közötti alapvető különbséget. Egy fizikai elmélet két komponensből áll, egy L formális rendszerből és egy S szemantikából, amely az empirikus világra referál. L általában egy (első rendű) formális rendszer, amelyben megadjuk

- a logikai axiómákat és a derivációs szabályokat (mondjuk az elsőrendű predikátum kalkulus egyenlőséggel)
- bizonyos matematikai elméletek axiómáit
- és a fizikai axiómákat

A fizikai elmélet egy A mondata két – egymástól független – értelemben lehet igaz:

Igazság$_1$: A tétel L-ben, vagyis $L \vdash A$ (ami az L formális rendszer egy tényét fejezi ki)

Igazság$_2$: Az S szemantikának megfelelően, A az elmélet által leírt fizikai világ egy tényét fejezi ki

Például, „A ponttöltés elektromos tere $\frac{kQ}{r^2}$" mondat Igaz$_1$, mert tétele a Maxwell-féle elektrodinamikának (levezethető a Maxwell-egyenletekből), ugyanakkor Igaz$_2$ is, mert az elmélet szemantikája szerint a pontöltések olyan tulajdonságát fejezi ki, amely valóban fennáll.

Egy formális rendszer tulajdonságait leíró meta-matematikai elmélet tehát egy fizikai elmélet, hiszen egy fizikai rendszer tulajdonságait írja le.

A probléma

A matematika filozófiájában gyakran találkozunk azzal a nézettel, amely elismeri ugyan, hogy a formális rendszerek mindig valamilyen konkrét fizikai jelekben és mechanikus szabályokban *reprezentált* formában állnak előttünk, mégis feltételezi, hogy létezik valami e fizikai reprezentációk mögött, egy „absztrakt matematikai struktúra", amely reprezentálva van. Gyakran a formalista irányzaton belül is találkozunk ezzel az ambivalens nézettel. Curry például ezt írja:

> ... jóllehet egy formális rendszert különböző módon reprezentálhatunk, azok a tételek, melyeket az adott szimbolikus rendszer [primitive frame] speciális tulajdonságainak megfelelően levezetünk, akkor is igazak maradnak, ha a reprezentációt megváltoztatjuk. Igaz tehát, hogy a szimbolikus rendszer valamilyen értelemben definiál egy formális rendszert mint a gondolkodás egyértelműen meghatározott tárgyát. Nem jelenti ez persze azt, hogy van valamiféle önállóan létező „formális rendszernek" nevezett entitás, amely mindenféle reprezentációtól függetlenül létezik. Ellenkezőleg, nem tudunk másként elgondolni egy formális rendszert, mint valamilyen konkrét reprezentációban. Mégis, mikor úgy gondolunk rá *mint formális rendszerre*, akkor elvonatkoztatunk a konkrét reprezentáció partikuláris tulajdonságaitól.[2]

Tézis

Tézisünk e rejtett Platonizmus ellen irányul:

> *Az absztrakció folyamata nem vezet ki a konkrét fizikai létezők birodalmából. Nem létezik tehát semmi más a konkrét fizikai rendszerekben megtestesülő formális rendszereken kívül.*

Mert mit is jelentene az, hogy „elvonatkoztatunk a konkrét reprezentáció partikuláris tulajdonságaitól"? Vizsgáljuk meg először azt, mit kapunk, ha elvonatkoztatunk egy Z fizikai rendszer valamilyen lényegtelen, speciális tulajdonságaitól. Ez azt jelenti, hogy egy olyan Z-t leíró $L + S$ fizikai elmélethez jutunk, amelyben L egy formális rendszer az S szemantika pedig e formális rendszer bizonyos elemeit a Z fizikai rendszerre vonatkozó (fontos) empirikus tényekkel hozza összefüggésbe. Az itt szereplő L formális rendszer persze egy szokásos értelemben vett, fizikailag megtestesülő formális rendszer az agyban, vagy a papíron, etc. Hasonlóképpen, legyen most a Z fizikai rendszer egy L_1 formális rendszer (egy formális rendszer fizikai „reprezentációja", Curry terminológiájában). Az absztrakció eredményeként egy az L_1 fizikai rendszert leíró $L_2 + S$ fizikai elmélethez jutunk. Vagyis, **valamiféle „absztrakt struktúra" helyett egy másik L_2 formális rendszerhez jutunk „valamilyen konkrét reprezentációban"** – Curry kifejezésével élve.

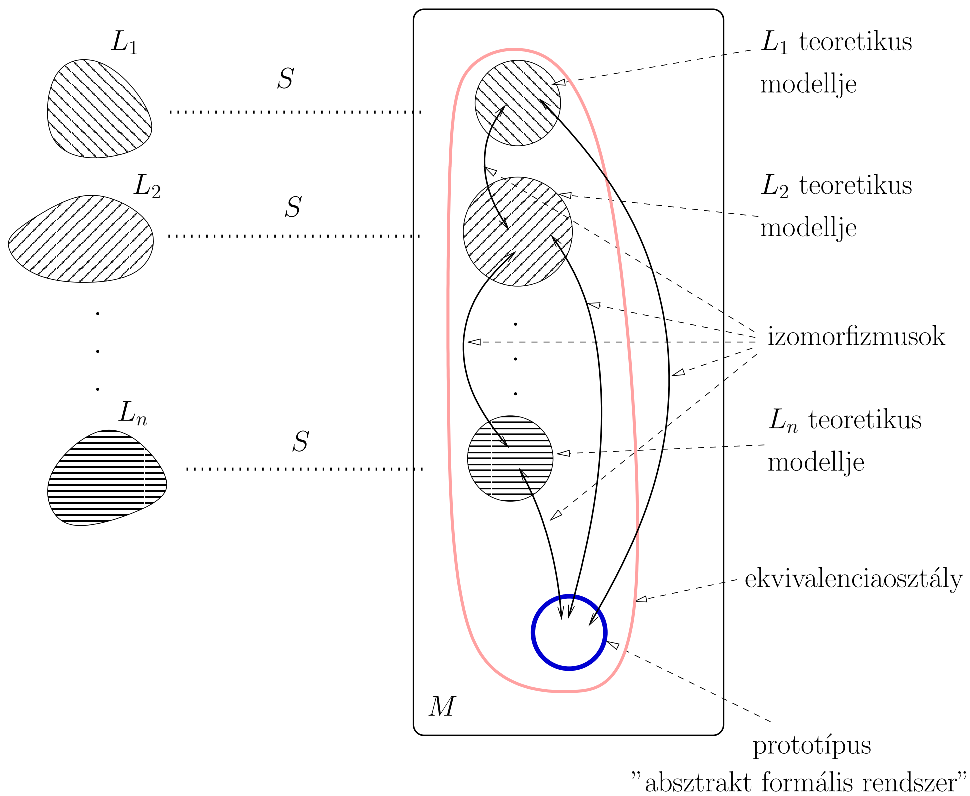
Azt találjuk tehát, hogy a formális rendszerek mindig „hús-vér" fizikai rendszerek. Semmi okunk sincs azt mondani, hogy ezek a konkrét fizikai rendszerek valamilyen absztrakt struktúrának a reprezentációi. Nem léteznek ilyen absztrakt entitások a konkrét fizikai rendszerekben testet öltött formális rendszereken kívül.

Ugyanilyen okoknál fogva nem nyerünk „absztrakt struktúrákat", ha azokat „izomorf formális rendszerek ekvivalencia-osztályaiként" vagy valami hasonló módon képzeljük el. Hiszen az olyan dolgokat mint „izomorfia", „ekvivalencia", „ekvivalencia-osztályok", stb., nem tudunk másképpen elgondolni, csak mint egy alkalmas formális rendszer elemeit, s ez a formális rendszer is valahogyan „reprezentálva van". Kategoriális hiba lenne két fizikai objektum közötti „izomorfiáról" beszélni.

Ahhoz, hogy összevessünk két L_1 és L_2 formális rendszert, szükségünk van egy meta-matematikai elméletre, amely egyszerre képes L_1 és L_2 leírására. Vagyis szükségünk van egy (M, S) fizikai elméletre, ahol M egy harmadik formális rendszer és az S szemantika részben az L_1 formális rendszerre mutat, amely a fizikai világ egy darabja, részben az L_2 formális rendszerre mutat, amely a fizikai világ egy másik darabja (1. ábra).

Mivel az izomorfia, ekvivalencia osztály, stb. halmazelméleti fogalmak, M-nek olyan formális rendszernek kell lennie, amelyik tartalmazza a halmazelméletet. Az $L_1, L_2, \dots L_n$ formális rendszerek szimultán reprezentálva vannak (M, S)-ben, ami azt jelenti, hogy az (M, S) elmélet egyszerre képes leírni a tárgyrendszerek bizonyos tulajdonságait. Csak az M formális rendszeren belül van értelme izomorfiáról és hasonlókról beszélni. Csak ott értelmezhető az $L_1, L_2, \dots L_n$ formális rendszerek teoretikus modelljeinek izomorfiája, és ott képezhetjük e modellek ekvivalencia-osztályait, stb. Csak az M formális rendszeren belül van értelme ezeknek a struktúráknak a prototípusát definiálni, vagyis valami olyasmit, amit „absztrakt matematikai struktúrának" szokás gondolni. De ami a legfontosabb, **mindezek a matematikai objektumok az M formális rendszeren belül laknak, vagyis egy a fizikai világban létező hús-vér formális rendszer elemei**.

[2] Curry, H. B., *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics,* North-Holland, Amsterdam 1951, 30. old.



1. ábra. *Kategoriális hiba lenne két formális rendszer „izomorfiájáról" beszélni. Az izomorfia olyan fogalom, amelynek csak egy formális rendszeren belül van értelme, méghozzá olyan formális rendszeren belül, amelyik tartalmazza a halmazelméletet. Ahhoz tehát, hogy formális rendszerek izomorfiájáról beszélhessünk, szükségünk van egy meta-matematikai elméletre (egy harmadik formális rendszerre és egy megfelelő szemantikára), amelyben a tárgy-rendszerek egyszerre reprezentálhatók.*

Összefoglalva tehát, amikor egy formális rendszer mint fizikai rendszer partikuláris tulajdonságaitól elvonatkoztatunk, vagy amikor több különböző partikuláris tulajdonsággal bíró formális rendszernek mint fizikai rendszereknek közös tulajdonságait felhasználva, azok közös modelljét, „prototípusát" alkotjuk meg, az absztrakció eredménye egy újabb, fizikai entitásként létező formális rendszer lesz. **Az absztrakció folyamata tehát nem vezet ki a fizikai létezők világából.** Következésképpen, ha igaza van Fregenek, hogy az absztrakt dolgok – túl téren és időn – a „harmadik világ" tartozékai, vagyis sem nem mentálisak, sem nem érzékelhetőek, akkor a matematikának semmi köze nincs az absztrakt dolgokhoz. E megfigyelésünk igen erős argumentum a strukturalizmus és a fogalom-platonizmus ellen.[3]

Minthogy az absztrakciós folyamat kiinduló pontját képező fizikai entitásoknak nem kell feltétlenül a matematika tárgyát képező formális rendszereknek lenniük, általában elmondható, hogy az absztrakció nem vezet fregeiánus absztrakt entitásokhoz. **Az absztrakció egy olyan folyamat, amely egyik konkrét fizikai entitástól a másik konkrét fizikai entitásig vezet.**

S ez nem valamiféle nominalista álláspont és nem is valamiféle támadás a tudományos realizmus ellen! Amikor egy megfelelően konfirmált fizikai (általában, tudományos) elmélet a tárgyát képező fizikai objektum egy tulajdonságát az elméletben használt formális rendszer bizonyos elemével írja le, akkor ez a fizikai világ egy objektív tulajdonságát tükrözi – a hű realista „lábdobbantásával" kísérve, vagy anélkül. Hasonlóképpen, ha különböző fizikai objektumok bizonyos tulajdonságait az elméletben használt formális rendszer egy közös

[3]Vö. S. Shapiro, *Philosophy of mathematics: structure and ontology*, New York : Oxford University Press, 1997.

elemével tudjuk leírni, akkor ez tükrözi a fizikai világnak azt az objektív tényét, hogy a szóba forgó fizikai entitások egy közös tulajdonsággal bírnak. Más szóval, a fizikai entitások tulajdonságait leíró „elméleti fogalmak”, melyek nem mások, mint a megfelelő formális rendszer elemei – azaz maguk is fizikai entitások –, a szóban forgó fizikai entitás objektív – ha tetszik, a „valóságban is létező”, „reális” – tulajdonságát tükrözi. Ám e realista elkötelezettségből nem következik, hogy ezeknek az „elméleti fogalmaknak”, mint valami „absztrakt entitásoknak”, önálló létezést tulajdonítsunk, függetlenül a fizikai entitásokként létező formális rendszerektől.

Végül vizsgáljuk meg, miből fakad az a széles körben elterjedt meggyőződés, hogy a matematikai objektumok az absztrakt entitások paradigmatikus esetei. A zavart a következő tények félreértése okozza:

(a) A matematikai igazság független attól, hogy hogyan állnak a dolgok a matematikus külső világának azon részében, amelyik úgyszintén külső a szóban forgó formális rendszerre nézve is. Jelöljük a világnak ezt a részét A-val. Más szóval, a matematikai igazság független attól a világtól, amelyet tradicionálisan a fizikai elméletek írnak le. Ezért tűnik úgy, hogy a matematikai igazság téren és időn kívüli.

(b) A matematikai igazság független attól, hogy hogyan állnak a dolgok a matematikus belső világának azon részében, amelyik külső a szóban forgó formális rendszerre nézve. Jelöljük a világnak ezt a részét B-vel. A matematikai igazság tehát nem mentális.

(c) (a) és (b) pontból következik, hogy a matematikai igazságok kívül esnek az A és B tartományokon.

Mármost a (c) megállapítást sokan félreértik, mondván, hogy a matematikai igazságok absztrakt entitásokra vonatkoznak, melyek mind a külső mind a belső világban történő konkrét reprezentációktól függetlenül léteznek. Ez a vélekedés azonban tévesen figyelmen kívül hagyja, hogy A nem azonos a teljes külső világgal, és hogy B nem azonos a teljes belső világgal. Ami kimarad A-ból és B-ből, az éppen az, amire a matematikai igazságok referálnak, a formális rendszerek maguk, melyek a fizikai világ egy partikuláris részét képezik, akár annak külső, akár annak belső részében – ez az itt szorgalmazott fizikalista nézőpontból teljesen mindegy. És mint láttuk, az absztrakció nem vezet ki a fizikai világnak ebből a tartományából.